UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA

JOSÉ RICARDO COELHO

Análise matemática de jogos: Soluções, estratégias e aplicações

Monografia apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos para obtenção de créditos na disciplina Projeto Supervisionado, sob a orientação do(a) Prof. Ricardo Miranda Martins.

Campinas
2024

Resumo

Jogos matemáticos lógicos têm sido há muito tempo objeto de estudo e admiração de entusiastas e matemáticos. Contando com suas regras próprias, a resolução desses problemas bem como o estudo de suas propriedades passam por diversas áreas do estudo matemático, como lógica, combinatória, computação científica e até mesmo programação linear. Diferentes jogos necessitam de diferentes estratégias e insights, o que torna tais problemas uma fonte rica de ideias e inovação. Ao longo desse trabalho, são apresentados alguns jogos, bem como suas estratégias para resolução e um pouco da matemática que está por trás de algumas de suas propriedades.

Abstract

Logical mathematical games have long been the subject of study and admiration among enthusiasts and mathematicians. With their own set of unique rules, solving these problems as well as studying their properties involves various fields of mathematical study, such as logic, combinatorics, scientific computing, and even linear programming. Different games require different strategies and insights, making such problems a rich source of ideas and innovation. Throughout this work, some games are presented, along with their solving strategies and a glimpse into the mathematics behind some of their properties.

Sumário

1 Introdução

Muito populares como passa-tempo, seja em revistas impressas quanto em aplicativos de celular, jogos de quebra-cabeça, ou puzzle, são jogos em que, dado um conjunto de regras e uma condição inicial, o jogador deve encontrar uma solução esperada, geralmente se valendo do uso de lógica e estratégias de resolução de problemas. Diferente de jogos competitivos, como Xadrez, Jogo-Da-Velha ou jogos de tabuleiro, estratégias para "vencer"esses jogos não dependem de outros jogadores, de sorte ou agilidade.

Para que esses jogos sejam considerados válidos, eles devem respeitar certas condições. Primeiro, deve-se haver uma solução válida para o quebra-cabeças. Isto é, é preciso que exista uma solução que respeite as regras estabelecidas pelo jogo. Em segundo lugar, essa solução deve ser única: para cada estado inicial de um determinado quebra-cabeça, uma única solução deve ser válida. Isto fica claro ao se pensar em um jogo de Sudoku que começa vazio - qualquer tabuleiro de Sudoku completo seria solução para esse jogo, o que faz com que a proposta do jogo se perca.

Esses jogos possuem regras simples, mas oferecem desafios profundos e variados, o que explica sua popularidade duradoura. Além de entreter, eles servem para promover o desenvolvimento de habilidades como pensamento crítico, paciência e resolução de problemas.

Neste trabalho, exploraremos não apenas as características e estratégias de jogos como Sudoku e Picross, mas também suas origens e métodos algorítmicos. Além disso, destacaremos a matemática e a lógica que estão por trás de suas regras, mostrando como esses desafios transcendem o entretenimento e se tornam uma ferramenta para aprendizado e criatividade.

2 Quadrado Mágico

O Quadrado Mágico é uma matriz quadrada n x n, na qual cada um dos seus elementos são distintos e um entre $1, 2, 3, ..., n^2$, de modo que a soma de cada linha, coluna e diagonal resulte no mesmo número, chamado "constante mágica". Devido a sua forma e propriedades, esses Quadrados Mágicos tem sido alvo do interesse de diversas áreas da matemática, como a teoria dos números e análise combinatória.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Figura 1: Quadrado Mágico 4x4, em que a soma de todas linhas, colunas e diagonais resulta em 34. Fonte: https://lcdm0202.wordpress.com/2017/07/10/veja-que-historia-interessante-para-que-gosta-de-livros/

A construção de quadrados mágicos é um exercício interessante, e pode se tornar um problema bastante difícil à medida que aumentamos o tamanho de n. É evidente que temos apenas 1 quadrado mágico de tamanho 1, e nenhum para $n = 2$. Para $n = 3$, temos um único quadrado mágico novamente (a menos de rotação e reflexão), mas para quadrados mágicos de tamanho 4 esse número já cresce para 880, e esse número cresce de maneira rápida à medida que n cresce, tendo espantosos 17753889197660635632 quadrados mágicos diferentes de ordem 6. [8]

A constante mágica que deve ser somada em todas linhas, colunas e diagonais pode ser facilmente encontrada fazendo a soma de 1 até n^2 (a soma total dos elementos da matriz) e depois dividir esse número por n. Ficamos assim com a fórmula:

$$c = \frac{n^2 \cdot (n^2 + 1)}{2} \cdot \frac{1}{n} = \frac{n \cdot (n^2 + 1)}{2}$$

Se chamarmos a propriedade da soma das linhas, colunas e diagonais serem iguais de *propriedade mágica*, há diferentes transformações e operações que podemos aplicar em um quadrado mágico e preservar essa propriedade. A soma de 2 quadrados mágicos preserva a propriedade mágica, assim como uma aplicação de aluguma transformação linear em todos os elementos da matriz. Além disso, a rotação e reflexão em diferentes eixos de simetria também são capazes de manter as propriedades mágicas de um Quadrado Mágico.

