



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA



Thiago Santana Alves dos Santos

Pré-despacho de sistemas de energia elétrica: resolução via relaxação Lagrangeana e método de pontos interiores

Campinas
22/11/2024

Thiago Santana Alves dos Santos

Pré-despacho de sistemas de energia elétrica: resolução via relaxação Lagrangeana e método de pontos interiores*

Monografia apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos para obtenção de créditos na disciplina Projeto Supervisionado, sob a orientação do(a) Prof. Dr. Aurelio R. L. Oliveira.

*Este trabalho foi financiado pela CNPQ.

Resumo

O problema de minimização das perdas de geração e transmissão em sistemas de pré-despacho de energia elétrica é formulado como um modelo de fluxo em redes e resolvido via relaxação Lagrangeana e métodos de pontos interiores. A relaxação Lagrangeana é aplicada às restrições que estabelecem metas de geração das usinas hidrelétricas, desacoplando o modelo em sub-problemas correspondentes a cada hora do dia e resolvidos através de métodos de pontos interiores especializados. Esta abordagem combina as vantagens da formulação por fluxo em redes com a eficiência da relaxação Lagrangeana e a robustez dos métodos de pontos interiores. A especialização dos sub-problemas leva a uma iteração rápida pois é possível reduzir a dimensão dos sistemas lineares ao número de barras ou ao número de linhas. Além disso, a matriz destes sistemas é invariante ao longo das iterações podendo ser decomposta a priori. Por meio de uma heurística, é possível, a priori, obter uma matriz de reatância esparsa. Experimentos numéricos com o sistema teste IEEE30 são apresentados e comparados com uma implementação baseada em pontos interiores sem a relaxação Lagrangeana e com relaxação, com o propósito de comparar o desempenho computacional de cada sistema.

Abstract

The problem of minimizing generation and transmission losses in power systems during pre-dispatch is formulated as a network flow model and solved using Lagrangian relaxation and interior point methods. Lagrangian relaxation is applied to the constraints that set generation targets for hydroelectric plants, decoupling the model into subproblems corresponding to each hour of the day, which are then solved using specialized interior point methods. This approach combines the advantages of network flow formulation with the efficiency of Lagrangian relaxation and the robustness of interior point methods. The specialization of the subproblems leads to fast iterations, as it is possible to reduce the dimension of the linear systems to the number of buses or the number of lines. Additionally, the matrix of these systems remains invariant throughout the iterations and can be decomposed beforehand. Using a heuristic, it is possible to obtain a sparse reactance matrix in advance. Numerical experiments with the IEEE30 test system are presented and compared with an interior point implementation without Lagrangian relaxation and with relaxation, aiming to evaluate the computational performance of each system.

Conteúdo

1	Introdução	6
2	O modelo de pré-despacho	6
2.1	Modelo estático	6
2.2	Modelo dinâmico	8
3	Resolução dos sub-problemas	9
3.1	Método de Pontos Interiores Primal-Dual	10
3.2	Método Preditor-Corretor	12
3.3	Detalhes da implementação	12
3.4	Resolução do sistema linear	13
4	Decomposição usando relaxação Lagrangeana	14
4.1	Problema minimax dual	16
4.2	Coordenador	17
5	Resultados numéricos	17
5.1	Sistema IEEE30	17
6	Conclusão	18

1 Introdução

O pré-despacho de sistemas de energia elétrica consiste em uma etapa crucial no planejamento e operação do setor elétrico, sendo responsável por determinar a alocação ótima da geração e o fluxo de potência em redes de transmissão, atendendo a restrições operacionais e minimizando custos ou perdas. Devido à sua alta dimensionalidade e natureza não linear, a relaxação Lagrangeana surge como uma técnica eficiente para lidar com restrições complexas, permitindo a decomposição do problema em subproblemas mais simples. Aliada ao método de pontos interiores, conhecidos por sua robustez e eficiência na resolução de problemas de programação não linear, essa abordagem oferece uma solução poderosa para o pré-despacho. Este trabalho explora a aplicação combinada dessas técnicas para resolver problemas de pré-despacho, destacando sua capacidade de reduzir o esforço computacional e garantir resultados consistentes em diferentes cenários do sistema elétrico.

