Teoremas - Base e Dimensão

Teorema 1: *Seja V um espaço vetorial e $\{v_1, ..., v_n\}$ um conjunto de elementos que geram V. Então, dentre esses elementos podemos extrair uma base para V.*

Demonstração: Se o conjunto $\{v_1, ..., v_n\}$ for L.I, então, por definição já é uma base para V e não temos nada a fazer.
Agora, se o conjunto é L.D., então existem escalares $\alpha_1, ..., \alpha_n$ não todos nulos, tais que:

$$\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n = e$$

com e o elemento neutro de V.
Considere, por exemplo, que $\alpha_n \neq 0$, então podemos dividir a equação por α_n e isolar v_n:

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_n} v_1 + ... + \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} + v_n = e \Rightarrow v_n = -\frac{\alpha_1}{\alpha_n} v_1 - ... - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}$$

Assim, v_n é combinação linear dos demais elementos. Pela propriedade (P7) de Dependência Linear, podemos extrair v_n do conjunto que ele continua gerando V. Fazendo este mesmo processo uma quantidade finita de vezes, obteremos um subconjunto de $\{v_1, ..., v_n\}$ formado por r elementos L.I. ($r \leq n$) que ainda geram V, ou seja, formam uma base para V.

Teorema 2: *Seja V um espaço vetorial gerado por um conjunto finito de n elementos $v_1, v_2, ..., v_n$. Então, qualquer conjunto linearmente independente em V possui no máximo n elementos.*

Demonstração: Considere um subconjunto de V, com m elementos $W = \{w_1, w_2, ..., w_m\}$, com $m > n$. Vamos mostrar que W é L.D. Assim, qualquer conjunto L.I. possui no máximo n elementos.

Como $\{v_1, ..., v_n\}$ gera V, pelo Teorema 1 podemos extrair desse conjunto uma base para V. Seja $\{v_1, ..., v_r\}$ esta base. Então, existem escalares α_{ij}, com $i = 1, 2, ..., r$ e $j = 1, 2, ..., m$, tais que:

$$w_j = \alpha_{1j} v_1 + ... + \alpha_{ij} v_i + ... + \alpha_{rj} v_r \qquad (1)$$

Consideremos agora a combinação linear nula de $w_1, ..., w_m$:

$$\beta_1 w_1 + ... + \beta_m w_m = e \qquad (2)$$

Substituindo as relações de (1) em (2) obtemos:

$$\beta_1(\alpha_{11} v_1 + ... + \alpha_{r1} v_r) + ... + \beta_m(\alpha_{1m} v_1 + ... + \alpha_{rm} v_r) = e \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\beta_1 \alpha_{11} + \beta_2 \alpha_{12} + ... + \beta_m \alpha_{1m}) v_1 + ... + (\beta_1 \alpha_{r1} + \beta_2 \alpha_{r2} + ... + \beta_m \alpha_{rm}) v_r = e$$

Como $\{v_1, ..., v_r\}$ é uma base para V, então este conjunto é L.I. Assim temos:

$$\begin{cases} \beta_1 \alpha_{11} + \beta_2 \alpha_{12} + ... + \beta_m \alpha_{1m} & = 0 \\ \vdots & \\ \beta_1 \alpha_{r1} + \beta_2 \alpha_{r2} + ... + \beta_m \alpha_{rm} & = 0 \end{cases}$$

Obtemos um sistema linear homogêneo com r equações e m incógnitas $\beta_1, ..., \beta_m$. E como $r \leq n < m$, o sistema admite solução não trivial. Assim, existem escalares não todos nulos $\beta_1, ..., \beta_m$, tais que:

$$\beta_1 w_1 + ... + \beta_n w_n = e$$

Portanto, $W = \{w_1, w_2, ..., w_m\}$ é L.D. Assim, qualquer conjunto com mais de n elementos é L.D., ou seja, qualquer conjunto L.I. possui no máximo n elementos.

Teorema 3: *Qualquer base de um espaço vetorial tem sempre o mesmo número (finito) de elementos.*

Demonstração: Sejam $A = \{v_1, ..., v_n\}$ e $B = \{w_1, ..., w_m\}$ duas bases para um espaço vetorial V.

Como A gera V e B é L.I., pelo Teorema 2, temos que $m \leq n$;

Agora, como B gera V e A é L.I., pelo Teorema 2, temos que $n \leq m$.

Portanto, $m = n$. E assim, qualquer base de V tem o mesmo número de elementos.

Teorema 4 (Completamento): *Qualquer conjunto de elementos L.I. de um espaço vetorial V de dimensão finita pode ser completado até formar uma base para V.*

Demonstração: Seja $dim(V) = n$ e $v_1, ..., v_r$ elementos L.I. em V. Pelo Teorema 2 $r \leq n$. Se os elementos $v_1, ..., v_r$ geram V, então $\{v_1, ..., v_r\}$ já é uma base.