Uma estratégia para se montar quadrdos mágicos de ordem ímpar, publicada no século XVII pelo francês de la Loubère e chamado de Método Siamês, é começar preenchendo na primeira fileira e na coluna central o número 1. Depois disso, indo um quadrado para na direção diagonal para cima à direita, coloca-se o número seguinte, dando a volta na matriz quando não se é possível ir à direita ou para cima (da primeira fileira subir para a última, por exemplo). Quando se preenche um quadrado com múltiplo de n, deve-se descer verticalmente uma posição para colocar o seguinte ao invés de subir na diagonal. Seguindo esses passos, chega-se ao final a um quadrado mágico.

Order 3

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Order 5

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

Order 9

47	58	69	80	1	12	23	34	45
57	68	79	9	11	22	33	44	46
67	78	8	10	21	32	43	54	56
77	7	18	20	31	42	53	55	66
6	17	19	30	41	52	63	65	76
16	27	29	40	51	62	64	75	5
26	28	39	50	61	72	74	4	15
36	38	49	60	71	73	3	14	25
37	48	59	70	81	2	13	24	35

Figura 2: Quadrados Mágico de ordem3, 5 e 9 construídos a partir do método siamês. Fonte: https://en.wikipedia.org/wiki/Magic_square

Essas matrizes têm uma longa história, presentes em várias culturas antigas, como a chinesa e a árabe, e eram frequentemente associados a propriedades místicas ou divinatórias.

Parecido com o Quadrado Mágico, existe também o chamado Quadrado Latino, uma matriz n x n preenchida pelos números $1, 2, ..., n$, em que cada um desses elementos aparece apenas uma vez por linha e coluna, resultando em linhas e colunas que somam o mesmo número. Um dos jogos lógicos mais conhecidos no mundo inteiro é um caso especial desses quadrados latinos, o Sudoku, e será explorado mais a fundo na seção seguinte.

3 Sudoku

3.1 O Jogo

Talvez o mais conhecido e popular jogo de quebra-cabeças lógico do mundo, o Sudoku surgiu no final dos anos 70, criado pelo americano Howard Garns. O jogo de Sudoku consiste em um tabuleiro 9 x 9, dividido ainda em 9 sub-matrizes 3 x 3, com algumas células preenchidas com algarismos de 1 a 9, e o objetivo é preencher as demais células com esses mesmos algarismos de modo que nenhum número se repita em nenhuma fileira, coluna, ou sub-matriz, até que o tabuleiro esteja completo. É claro que um grid de Suoku completo é um caso especial de um Quadrado Latino, com a restrição adicional das sub-matrizes 3x3.

9	8	5	4		1			
				3				
1		6						
			5					
4		2			9			3
	9			6	3	4		
	6			1				
			3		6			5
2				8				1

Figura 3: Exemplo de quebra-cabeça Sudoku

O Sudoku pode ser completado usando apenas dedução lógica, e apesar do uso de números para completar as células, nenhuma operação aritmética é utilizada, diferentemente do Quadrado Mágico, em que todas as linhas, colunas e diagonais somam algum valor específico. Na realidade, os algarismos de 1 a 9 podem ser substituídos por qualquer símbolo sem alterar o quebra-cabeças.

3.2 Estratégias

Todo jogo de Sudoku bem formulado, isto é, que possui solução única, pode ser resolvido por um processo de exclusão de candidatos em cada célula. A estratégia básica consiste em olhar individualmente cada linha, coluna ou sub-matriz e, para cada número ainda não presente nessa linha, coluna ou sub-matriz, excluir células que não podem conter o número até restar apenas uma célula possível. Nesse caso, a célula restante deve conter o número em questão. Equivalentemente, pode-se olhar cada célula individualmente e excluir para essa célula números que não podem ser colocados lá. Se ao final desse processo sobrar apenas um valor possível, sabe-se que essa célula deve conter esse valor.

Esse processo de varredura de linhas, colunas e sub-matrizes, porém, muitas vezes não é suficiente para resolver jogos mais difíceis. Nesse caso, análises lógicas mais profundas são necessárias. É comum demarcar em células vazias os possíveis candidatos ainda não excluídos, pois saber quais são os possíveis candidatos nas diferentes células fornece informações úteis para a resolução do quebra-cabeças.

Por exemplo, caso em uma sub-matriz um número seja candidato apenas em células de uma mesma linha (ou coluna), é possível excluir esse número como candidato em todo o resto da linha (ou coluna), mesmo que não se saiba ao certo em qual das células exatamente este número está. Analogamente, se todos os candidatos a um certo número de uma linha estão em uma mesma sub-matriz, esse número pode ser excluído como candidato das células vazias restantes na sub-matriz.

A maior parte das estratégias chamadas "avançadas"de Sudoku utilizam esse princípio de exclusão de candidatos para encontrar um único número restante para se estar em uma célula, porém é possível se valer também de uma estratégia de tentativa e erro. Para alguma célula com valor indeterminado, assume-se qual número ela deve conter. Usando esse número, basta seguir completando células. Caso em algum momento se chegue em contradição (isto é, o quebra-cabeças fica impossível), o número inicialmente assumido pode ser descartado como candidato. Essa estratégia pode ser perigosa, entretanto, pois o jogador pode facilmente perder de vista quais foram os números adicionados a partir da suposição inicial, além de que pode ser difícil de se saber qual a suposição errada caso o jogador utilize essa estratégia de maneira contínua.