O problema de pré-despacho é descrito como a minimização de uma função quadrática com variáveis separáveis, que representam as perdas associadas à geração e transmissão de potência, sujeitas a restrições lineares relacionadas ao fluxo de potência ativa e às metas de geração de energia. As restrições de fluxo são estruturadas em blocos repetitivos que correspondem ao comportamento do sistema elétrico em diferentes horas do dia.

Esses blocos matriciais são conectados por restrições adicionais de acoplamento. Ao relaxar tais restrições, o problema pode ser decomposto, resultando em subproblemas de despacho ótimo de potência ativa. Esses subproblemas são modelados como fluxo em redes com restrições adicionais e resolvidos utilizando métodos de pontos interiores especializados, conforme descrito por (Oliveira, Nepomuceno & Soares, 2001a).

2 O modelo de pré-despacho

2.1 Modelo estático

Apresentaremos, primeiramente, o problema de fluxo de potência ótima ativa para um único intervalo de tempo (uma hora):

$$\min \quad \alpha f' R f + \beta \gamma(p) \quad (1)$$

$$\text{sujeito a} \quad A f = p - l, \quad X f = 0 \quad (2)$$

$$f^{\min} \leq f \leq f^{\max}, \quad p^{\min} \leq p \leq p^{\max} \quad (3)$$

em que:

f é o fluxo de potência ativa;

p é a geração de potência ativa;

R é a matriz diagonal das resistências das linhas;

$\gamma(p)$ é a função de perdas na geração;

A é a matriz de incidência da rede de transmissão;

X é a matriz de reatância da rede de transmissão;

l representa as demandas de potência ativa;

f^{\max} e f^{\min} são os limites de fluxo de potência ativa;

p^{\max} e p^{\min} são os limites de geração de potência ativa;

α e β são pesos atribuídos conforme nosso objetivo de minimização.

O sistema de transmissão é representado por um fluxo de carga em corrente contínua (DC) com limites de fluxo de carga ativo. A rede de geração e transmissão é representada pelas leis de Kirchhoff (2), as quais dizem a respeito ao princípio da conservação da carga elétrica (lei dos nós) e ao princípio da conservação da energia (lei das malhas), leis que são apresentadas separadamente para que as variáveis f e p possam existir simultaneamente no modelo. Além disso, temos em nosso conjunto de restrições as capacidades de geração e de transmissão do sistema elétrico (3).

As duas componentes da função objetivo em (1) são quadráticas e com variáveis separáveis, a primeira componente representa as perdas na rede de transmissão e a segunda representa o custo de geração de energia das usinas.

2.2 Modelo dinâmico

A seção anterior modelava o problema apenas para um único intervalo de tempo, ou seja, uma hora em nosso caso. Para representar um modelo dinâmico devemos considerar o problema estático da seção 2.1 para cada intervalo de tempo, além de considerar uma restrição adicional de acoplamento dada por:

$$\sum_{i=1}^t p_i = q \quad (4)$$

em que:

q é a meta de geração de energia;

p_i é a geração de potência ativa no intervalo de tempo i ;

t é o número total de intervalos de tempo que estamos analisando.

