# Adição de Transformações Lineares

**Definição:** Sejam $F, G \in L(U, V)$. A **Adição** de $F$ com $G$ é uma aplicação, $F+G : U \longrightarrow V$, dada por:

$$(F+G)(u) = F(u) + G(u), \qquad \forall u \in U$$

A aplicação adição, assim definida, é também uma transformação linear, pois: Sejam $u_1, u_2 \in U$, temos:

$$(F+G)(u_1+u_2) = F(u_1+u_2) + G(u_1+u_2) =$$

$$= F(u_1) + F(u_2) + G(u_1) + G(u_2) = (F+G)(u_1) + (F+G)(u_2)$$

Onde usamos o fato de $F$ e $G$ serem transformações lineares e que $U$ e $V$ são espaços vetoriais. E, considerando $u \in U$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, temos:

$$(F+G)(\alpha u) = F(\alpha u) + G(\alpha u) =$$

$$= \alpha F(u) + \alpha G(u) = \alpha(F(u) + G(u)) = \alpha(F+G)(u)$$

Onde usamos novamente o fato de que $F$ e $G$ são transformações lineares. Assim, $F+G$ é transformação linear de $U$ em $V$ e portanto $F+G \in L(U, V)$.

# Multiplicação por Escalar

**Definição:** Dada $F \in L(U, V)$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. A **Multiplicação da transformação** $F$ **por um escalar** é a aplicação $\alpha F : U \longrightarrow V$ dada por:

$$(\alpha F)(u) = \alpha F(u), \qquad \forall u \in U$$

Essa aplicação, assim definida, é também uma transformação linear, pois sejam $u_1, u_2 \in U$, temos:

$$(\alpha F)(u_1+u_2) = \alpha F(u_1+u_2) = \alpha(F(u_1) + F(u_2)) =$$

$$= \alpha F(u_1) + \alpha F(u_2) = (\alpha F)(u_1) + (\alpha F)(u_2)$$

onde usamos o fato de que $F$ é transformação linear e que $U$ e $V$ são espaços vetoriais. E, considerando $u \in U$ e $\beta \in \mathbb{K}$ temos:

$$(\alpha F)(\beta u) = \alpha F(\beta u) = \alpha\beta F(u) = \beta\alpha F(u) = \beta(\alpha F)(u)$$

onde usamos novamente o fato de $F$ ser transformação linear e $U$ e $V$ espaços vetoriais. Assim, $\alpha F$ é transformação linear de $U$ em $V$ e, portanto, $\alpha F \in L(U, V)$.

# Composição de Transformações Lineares

**Definição:** Sejam $U, V$ e $W$ espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$. Sejam $F : U \longleftrightarrow V$ e $G : V \longrightarrow W$ transformações lineares. A **Composição das transformações** $F$ e $G$ é uma aplicação, denotada por $G \circ F : U \longrightarrow W$, dada por:

$$(G \circ F)(u) = G(F(u)), \quad \forall u \in U$$

Essa aplicação, assim definida, é também uma transformação linear. De fato, considerando $u_1, u_2 \in U$ temos:

$$(G \circ F)(u_1+u_2) = G(F(u_1+u_2)) = G(F(u_1) + F(u_2)) =$$

$$= G(F(u_1)) + G(F(u_2)) = (G \circ F)(u_1) + (G \circ F)(u_2)$$

Onde usamos a definição da composição e o fato de $F$ e $G$ serem transformações lineares. E, considerando $u \in U$ e $\alpha \in \mathbb{K}$ temos:

$$(G \circ F)(\alpha u) = G(F(\alpha u)) = G(\alpha F(u)) = \alpha G(F(u)) = \alpha (G \circ F)(u)$$

Onde usamos novamente a definição da composição e o fato de $F$ e $G$ serem transformações lineares. Assim, $G \circ F$ é uma transformação linear de $U$ em $W$, portanto $G \circ F \in L(U, W)$.