3.3 Matemática Por Trás do Jogo

Com o enorme número de aplicativos, revistas e jornais que publicam Sudokus, um jogador ávido pode se agonizar, temendo que algum dia acabem jogos novos. Essa certamente não deveria ser uma preocupação, visto que o número de quebra-cabeças possíveis já foi calculado e é absolutamento gigantesco. Mas quantos jogos são exatamente?

Comecemos com o número de grids possíveis, isto é, jogos de Sudoku completos, matrizes 9 x 9 compostas por apenas números inteiros de 1 a 9 em que nenhum número se repita por linha, coluna e nas 9 caixas formadas por sub-matrizes 3 x 3. Um limitante superior grosseiro para isso é $(9!)^9$, da ordem de 10^{50}, que obtemos se considerarmos quantas matrizes 9 x 9 satisfazem apenas a condição de que nenhum número se repita por linha.

Se adicionarmos a condição que nenhum número deve se repetir nas colunas, temos o número de quadrados latinos de ordem 9. Não há uma fórmula fechada conhecida para o cálculo do número desses quadrados latinos, mas por força-bruta já se foi calculado que existam 524751496156892842531225600, ou $5,25 \cdot 10^{27}$, quadrados latinos 9 x 9 [1], um novo limitante superior para o número de Sudokus.

Uma maneira então de se calcular o número de jogos de Sudoku seria avaliar cada um desses quadrados latinos de ordem 9 e verificar quais deles respeitam a regra de não haver repetições em cada caixa, porém esse método seria computacionalmente caríssimo. Em 2005, Frazer Jarvis e Bertram Felgenhauer calcularam esse número [5] se valendo de algumas reduções, diminuindo o custo computacional significativamente. Eles usaram o fato de que se substituirmos dois números de posição em todo o grid (isto é, num grid completo, sempre que houver um 1 colocar um 2 e vice-versa), temos fundamentalmente o mesmo quebra-cabeças que antes, para contar apenas os casos em que a primeira caixa superior à esquerda estivesse no que chamaram de "forma padrão-ordenados da esquerda para a direita - e depois multiplicar o número encontrados por 9!, o número de maneiras que essa primeira caixa pode ser ordenada.

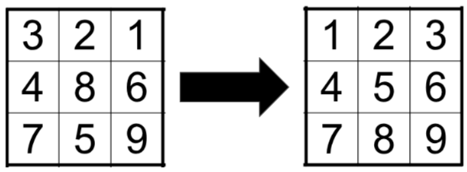


Figura 4: Processo de substituição de números para o formato padrão

Valendo-se de outras reduções semelhantes, os autores chegaram ao número de grids de Sudoku total: 6670903752021072936960, ou $6,67 \cdot 10^{21}$, um número de fato enorme. Isso, ainda por cima, é o número de grids completos de Sudoku. Se tentarmos pensar em quantos jogos de Sudoku existem, isto é, quantos quebra-cabeças incompletos que levam a esses grids completos, o número é muito maior.

De fato, para cada um desses grids completos, temos 81 jogos que começam com apenas 1 célula em branco (jogos triviais, é verdade, mas ainda assim Sudokus com resposta única a serem completados). Somam-se a esses os $\binom{81}{2}$ jogos em que se há

2 células em branco para cada grid e as $\binom{81}{3}$ maneiras de se ter um jogo começando com 3 células a serem descobertas. Não podemos, porém, para contar todos os jogos, simplesmente somar a esses todas as $\binom{81}{4}$ combinações que cada grid completo tem de começar com 4 células em branco. De fato, um Sudoku que começa com 4 células em branco (ou equivalentemente, que começa com 77 células preenchidas) não tem, de maneira garantida, solução única, como o exemplo abaixo:

2	9	5	7	4	3	8	6	1
4	3	1	8	6	5	9		
8	7	6	1	9	2	5	4	3
3	8	7	4	5	9	2	1	6
6	1	2	3	8	7	4	9	5
5	4	9	2	1	6	7	3	8
7	6	3	5	2	4	1	8	9
9	2	8	6	7	1	3	5	4
1	5	4	9	3	8	6		

Figura 5: Exemplo de Sudoku com 2 soluções possíveis

É fácil notar que o quebra-cabeça acima possuí mais do que uma solução. Qualquer uma das células vazias pode ser preenchida com 2 ou 7, de modo que temos duas soluções possíveis. De modo geral, não consideramos Sudokus com mais do que uma solução como válidos ou bem formulados, o que torna o exercício de calcular o número de jogos válidos de Sudoku muito mais difícil. De fato, esse número ainda não foi calculado, e esse cálculo certamente exigiria enorme poder computacional.

Mas se 77 é o maior número de dicas possíveis sem que seja garantido solução única, qual o menor número de dicas um Sudoku pode ter e ainda assim ter solução única? Há muito tempo quebra-cabeças. de solução única com 17 dicas eram conhecidos, mas nenhum com 16, o que fazia com que se fosse conjecturado que seria esse o número mínimo.