A partir disso, podemos montar o problema dinâmico:

$$\begin{aligned} \min \quad & \alpha \sum_{i=1}^t f_i' R f_i + \beta \sum_{i=1}^t \gamma(p_i) \\ \text{sujeito a} \quad & A f_1 = p_1 - l_1 \\ & X f_1 = 0 \\ & f^{min} \leq f_1 \leq f^{max} \\ & p^{min} \leq p_1 \leq p^{max} \\ & \vdots \\ & A f_n = p_n - l_n \\ & X f_n = 0 \\ & f^{min} \leq f_n \leq f^{max} \\ & p^{min} \leq p_n \leq p^{max} \end{aligned} \quad (5)$$

Desse modo, podemos perceber que as restrições sobre a rede de geração e transmissão são apresentadas separadamente para cada intervalo de tempo t e são acopladas pela restrição adicional da meta de geração de energia (4). É essa estrutura dinâmica específica do problema que vamos explorar para fazer a nossa relaxação Lagrangeana, a

partir da penalização na função objetivo da restrição de acoplamento é que podemos separar esse problema em outros t sub-problemas. Tais sub-problemas possuem a estrutura parecida com a do modelo dinâmico apresentado, com exceção do termo de penalização na função objetivo. Discutiremos na próxima seção a resolução desses sub-problemas.

3 Resolução dos sub-problemas

Os sub-problemas são resolvidos através de métodos de pontos interiores especializados para formulações em redes de corrente contínua. A fim de aplicarmos tal método é necessário então que simplifiquemos o modelo estático (1, 2 e 3) fazendo:

- Mudanças de variáveis: $\tilde{f} = f - f^{min}$ e $\tilde{p} = p - p^{min}$;
- Os pesos α e β serão iguais a 1;
- $\tilde{R} = 2R$;
- A função de perdas $\gamma(p) = \frac{1}{2}p'Hp$ com H sendo uma matriz diagonal que representa a componente quadrática do custo de geração.

Assim temos o nosso modelo sendo da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
\min \quad & \frac{1}{2}\tilde{f}'\tilde{R}\tilde{f} + c'_f\tilde{f} + \frac{1}{2}\tilde{p}'H\tilde{p} + c'_p\tilde{p} \\
\text{sujeito a} \quad & A\tilde{f} - \tilde{p} = \tilde{l}_i, \quad X\tilde{f} = \tilde{l}_v \\
& 0 \leq \tilde{f} \leq f^{max}, \quad 0 \leq \tilde{p} \leq p^{max}
\end{aligned} \tag{6}$$

em que $c_f = \tilde{R}f^{min}$, $c_p = Hp^{min}$, $\tilde{l}_i = -l - Af^{min} + p^{min}$ e $\tilde{l}_v = -Xf^{min}$. Podemos então introduzir as variáveis de folga e remover os tils para simplificar nossa notação:

$$\begin{aligned}
\min \quad & \frac{1}{2}f'Rf + c'_ff + \frac{1}{2}p'Hp + c'_pp \\
\text{sujeito a} \quad & Af - p = l_i, \quad Xf = l_v \\
& f + s_f = f^{max}, \quad p + s_p = p^{max} \\
& (f, s_f) \geq 0, \quad (p, s_p) \geq 0
\end{aligned} \tag{7}$$

Como utilizaremos para a solução do problema um método de pontos interiores primal-dual, devemos introduzir o dual associado ao problema primal apresentado em (7). Apresentemos este já com as variáveis de folga introduzidas:

$$\begin{aligned} \min \quad & l'y - (f^{max})'w_f - \frac{1}{2}f'Rf \quad - (p^{max})'w_p - \frac{1}{2}p'Hp \\ \text{sujeito a} \quad & B'y + z_f - w_f - Rf = c_f, \quad -y(p) + z_p - w_p - Hp = c_p \\ & (z_f, w_f) \geq 0, \quad (z_p, w_p) \geq 0 \end{aligned} \quad (8)$$

em que $B = \begin{bmatrix} A \\ X \end{bmatrix}$, $l = \begin{bmatrix} l_i \\ l_v \end{bmatrix}$ e $y(p)$ são os elementos da variável dual y que são correspondentes às barras de geração.