Agora, se isso não ocorre, então existe um $v_{r+1} \in V$ que não é combinação linear de $v_1, ..., v_r$ então $\{v_1, ..., v_r, v_{r+1}\}$ ainda é L.I., pois caso contrário a equação:

$$\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_r v_r + \alpha_{r+1} v_{r+1} = e$$

seria verdadeira para $\alpha_{r+1} \neq 0$ e, então poderiamos dividir a equação por α_{r+1} e isolar v_{r+1}, escrevendo ele como combinação linear de $v_1, ..., v_r$, o que é uma contradição.

Se $\{v_1, ..., v_r, v_{r+1}\}$ gera V, então é uma base. Caso contrário, repetimos o mesmo processo até completar a base. Esse processo termina em um número finito de passos, uma vez que pelo Teorema 2, não podemos ter um conjunto L.I. com mais de n elementos, já que $dim(V) = n$.

Teorema 5: *Seja V um espaço vetorial e U e W subespaços vetoriais de V, então:*

$$dim(U + W) = dim(U) + dim(W) - dim(U \cap W)$$

Demonstração: Seja $\{v_1, ..., v_r\}$ uma base para $U \cap W$ ($dim(U \cap W) = r$).

Pelo Teorema 4 (Completamento), podemos completar esse conjunto até obter uma base para U. Seja $\{v_1, ..., v_r, u_1, ..., u_m\}$ esta base para U ($dim(U) = r + m$).

De mesmo modo, podemos completar $\{v_1, ..., v_r\}$ para obter uma base para W. Seja $\{v_1, ..., v_r, w_1, ..., w_n\}$ esta base para W ($dim(W) = r + n$).

Como $U = [v_1, ..., v_r, u_1, ..., u_m]$ e $W = [v_1, ..., v_r, w_1, ..., w_n]$, então temos que:

$$U + W = [v_1, ..., v_r, u_1, ..., u_m, w_1, ..., w_n]$$

Ou seja, $\{v_1, ..., v_r, u_1, ..., u_m, w_1, ..., w_n\}$ é um conjunto de geradores para $U + W$. Vamos mostrar que este conjunto é linearmente independente.

Considere a equação:

$$(*) \quad \sum_{i=1}^{r} a_i v_i + \sum_{j=1}^{m} b_j u_j + \sum_{k=1}^{n} c_k w_k = e \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\sum_{k=1}^{n} c_k w_k = \sum_{i=1}^{r} a_i v_i + \sum_{j=1}^{m} b_j u_j$$

O primeiro termo da última igualdade é uma combinação linear de elementos de W, logo pertence a W, o segundo termo é uma combinação linear de elementos de U, logo pertence a U. Como vale a igualdade, então temos que o primeiro termo também pertence a U, assim: $\sum_{k=1}^{n} c_k w_k \in U \cap W$. Assim, podemos escrevê-lo como combinação linear dos elementos da base de $U \cap W$:

$$\sum_{k=1}^{n} c_k w_k = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} c_k w_k - \sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i = e$$

Como $\{v_1, ..., v_r, w_1, ..., w_n\}$ é L.I., pois é uma base para W, temos: $c_1 = ... = c_n = \alpha_1 = ... = \alpha_r = 0$.
Na equação $(*)$, obtemos:

$$\sum_{i=1}^{r} a_i v_i + \sum_{j=1}^{m} b_j u_j = e$$

E, como $\{v_1, ..., v_r, u_1, ..., u_m\}$ é L.I., pois é uma base para U, temos: $a_1 = ... = a_r = b_1 = ... = b_m = 0$.

Portanto, $\{v_1, ..., v_r, u_1, ..., u_m, w_1, ..., w_n\}$ é uma base para $U + W$. Logo:

$$dim(U + W) = r + m + n + r - r = (r + m) + (n + r) - r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dim(U + W) = dim(U) + dim(W) - dim(U \cap W)$$

Teorema 6: *Seja V um espaço vetorial e $\beta = \{v_1, ..., v_n\}$ uma* **base ordenada** *para V, isto é, os elementos estão ordenados na ordem em que aparecem. Então, todo elemento de V pode ser escrito de maneira* **única** *como combinação linear de $v_1, ..., v_n$.*

Demonstração: Considere $v \in V$ e que:

$$v = \sum_{j=1}^{n} a_j v_j \qquad \text{e} \qquad v = \sum_{j=1}^{n} b_j v_j$$

Fazendo $v - v$ temos:

$$v - v = e = \sum_{j=1}^{n} a_j v_j - \sum_{j=1}^{n} b_j v_j \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} (a_j - b_j) v_j = e$$

O que implica que $a_j - b_j = 0 \Leftrightarrow a_j = b_j$, $\forall j$, uma vez que $\{v_1, ..., v_n\}$ é L.I. Logo, o elemento $v \in V$ é escrito de modo único como combinação linear dos elementos da base de V.