Em um artigo publicado em 2013, os pesquisadores Gary McGuire, Bastian Tugemann e Gilles Civario provaram que, de fato, não existe nenhum Sudoku de 16 pistas que possui solução única [7], fazendo uma busca exaustiva em todos os Sudokus com 16 pistas e mostrando que nenhum deles é bem formulado. Usando a simetria do problema de Sudoku, é possível ver que, apesar de termos o número de grids diferentes de Sudoku na ordem de 10^{21}, muitos deles são essencialmente os mesmos, passados por operações de simetria como:

1. Renomear os dígitos de 1 a 9, substituindo cada instância de um determinado dígito por algum outro

2. Permutar as colunas (equivalentemente, as linhas) dentro de uma mesma caixa e permutar os conjuntos de 3 caixas.

3. Transpor o grid.

Dessa forma, chegou-se ao número de 5472730538 grids essencialmente diferentes [6], já muitas ordens de magnitude menor do que o número inicial. Mesmo assim, avaliar para cada um desses grids todas os $\binom{81}{16}$ jogos com 16 pistas iniciais para verificar se existe algum jogo com solução única seria inviável computacionalmente. Os autores do artigo então usaram uma estratégia para identificar em grids completos o que eles chamaram de *conjuntos inevitáveis*, um conjunto de células das quais é preciso ter ao menos uma pista inicialmente para que se tenha solução única (similar ao exemplo da Figura 5, na qual as células em branco seriam um conjunto inevitável). Assim, um cojunto de pistas só iria levaria a um Sudoku completo unicamente se esse conjunto tiver interesecção com todo conjunto inevitável. Note que alguns conjuntos inevitáveis podem precisar de mais do que apenas uma intersecção para garantir solução única, como no conjunto inevitável abaixo, no qual são necessárias duas pistas para se determinar unicamente a solução, e o número de pistas necessárias para um conjunto inveitável ter solução única foi chamado de grau do conjunto inevitável.

1			2			3		
2			3			1		
3			1			2		

Figura 6: Conjunto inevitável de grau 2

Os pesquisadores então usaram um programa capaz de encontrar conjuntos inevitáveis compostos por até 12 células para eliminar à priori todo candidato a Sudoku de

16 pistas que não possuia intersecção com todos esses conjuntos. Isso diminuiu bruscamente o número de candidatos que eles precisavam avaliar, tornando a busca exaustiva por Sudokus de 16 pistas muito mais rápida. Dessa forma, foi possível se provar que não existe Sudoku algum de 16 pistas que possua solução única.

3.4 Solução de Sudoku por Programação Inteira

Existem diversos algoritmos diferentes capazes de solucionar Sudokus, desde os mais simples, que utilizam *backtracking* para encontrar a solução correta, até outros mais complexos e também mais eficientes.

Uma das maneiras de resolver um Sudoku é encará-lo como um problema de Programação Inteira. Como os números que devem ser colocados no quebra-cabeça são inteiros, seria ituitivo imaginar que usaríamos variáveis de decisão x_{ij} que poderiam assumir valor entre 1 e 9 para modelar o Sudoku, mas essa abordagem não é capaz de modelar a regra de que todos números em uma determinada coluna (ou linha) sejam diferentes de maneira linear.

Para modelar o problema do Sudoku, então, devemos usar variáveis binárias x_{ijk}, com $i, j, k = 1, 2, 3, ..., 9$, em que os índices i e j representam a posição no grid e o índice k o valor de 1 a 9 que aquela determinada célula possui. Assim, se $x_{ijk} = 1$, temos que na posição (i, j) do tabuleiro o número correto é k. A partir disso, podemos modelar as restrições da seguinte maneira [2]:

$$min \quad 0^T\mathbf{x}$$

$$s.a. \quad \sum_{i=1}^{9} x_{ijk} = 1, \quad j, k = 1, 2, ..., 9$$

$$\sum_{j=1}^{9} x_{ijk} = 1, \quad i, k = 1, 2, ..., 9$$

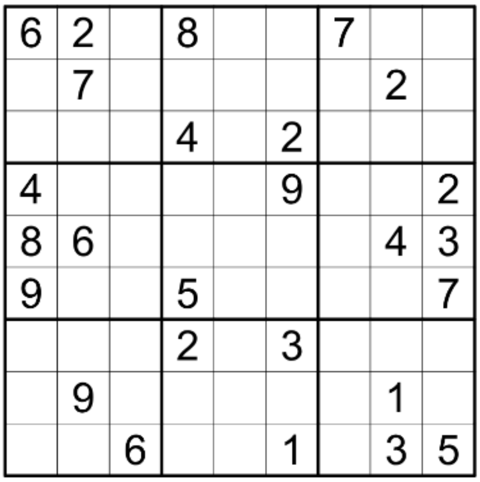
$$\sum_{i=(3p-2)}^{3p} \sum_{j=(3q-2)}^{3q} x_{ijk} = 1, \quad k = 1, 2, ..., 9 \quad e \quad p, q = 1, 2, 3$$

$$x_{ijk} \in \{0, 1\}$$

Em que a primeira restrição garante que cada posição (i, j) do tabuleiro tenha apenas um valor, a segunda e terceira restrições garantem que em cada linha e coluna cada número apareça apenas uma única vez e a quarta restrição garante que em cada uma das 9 caixas cada número apareça uma única vez. Além dessas restrições, devemos ter restrições como $x_{ijk} = 1$ para toda dica inicial, colocando nos índices i, j e k a posição da dica e o seu valor.

Além disso, note que a nossa função objetivo é constante e igual a 0. Isso se dá porque o problema do Sudoku está inteiramente nas suas restrições. Isso significa que o conjunto de soluções factíveis desse PL contém um único elemento (caso o Sudoku tenha uma única solução, o que é necessário para ele ser válido), e esse elemento é a solução para o quebra-cabeças.