A partir das formulações primal e dual apresentadas podemos reconhecer as condições de otimalidade como sendo as restrições para cada um dos problemas (7 e 8) somadas as condições de não negatividade das variáveis primais e duais, chamadas de condições de complementaridade, dadas por:

$$\begin{aligned} FZ_f e = 0, \quad PZ_p e = 0 \\ S_f W_f e = 0, \quad S_p W_p e = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

em que e é o vetor unitário, tem 1 em todas as suas posições. A fim de fazer uma simplificação, introduzimos aqui também a notação $F = \text{diag}(f)$ para a representação de matrizes diagonais.

3.1 Método de Pontos Interiores Primal-Dual

Para a formulação encontrada, a aplicação do método de pontos interiores primal-dual em questão (*Oliveira, Nepomuceno & Soares 2001b*) se dá pela utilização do método de Newton nas condições de otimalidade (7, 8 e 9) (restrições dos problemas primal e dual unidas com a complementaridade das variáveis). Porém desconsideraremos as restrições de não-negatividade das variáveis e incluiremos uma perturbação (μ) nas condições (9). O método atua partindo de um ponto inicial estritamente positivo e não permite que suas variáveis se tornem negativas durante as iterações. Fato que é garantido por meio das condições de complementaridade em que adicionamos a perturbação μ .

Então, definimos agora os vetores $x = (f, p, s_f, s_p)$ e $t = (z_f, z_p, w_f, w_p)$ e aplicando o método de Newton às condições de otimalidade temos definido o método a seguir:

Método Primal-Dual: Dados $(x^0, t^0) > 0$ e $y^0 > 0$. Para $k = 0, 1, 2, \dots$, faça:

1. Escolha $\sigma^k \in [0, 1)$ e faça $\mu^k = \sigma^k \frac{\gamma^k}{n}$ com n sendo a dimensão do vetor x e $\gamma^k = (x^k)'t^k$.
2. Calcule a direção de Newton $(\Delta x^k, \Delta y^k, \Delta t^k)$ definida pelo sistema linear das condições de otimalidade.
3. Calcule o tamanho dos passos que daremos com as variáveis primal e dual para que permaneçam sendo pontos interiores, o tamanho dos passos é dado por $\alpha_p^k = \min(1, \tau^k \rho_p^k)$ e $\alpha_d^k = \min(1, \tau^k \rho_d^k)$ com $\tau^k \in (0, 1)$, $\rho_p^k = \frac{-1}{\min_i(\frac{\Delta x_i^k}{x_i^k})}$ e $\rho_d^k = \frac{-1}{\min_i(\frac{\Delta t_i^k}{t_i^k})}$.
4. Calcule o novo ponto fazendo $x^{k+1} = x^k + \alpha_p^k \Delta x^k$ e $(y^{k+1}, t^{k+1}) = (y^k, t^k) + \alpha_d^k (\Delta y^k, \Delta t^k)$.

O sistema linear que define a direção de Newton a ser tomada é dado por:

$$\left\{ \begin{array}{l} A\Delta f - \Delta p = -l_i - Af + p \equiv r_i \\ X\Delta f = l_v - Xf \equiv r_v \\ \Delta f + \Delta s_f = f^{max} - f - s_f \equiv r_f \\ \Delta p + \Delta s_p = p^{max} - p - s_p \equiv r_p \\ B'\Delta y + \Delta z_f - \Delta w_f - R\Delta f = c_f - B'y - z_f + w_f + Rf \equiv r_y \\ -\Delta y(p) + \Delta z_p - \Delta w_p - H\Delta p = c_p + y(p) - z_p + w_p + Hp \equiv r_g \\ Z_f\Delta f + F\Delta z_f = \mu e - FZ_f e \equiv r_{zf} \\ Z_p\Delta p + P\Delta z_p = \mu e - PZ_p e \equiv r_{zp} \\ W_f\Delta s_f + S_f\Delta w_f = \mu e - S_fW_f e \equiv r_{wf} \\ W_p\Delta s_p + S_p\Delta w_p = \mu e - S_pW_p e \equiv r_{wp} \end{array} \right. \quad (10)$$

em que os índices k foram desconsiderados para a simplificação da notação.

