Teorema (Desigualdade de Cauchy-Schwarz): Seja V um espaço com produto interno. Se u e v são elementos de V, então:

$$|\langle u,v\rangle| \leq \|u\|\,\|v\|$$

e a igualdade é válida se, e somente se, os elementos u e v são linearmente dependentes.

Demonstração: Se os elementos u e v são linearmente dependentes, então existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $u = \alpha v$, e assim temos:

$$|\langle u,v\rangle| = |\langle \alpha v,v\rangle| = |\alpha\langle v,v\rangle| = |\alpha|\,\langle v,v\rangle = |\alpha|\,\sqrt{\langle v,v\rangle}\sqrt{\langle v,v\rangle} = \sqrt{\alpha^2\langle v,v\rangle}\sqrt{\langle v,v\rangle} =$$

$$= \sqrt{\alpha\langle \alpha v,v\rangle}\sqrt{\langle v,v\rangle} = \sqrt{\alpha\langle v,\alpha v\rangle}\sqrt{\langle v,v\rangle} = \sqrt{\langle \alpha v,\alpha v\rangle}\sqrt{\langle v,v\rangle} = \|u\|\,\|v\|$$

onde usamos as propriedades da definição de produto interno. Agora, se u e v não forem linearmente dependentes, então para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ temos que $u + \alpha v \neq e_V$, de modo que $\langle u+\alpha v, u+\alpha v\rangle > 0$. Logo, temos:

$$\langle u+\alpha v, u+\alpha v\rangle = \langle u,u\rangle + \langle u,\alpha v\rangle + \langle \alpha v,u\rangle + \langle \alpha v,\alpha v\rangle =$$

$$= \langle u,u\rangle + \alpha\langle u,v\rangle + \alpha\langle u,v\rangle + \alpha^2\langle v,v\rangle = \langle u,u\rangle + 2\alpha\langle u,v\rangle + \alpha^2\langle v,v\rangle > 0$$

Esta é uma inequação do segundo grau na variável α. Logo, a equação do segundo grau:

$$\langle u,u\rangle + 2\alpha\langle u,v\rangle + \alpha^2\langle v,v\rangle = 0$$

não possui raízes reais e, portanto, seu discriminante deve ser menor que zero:

$$4\langle u,v\rangle^2 - 4\langle u,u\rangle\langle v,v\rangle < 0 \Rightarrow 4\langle u,v\rangle^2 < 4\langle u,u\rangle\langle v,v\rangle \Rightarrow \langle u,v\rangle^2 < \langle u,u\rangle\langle v,v\rangle$$

Extraindo a raiz quadrada em ambos os lados e usando o fato que $\langle u,u\rangle$ e $\langle v,v\rangle$ são positivos, temos que:

$$\sqrt{\langle u,v\rangle} < \sqrt{\langle u,u\rangle}\sqrt{\langle v,v\rangle} \Rightarrow |\langle u,v\rangle| < \|u\|\,\|v\|$$

o que completa a demonstração. ∎