Para resolver esse problema de Programação Inteira, podemos aplicar métodos de relaxação para o problema, relaxando a restrição binária por $0 \leq x_{i,j,k} \leq 1$ e aplixando métodos de Branch and Bound para encontrar a solução ótima. Abaixo, segue um exemplo de quebra-cabeça resolvido usando a biblioteca de resolução de problemas de programação inteira Gurobi, em python.



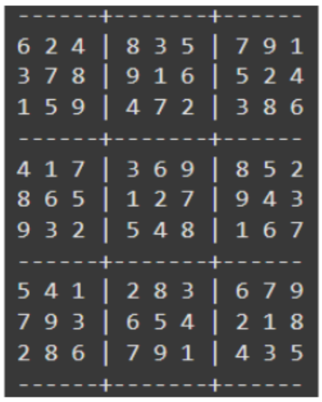


Figura 7: À esquerda, um Sudoku e à direita sua solução encontrada por Programação Inteira

4 Picross

4.1 O Jogo

Picross, também conhecido como Nonogram, surgiu no Japão no final dos anos 80, e rapidamente se espalhou para outro lugares do mundo nos anos seguintes, sendo publicado em revistas no Brasil, Reino Unido, Estados Unidos, entre outros países.

Nesse jogo, começa-se com uma matriz n x m vazia e números associados a cada linha e coluna dessa matriz. O objetivo é descobrir quais elementos dessa matriz são coloridos e quais são deixados em branco, sendo que os números associados às linhas e colunas correspondem a quantos quadrados devem ser pintados em sequência, com espaço entre números simbolizando que existe ao menos um espaço em branco entre quadrados pintados. Por exemplo, na primeira coluna do exemplo abaixo, há a dica "3 6". Isso significa que naquela coluna há 3 quadrados pintados seguido por ao menos 1 espaço em branco e depois por mais 6 quadrados pintados, de cima para baixo.

	3 6	2 6	1 6		4	7	3	4	3	7	4		7	7	2 1 2	2 1 2		7	7	2 2	2 2			7	7	2 2	2 2
1																											
2																											
3																											
2 2 4 4 4																											
3 2 2 4 4 4																											
3 5 2 2 2																											
3 2 1 2 4 2 2																											
3 2 1 2 2 2 2																											
3 2 1 2 4 4 4																											
3 2 2 4 4 4																											

Figura 8: Exemplo de quebra-cabeça Picross

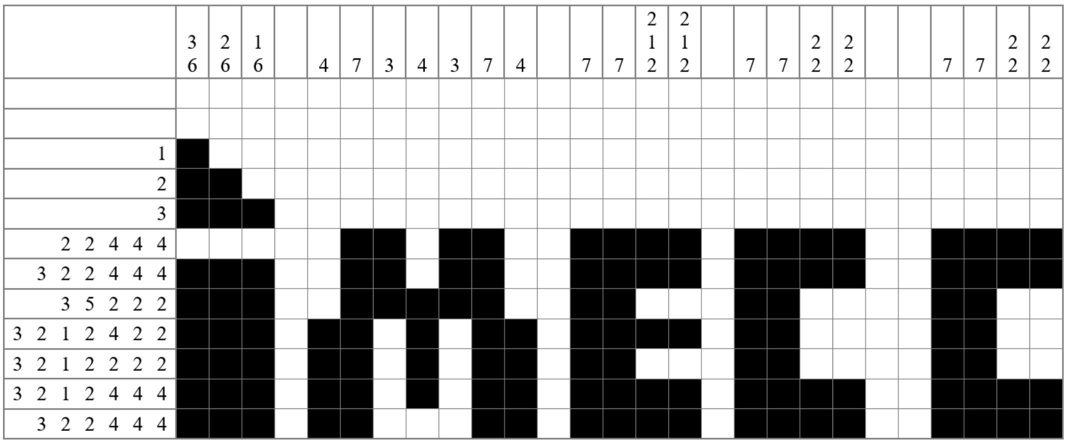


Figura 9: Solução do quebra-cabeça anterior

4.2 Estratégias

Para a resolução de problemas de Picross, a estratégia mais usual envolve olhar para cada fileira ou coluna individualmente, encontrar qual dessas colunas ou fileiras fornecem informação suficiente para determinar se um dado quadrado deve ou não ser pintado e em seguida usar as informações conseguidas anteriormente ao olhar outro coluna e fileira. Geralmente usa-se um "X"ou alguma outra marcação para demarcar espaços que devem necessariamente ser brancos, embora isso não seja estritamente necessário.

Devido à simetria do jogo com relação a rotação, os exemplos de estratégia a seguir tratarão apenas de fileiras, mas as mesma estratégias podem e devem ser utilizadas em colunas.

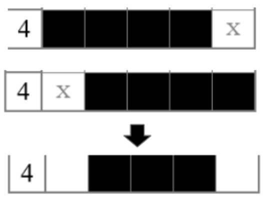


Figura 10: Quando temos um número de quadrados pintados maior do que a metade do tamanho do grid, necessariamente há células que devem estar pintadas

A estratégia mais simples para se começar a resolver um quebra-cabeça com fileiras de tamanho n é procurar por fileiras que possuem k quadrados pintados, em que $k > \frac{n}{2}$. Nessa situação, caso o conjunto de quadrados pintados começassem na primeira casa da esquerda, então os quadrados do intervalo $[1, k]$ estariam pintados, enquanto se esse conjunto terminasse na última casa, o intervalo $[n - k + 1, n]$ estaria pintado. Como $k > \frac{n}{2}$, em ambos os casos os quadrados no intervalo $[n - k + 1, k]$ estarão pintados, e, portanto, sabe-se que na respoata final esse intervalo vai estar pintado.