3.2 Método Preditor-Corretor

O método Preditor-Corretor resolve o sistema linear (10) calculando, primeiramente, a *direção afim* $(\Delta\tilde{x}, \Delta\tilde{y}, \Delta\tilde{t})$, com $\mu = 0$.

A partir desse algoritmo temos então o nosso método de pontos interiores primal-dual para a resolução do nosso modelo estático (1, 2 e 3). No qual utilizamos a direção de Newton calculada pelo sistema linear (10) e definimos então os maiores tamanhos de passos possíveis que ainda nos garantem estar em um ponto interior para os problemas primal e dual. Então, a partir da direção e do tamanho de passo encontrados podemos calcular os novos pontos para a próxima iteração do método.

3.3 Detalhes da implementação

Definição dos parâmetros: O parâmetro τ tem valor fixo: $\tau = 0.99995$. Para o método preditor-corretor, μ é dado pela seguinte relação:

$$\left(\frac{\tilde{\gamma}}{\gamma}\right)^2 \left(\frac{\tilde{\gamma}}{n^2}\right)$$

onde n é a dimensão do vetor x , $\gamma = (x)'v$ e $\tilde{\gamma} = (x + \Delta\tilde{x})'(v + \Delta\tilde{v})$. Além disso, em ambos os métodos, quando $\gamma < 1$, o parâmetro μ é substituído por $\mu = \frac{\gamma^2}{n^2}$.

É possível provar que $\gamma = x'v$ é igual ao *gap* de dualidade para um ponto factível, o que justifica a escolha de μ .

Ponto Inicial

Uma vez que o método de pontos interiores converge rapidamente nos experimentos apresentados mais adiante, não foi realizado nenhum estudo para a obtenção de pontos iniciais mais elaborados. O ponto inicial apresentado a seguir é utilizado em todos os testes:

$$f^0 = s_f^0 = \frac{f_{\max}}{2}, \quad p^0 = s_p^0 = \frac{p_{\max}}{2}, \quad y^0 = 0,$$

$$z_f^0 = w_f^0 = \mathbf{e}, \quad z_p^0 = w_p^0 = (R + I)\mathbf{e},$$

3.4 Resolução do sistema linear

Podemos simplificar o sistema linear (10) reduzindo a sua dimensão porém mantendo sua estrutura de matrizes esparsas fazendo as substituições apresentadas abaixo para as variáveis de folga primais e duais:

$$\begin{aligned}\Delta z_f &= F^{-1}(r_{zf} - Z_f \Delta f); \\ \Delta z_p &= P^{-1}(r_{zp} - Z_p \Delta p); \\ \Delta w_f &= S_f^{-1}(r_{wf} - W_f \Delta s_f); \\ \Delta w_p &= S_p^{-1}(r_{wp} - W_p \Delta s_p); \\ \Delta s_f &= r_{sf} - \Delta f; \\ \Delta s_p &= r_{sp} - \Delta p.\end{aligned}$$

A partir disso, temos o sistema em (10) igual a:

$$\begin{cases} A\Delta f - \Delta p = r_i \\ X\Delta f = r_v \\ B'\Delta y + D_f\Delta f = r_a \\ -\Delta y(p) - D_p\Delta p = r_b \end{cases}$$

em que:

$$\begin{aligned}D_f &= F^{-1}Z_f + S_f^{-1}W_f + R \\ D_p &= P^{-1}Z_p + S_p^{-1}W_p + H \\ r_a &= r_y - F^{-1}r_{zf} + S_f^{-1}r_{wf} - S_f^{-1}W_f r_f \\ r_b &= r_g - P^{-1}r_{zp} + S_p^{-1}r_{wp} - S_p^{-1}W_p r_p.\end{aligned}$$

