# Propriedades da Adição de Transformações Lineares

Para toda $F, G, H \in L(U, V)$ valem as seguintes propriedades:

**(A1)** Associativa: $F + (G + H) = (F + G) + H$;

**Prova:** De fato, seja $u \in U$, temos que:

$$(F + (G + H))(u) = F(u) + (G + H)(u) =$$

$$= F(u) + G(u) + H(u) = (F + G)(u) + H(u) = ((F + G) + H)(u)$$

Uma vez que $F(u), G(u), H(u) \in V$ e $V$ é espaço vetorial, logo vale a associatividade.

**(A2)** Comutativa: $F + G = G + F$;

**Prova:** Seja $u \in U$, temos que:

$$(F + G)(u) = F(u) + G(u) = G(u) + F(u) = (G + F)(u)$$

uma vez que $F(u), G(u) \in V$ e em $V$ vale a comutatividade, por ser um espaço vetorial.

**(A3)** Existe um elemento neutro de $L(U, V)$;

**Prova:** A transformação $E : U \longrightarrow V$, dada por $E(u) = e_V$, é tal que:

$$(F + E)(u) = F(u) + E(u) = F(u) + e_V = F(u)$$

Logo, $F + E = F$, e $E$ é o elemento neutro de $L(U, V)$.

**(A4)** Para toda $F \in L(U, V)$ existe a transformação oposta $(-F) \in L(U, V)$ tal que $F + (-F) = E$.

**Prova:** $(-F)$ é dada por $(-F)(u) = -F(u)$. Assim, para todo $u \in U$ temos:

$$(F + (-F))(u) = F(u) + (-F)(u) = F(u) - F(u) = e_V = E(u)$$