Essa estratégia pode, inclusive, ser generalizada para fileiras em que se há mais do que um único intervalo de quadrados pintados, mesmo que nenhum desses intervalos sejam maiores do que a metade do comprimento da fileira. Nesse caso, considere um conjunto ordenado de pistas K composto por m intervalos pintados, $k_1, k_2, ..., k_m$ e uma fileira de comprimento n. Seja S a soma do comprimento de cada um desses intervalos k_i mais 1 para cada espaço em branco entre dois intervalos, isto é:

$$S = \sum_{i=1}^{m} k_i + Card(K) - 1$$

Então, para cada pista k_i, se $k_i > n - S$, é possível determinar que $k_i - (n - S)$ deverão necessariamente ser pintados. Para determinar quais células pintar, basta assumir que todos os intervalos pintados estão empurrados para um dos lados e preencher do final de cada intervalo para trás o número apropriado de blocos.

Intuitivamente, o que essa estratégia faz é imaginar dois casos: um em que os intervalos pintados começam mais a esquerda o possível e outro em que começam mais a direita, e checa-se o "overlap"entre essas duas possibilidades para cada pista k_i. É fácil notar que a primeira estratégia, é portanto, u caso particular desta, em que $S = k$. O exemplo abaixo ilustra essa estratégia para uma fileira com $n = 15$ e $K = \{3, 6, 2\}$

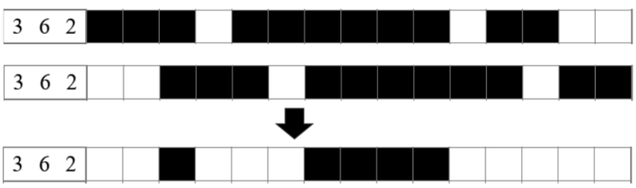


Figura 11: Exemplo de aplicação da estratégia de Picross

Embora essa estratégia não seja capaz de resolver o quebra-cabeça como um todo (salvo poucas exceções), usar ela em toda linha e coluna fornece informações sobre quais células são pintadas que servem de base para descobrir as demais e completar o quebra-cabeças. Sabendo-se se algumas células são pintadas ou não, podemos usar estratégias lógicas para descobrir as demais.

Um espaço vazio no meio da fileira pode forçar um intervalo grande para algum de seus lados, caso ele não seja capaz de encaixar no lado menor. É possível, inclusive, utilizar a estratégia descrita acima considerando na fórmula, ao invés de n, o novo comprimento do lado onde se sabe que o intervalo (ou intervalos) deve ficar.

Sabendo de uma célula colorida, é possível inferir se células ao lado são também, ao se pensar que essa célula conhecida é o início ou final do intervalo e verificar se ele não cabe para algum dos lados. Similarmente, é possível determinar quais espaços devem ficar em branco caso nenhum intervalo que saia dessa célula chegue em determinado espaço (dado que não haja outra pista que possa pintar o espaço).

Além disso, quando há dois blocos com uma célula indeterminada entre eles, essa célula será um espaço em branco caso a junção desses blocos fosse resultar em um bloco grande demais, ou será pintada caso separar esses blocos fizesse com que não caiba o intervalo necessário.

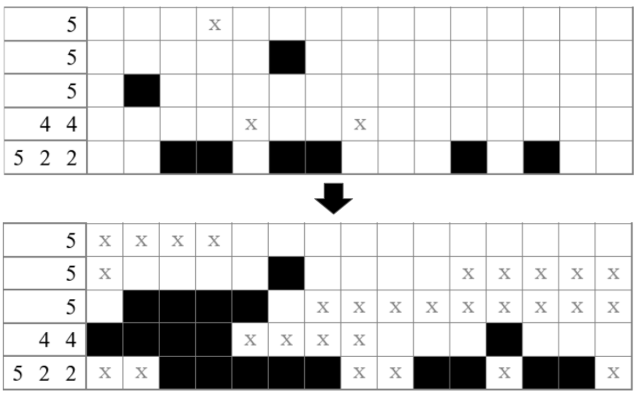


Figura 12: Exemplos de diferentes métodos sendo utilizados para determinar células em branco ou pintadas, partindo de diferentes informações inicias em cada fileira

Finalmente, uma outra estratégia é utilizar contradição para determinar qual estado de alguma célula. Nesse caso, assume-se que uma determinada célula deve ser pintada (ou deve ser deixada em branco) e partindo dessa célula, usa-se outras diversas estratégias. Caso em algum momento se chegue em uma contradição, é possível determinar que a célula original deve ser o oposto do que foi assumido.

4.3 A Matemática Por Trás do Picross

A existência de solução para um jogo de Picross depende da consistência entre as pistas fornecidas e a estrutura da grade. Como as pistas indicam quantas células devem ser preenchidas em cada linha e coluna, para que o jogo tenha uma solução válida, essas pistas precisam ser coerentes, ou seja, não podem entrar em contradição umas com as outras. Além disso, as pistas não podem entrar em contradição com a grade: é auto-evidente que pistas maiores do que o tamanho do tabuleiro geram jogos sem resolução.