Novamente, as matrizes diagonais que aparecem são todas diagonais da forma $F^{-1} = \text{diag}(f^{-1})$, o que não compromete computacionalmente o nosso método. Podemos também eliminar as variáveis de geração e fluxo de potência fazendo as substituições $\Delta f = -D_f^{-1}(r_a - B'\Delta y)$ e $\Delta p = -D_p^{-1}(r_b + \Delta y(p))$, logo temos:

$$(BD_f^{-1}B' + D)\Delta y = r$$

em que temos $r = \begin{bmatrix} r_i \\ r_v \end{bmatrix} + BD_f^{-1}r_a - Dr_b$ e D é a matriz diagonal em que os elementos não nulos correspondem às barras de geração dados por D_p^{-1} .

A partir da estrutura matricial do sistema resultante podemos montar uma matriz não-singular $\tilde{B} = \begin{bmatrix} B & e_j \end{bmatrix}$ e então obtemos o sistema (Oliveira, Nepomuceno & Soares, 2001b):

$$(\tilde{B}\tilde{D}_f^{-1}\tilde{B}' + \tilde{D})\Delta y = r$$

com D_f^{-1} representando o elemento diagonal retirado de D para formar \tilde{D} .

A construção da matriz não-singular \tilde{B} é de relevante importância para o desempenho computacional do nosso método pois reduz o esforço do método de pontos interiores apresentado na seção 3.1. Há ainda outros detalhes de implementação do problema que não serão abordados, porém atuam garantindo o desempenho computacional do método, como o reescalamiento da matriz de reatância X , escolha de pontos iniciais f^0 e p^0 e a definição dos parâmetros do modelo como μ e σ .

4 Decomposição usando relaxação Lagrangeana

Tomando como base o modelo dinâmico do problema (5) apresentado na seção 2.2, exploraremos aqui a utilização da relaxação Lagrangeana sobre a restrição de meta de

geração de energia. Então, relaxando as restrições de acoplamento obtemos o problema:

$$\begin{aligned}
\min \quad & \alpha \sum_{i=1}^t f'_i R f_i + \beta \sum_{i=1}^t \gamma(p_i) + \lambda' \left(\sum_{i=1}^t p_i - q \right) \\
\text{sujeito a} \quad & A f_1 = p_1 - l_1 \\
& X f_1 = 0 \\
& f^{\min} \leq f_1 \leq f^{\max} \\
& p^{\min} \leq p_1 \leq p^{\max} \\
& \vdots \\
& A f_n = p_n - l_n \\
& X f_n = 0 \\
& f^{\min} \leq f_n \leq f^{\max} \\
& p^{\min} \leq p_n \leq p^{\max}
\end{aligned} \tag{11}$$

Aqui temos a possibilidade de separar esse problema em outros t sub-problemas de formulação semelhante ao modelo estático fixando o valor de λ . Pelo teorema de Kuhn-Tucker (Casules, S. D., 2015) temos a existência de uma solução para os multiplicadores garantida.

$$\begin{aligned}
L(f, p, \lambda) &= \alpha \sum_{i=1}^t (f'_i R f_i + c'_f f_i) + \beta \sum_{i=1}^t (p'_i H p_i + c'_p p_i) + \lambda' \left(\sum_{i=1}^t p_i - q \right) \\
&= \sum_{i=1}^t (\alpha f'_i R f_i + \alpha c'_f f_i + \beta p'_i H p_i + \beta c'_p p_i + \lambda' p_i) + \lambda' q
\end{aligned}$$