Porém, a existência de uma solução não basta para considerar um determinado quebra-cabeças válido. A unicidade da solução também deve ser levado em conta, pois como um jogo de puzzle é imperativo que haja apenas uma solução correta que se busca. Um jogo é considerado sem solução única quando um conjunto de pistas inicial pode resultar em duas imagens formadas diferentes. Ou, equivalentemente, quando duas imagens geram o mesmo conjunto de pistas.

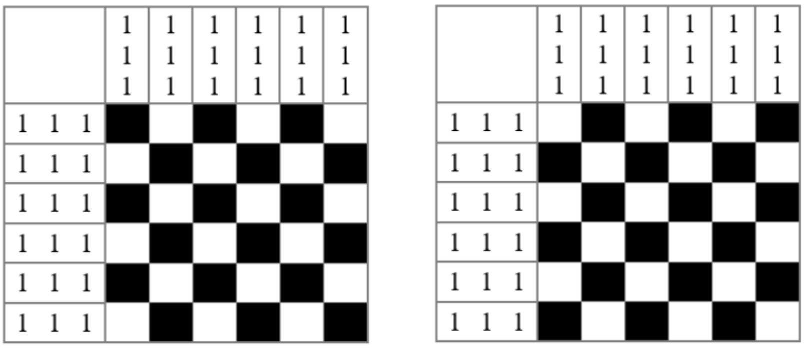


Figura 13: Exemplo de um conjunto de pistas com duas possíveis soluções

O exemplo mais simples de um conjunto de pistas com mais do que uma solução é um padrão xadrez em uma grade de tamanho par. A um padrão xadrez em um quadrado 2 x 2, foi se dado o nome *elementary switching component* [4], algo como componente de comutação elementar, em português, por ser o menor quebra-cabeça de 'Picross com mais do que uma solução.

De modo geral, Picrosses encontrados em revistas e aplicativos, feitos por humanos de modo pensado, são válidos quanto a uncidade da solução. De vez em quando, porém, alguns quebra-cabeças com mais do que uma solução podem passar batidos, como o exemplo abaixo, retirado de um aplicativo de Picross.

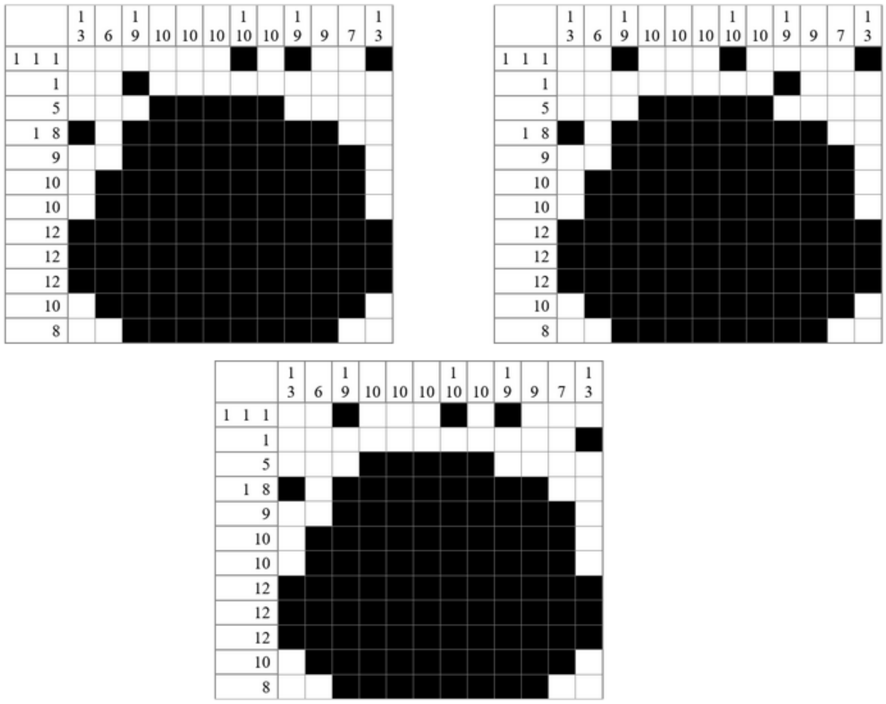


Figura 14: Três desenhos diferentes com o mesmo conjunto de pistas

Se considerarmos, porém, quebra-cabeças gerados aleatoriamente, isto é, uma matriz n x n na qual cada um dos seus n^2 elementos tem uma probabilidade p de ser 1 (pintado) e $1-p$ de ser 0 (em branco), então a chance de gerarmos quebra-cabeças com múltiplas soluções é alta. De fato, existe o seguinte teorema, para $p = 1/2$:

Teorema: Existem constantes positivas $\delta, \epsilon > 0$ tais que a probabilidade de um Picross m x n aleatoriamente gerado (com $m, n \geq 2$ ter menos do que $2^{\delta mn}$ soluções é menor do que $2^{\epsilon mn}$.

A prova desse teorema se baseia na definição de *isolated switching componentes*, ou componentes de comutação isolados, um componente 4 x 4 em que as 4 céuluas centrais são um componente de comutação elementar, as células das pontas podem ser tanto pretas quanto brancas, e as demais células são brancas, conforme a figura abaixo. Cada um desses componentes de comutação isolados levam a duas soluções localmente, independentemente do resto do quebra-cabeças. Assim, a probabilidade de termos pelo menos duas soluções diferentes para um mesmo conjunto de pistas está relacionada a probabilidade de esse padrão ser gerado aleatoriamente.

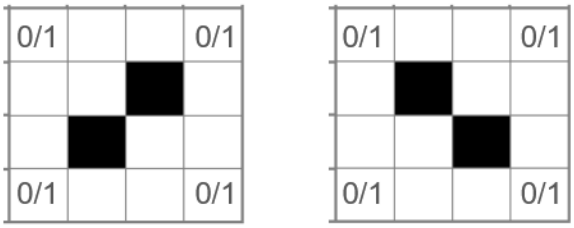


Figura 15: Componentes de comutação isolado

Note que esse componente de comutação isolado não é o único tipo de componente que leva a mais do que uma solução local. No exemplo da Figura 14, temos um tipo de componente diferente que leva o quebra-cabeças a ter 3 soluções. Na realidade, se a terceira linha fosse inteira branca, teríamos 4 soluções. Esse componente isolado e suas 4 soluções podem ser vistos na figura abaixo.

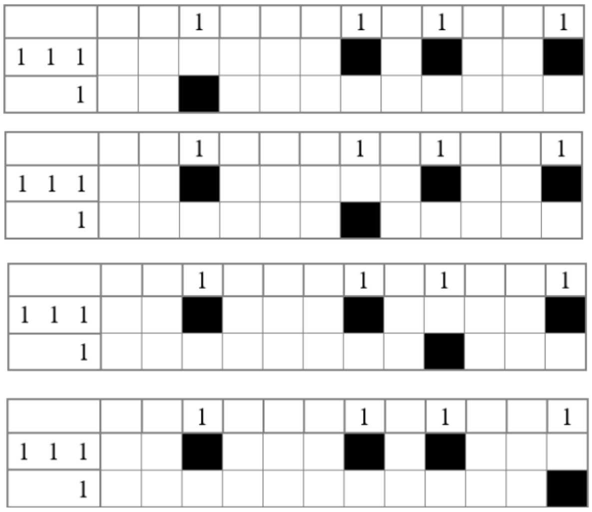


Figura 16: Componente no qual, se as fileiras acima e abaixo estiverem em branco, resulta em 4 soluções diferentes localmente

Algoritimicamente, é sabido que os problemas de resolver Picross e verificar se sua solução é única são NP-Completo. Isso significa que, à medida que o tamanho da jogo e a quantidade de pistas aumentam, o tempo necessário para encontrar a solução cresce exponencialmente, e não há um algoritmo eficiente conhecido que resolva todos os Picross em tempo polinomial [9] [3]. Ainda assim, para puzzles menores (o que abrange a maioria dos quebra-cabeças encontrados em aplicativos e revistas), não é difícil encontrar diversos solvers capazes de resolvê-los em tempo razoável, valendo-se muitas vezes da estratégia de força-bruta ou heurísticas.

5 Apêndice - Jogos

5.1 Sudoku de 17 pistas

								4
							5	6
		7			8			
			4					
				6		9		
		1				8	2	
				9	1			
	4				7			
8	5							

5.2 Picross 20x15

	4 1	4 2 2	3 2 2	2 2 1 1	2 2 5 1	2 2 2 3	1 2 6 1	2 1 2 4 3	2 1 2 4 1	1 3 6 1	1 1 2 3 3	2 5 1	1 3 4	1 1	1 1 1
3															
2 1															
1 6															
2															
3															
4 3															
2 2 2															
2 1 4															
2 2 3															
1 2 3															
2 2 3															
1 2 4															
1 1 4															
2 4															
1 3 1															
3 1 1															
2 1 2 3															
2 1 1 1 1															
3 1 1 1 1															
6 3 1 1															

Referências

[1] Stanley E. Bammel and Jerome Rothstein. The number of 9×9 latin squares. *Discrete Mathematics*, 11(1):93–95, 1975.

[2] Andrew Bartlett, Timothy Chartier, Amy Langville, and Timothy Rankin. An integer programming model for the sudoku problem. 04 2008.

[3] K.J. Batenburg and W.A. Kosters. Solving nonograms by combining relaxations. *Pattern Recognition*, 42(8):1672–1683, 2009. Advances in combinatorial image analysis.

[4] Daniel Berend, Dolev Pomeranz, Ronen Rabani, and Ben Raziel. Nonograms: Combinatorial questions and algorithms. *Discrete Applied Mathematics*, 169:30–42, 2014.

[5] Bertram Felgenhauer and Frazer Jarvis. Enumerating possible sudoku grids. In *Enumerating possible Sudoku grids*, 2005.

[6] Bertram Felgenhauer and Frazer Jarvis. Mathematics of sudoku i. In *Mathematics of Sudoku I*, 2006.

[7] Bastian Tugemann Gary McGuire and Gilles Civario. There is no 16-clue sudoku: Solving the sudoku minimum number of clues problem via hitting set enumeration. *Experimental Mathematics*, 23(2):190–217, 2014.

[8] Judson McCranie. Magic squares of all orders. *The Mathematics Teacher*, 81(8):674–678, 1988.

[9] Sancho Salcedo-Sanz, Emilio Ortiz-García, Ángel Pérez-Bellido, Antonio Portilla-Figueras, and Xin Yao. Solving japanese puzzles with heuristics. In *Solving Japanese Puzzles with Heuristics*, pages 224–231, 04 2007.