É possível perceber que temos então uma parte que depende de f e p que está entre parênteses, a qual chamaremos de uma função $g_i(f_i, p_i, \lambda)$ e então teremos como resultado:

$$L(f, p, \lambda) = \sum_{i=1}^t g_i(f_i, p_i, \lambda) + \lambda' q$$

A partir do teorema de Kuhn-Tucker (Casules, S. D., 2015), temos que um vetor $[f^0, p^0] = x^0$ resolve as equações dadas em (11) se e somente se existir um multiplicador

de lagrange λ^0 tal que x^0 satisfaça as seguintes condições:

$$\begin{cases} \frac{\delta L}{\delta x_i} = \frac{\delta g_i(x_i, \lambda^0)}{\delta x_i} \geq 0, & i = 1, \dots, n; \\ \lambda^0 (\sum_{i=1}^t p_i - q) = 0, & \sum_{i=1}^t p_i \leq q; \\ \frac{x_i \delta g_i(x_i, \lambda^0)}{\delta x_i} = 0, & x_i \geq 0, i = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (12)$$

Tais condições traduzem na verdade a condição de estacionaridade do problema, ou seja, quando estamos em um ponto candidato a minimizar nosso modelo essas condições atuam garantindo que a solução encontrada não viole as restrições iniciais do modelo, como a não negatividade das variáveis ou então as próprias restrições (5) em si. Esse comportamento é garantido fazendo com que tenhamos a função Lagrangeana $L(f, p, \lambda) = 0$, representando que estamos em um ponto de máximo ou de mínimo dessa função, caso contrário teríamos que x_i deve ser igual a 0. Além disso, sendo g_i uma função convexa em x_i para um λ dado, então as condições (12) são necessárias e suficientes para que x_i minimize g_i . A segunda condição do teorema (12) assegura que estamos em um ponto onde a restrição de meta energética é respeitada ou então devemos ter o λ associado igual a zero, fato que representaria que a restrição em questão não é relevante para a solução ótima.

4.1 Problema minimax dual

Na presente seção faremos uma análise do comportamento do valor da função Lagrangeana $L(f, p, \lambda)$ para um conjunto de multiplicadores de Lagrange λ^0 .

Definindo então a função dual $h(\lambda)$ como sendo igual ao $\min_{x \in S} L(x, \lambda)$. Podemos estabelecer então o problema minimax dual dado por:

$$\max_{\lambda \in D} \min_{x \in S} L(f, p, \lambda)$$

A partir disso, considerando o problema dado em (11) sabemos que a função Lagrangeana pode ser decomposta em sub-problemas. É demonstrado também que dado λ , que resolve o dual através da coordenação dos sub-problemas também temos então a solução válida para o problema primal. Portanto, o coordenador atua maximizando h , ou

seja, tomamos o mínimo do pior caso possível com relação ao multiplicador λ associado.

4.2 Coordenador

Sabendo que nossa função $h(x, \lambda)$ é diferenciável então utilizaremos aqui um algoritmo de descida utilizando o gradiente da nossa função h , o qual é modificado para trabalhar com restrições com $\lambda \geq 0$ ou $\lambda = 0$. Então temos o algoritmo de coordenação para λ^0 dado por:

Para $k = 1, 2, \dots, n$, faça:

1. Resolva o problema Lagrangeano para λ^k , obtendo a solução $[f^k, p^k] = x(\lambda^k)$. (Feito resolvendo os sub-problemas de forma separada para que tenhamos maior desempenho computacional);
2. Avalie a função $h(\lambda^k) = L(x(\lambda^k), \lambda^k)$ e o gradiente $\Delta h(\lambda^k) = g(x(\lambda^k))$;
3. Tome um direção de busca de descida s^k , aqui podemos utilizar o gradiente, gradiente conjugado, gradiente espectral, etc.
4. Cálculo do novo multiplicador $\lambda^{k+1} = \lambda^k + \alpha^k s^k$;
5. Se $\alpha^k \approx 0$ pare;
6. Volte ao segundo passo.

O tamanho do passo α^k é escolhido fazendo uma busca unidimensional na direção s^k de forma que $h(\lambda^{k+1}) > h(\lambda^k)$. A existência do passo é garantida sabendo que nossa função dual é diferenciável e portanto possui uma direção de crescimento/decrescimento.

5 Resultados numéricos

5.1 Sistema IEEE30

Nos experimentos foram adotados os valores $f^{min} = -f^{max}$ para as linhas de transmissão e $p^{min} = 0$ para os geradores. Para simplificar, somente funções quadráticas

puras são utilizadas, ou seja, $c_p = 0$, e os coeficientes quadráticos são os mesmos para todos os geradores exceto o de número 5 que é duas vezes mais caro e o de número um, duas vezes mais barato.

Barra	Carga	Barra	Carga	Barra	Carga
1	0,0	11	0,0	21	17,5
2	21,7	12	11,2	22	0,0
3	2,4	13	0,0	23	3,2
4	7,6	14	6,2	24	8,7
5	94,2	15	8,2	25	3,5
6	0,0	16	3,5	26	0,0
7	22,8	17	9,0	27	0,0
8	30,0	18	3,2	28	0,0
9	0,0	19	9,5	29	2,4
10	5,8	20	2,2	30	10,6

Tabela 1: IEEE30 - Carga das Barras (MW)

O primeiro teste foi a partir do método Preditor-Corretor, sem relaxação Lagrangeana, e o tempo de CPU foi de 0.0116 segundos em média, levando 5 iterações e uma carga de 283.4MW. Já o segundo foi realizado pelo método Primal-Dual, com relaxação, e o tempo médio foi superior, de 0.0148 segundos, com 9 iterações e mesma carga.

6 Conclusão

Neste artigo, apresentamos um problema de pré-despacho em sistemas de energia elétrica, formulado utilizando um modelo de fluxo em redes. Ao analisar a estrutura dinâmica do problema, observa-se que ele permite ser desacoplado em t subproblemas, por meio da aplicação da relaxação Lagrangeana às restrições de acoplamento. Esses subproblemas possuem uma estrutura similar ao modelo dinâmico proposto e podem ser resolvidos por métodos de pontos interiores que aproveitam a estrutura matricial para reduzir a dimensão do sistema linear resultante do método de Newton aplicado às condições de otimalidade. Uma parte relevante do esforço computacional é realizada previamente, considerando que a matriz do sistema permanece inalterada ao longo das iterações.

No momento, os testes mostraram que o método Preditor-Corretor teve um desempenho melhor quando comparado com o Primal-Dual, porém, somando a eficiência da relaxação Lagrangeana, com a robustez dos métodos de pontos interiores especializados,

e a possibilidade de uma resolução dos 24 sub-problemas em paralelo indica que o método Primal-Dual terá um desempenho superior ao Preditor-Corretor a priori.

Sendo assim, a ideia a ser seguida no próximo semestre é a resolução dos sub-problemas em paralelo considerando o modelo de pré-despacho visando a melhora significativa do desempenho computacional, baseando-se no método de pontos interiores especializado apresentado (Oliveira, Nepomuceno & Soares, 2001a).

Referências

Oliveira, A. R. L., Nepomuceno, L. & Soares, S. (2001 a). Optimal active power dispatch combining network flow and interior point approaches. Aceito para publicação, IEEE Transactions on Power Systems.

Oliveira, A. R. L., Nepomuceno, L. & Soares, S. (2001 b). Short term hydroelectric scheduling combining network flow and interior point approaches. Aceito para publicação, IEEE Transactions on Power Systems.

Oliveira, A. R. L. & Soares, S. (2003). Métodos de pontos interiores para problema de fluxo de potência ótimo DC.

Chiavegato, F. G., Oliveira, A. R. L. & Soares, S. (2001). Pré-despacho de sistemas de energia elétrica via relaxação lagrangeana e métodos de pontos interiores.

Luenberger, D. G. (1984). Linear and Nonlinear Programming, Addison-Wesley, Reading.

Lasdon, L. (1970). Optimization Theory for Large Systems, Macmillan, New York.

Casules, S. D. (2015). Teoria de otimização: Teorema de Kuhn-Tucker – Extensão à problemas multi-objetivos e aplicações à economia.