



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA



Eduardo Moraes Ferrari

Transformada de Radon e sua Aplicação em Processos de Tomografia Computadorizada

Campinas
22 de novembro de 2024

Eduardo Moraes Ferrari

Transformada de Radon e sua Aplicação em Processos de Tomografia Computadorizada

Monografia apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos para obtenção de créditos na disciplina Projeto Supervisionado, sob a orientação do(a) Prof. Marcos Eduardo Valle.

Resumo

Neste trabalho, buscamos explorar a teoria fundamental da Transformada de Radon e seus métodos clássicos de inversão, com o objetivo de compreender os princípios essenciais da chamada reconstrução por projeções. Durante o desenvolvimento do projeto, tivemos também a oportunidade de acompanhar de perto experimentos de reconstrução tomográfica realizados em um laboratório de luz síncrotron, enriquecendo nossa compreensão sobre tema.

Abstract

In this work, we aim to explore the fundamental theory of the Radon Transform and its classical inversion methods, with the goal of understanding the core principles of the so-called reconstruction by projections. During the development of the project, we also had the opportunity to closely follow tomographic reconstruction experiments conducted in a synchrotron light laboratory, enriching our practical understanding of the subject.

Conteúdo

1	Introdução	6
2	Resultados preliminares	6
3	A Transformada de Radon	8
3.1	Propriedades da Transformada de Radon	10
3.2	Transformada de Radon de Casos Simples	11
3.2.1	Tranformada de Radon de Fonte Pontual	11
3.2.2	Transformada de Radon de uma Linha	12
4	Problema da Transformada de Radon Inversa	14
4.1	Fourier Slice Theorem	16
4.2	Filtered Backprojection	17
5	Tomografia Computadorizada Experimental	18
6	Revisão Bibliográfica	23
7	Conclusão	23

1 Introdução

Em 1917 Johann Radon (1887-1956) escreveu “Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten” (on the determination of functions from their integrals along certain manifolds). Esse trabalho é a base para o que conhecemos a respeito da transformada de Radon atualmente.

A Transformada de Radon pode ser utilizada em diversas áreas de estudo, em especial, destacamos a sua utilização em imageamento médico. O objetivo da aplicação dessa transformada é obter informação a respeito do interior de um objeto sem causar dano algum ao material de estudo.

A informação a respeito da estrutura interna do objeto é obtida a partir do que chamamos de reconstrução por projeções. Nesse processo de reconstrução é utilizada a Transformada de Radon Inversa.

2 Resultados preliminares

Nessa seção, iremos apresentar conceitos fundamentais de análise para o entendimento na construção teórica da Transformada de Radon. Os resultados apresentados aqui estão baseados em (Vaz und de Oliveira., 2016).

Inicialmente, estudamos a função delta de Dirac. Essa função se trata, na verdade, de um conceito de função generalizada chamado distribuição. A função delta é definida como

$$\begin{aligned}\delta(x) &= 0 \text{ para } x \neq 0, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx &= 1.\end{aligned}$$

Dentre as propriedades da distribuição delta, destacamos

1. Translação.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a)\phi(x) dx = \phi(a).$$

2. Mudança de Escala.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(ax)\phi(x) dx = \frac{1}{|a|}\phi(0).$$

3. Argumento Funcional.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta[f(x)]\phi(x) dx = \sum_{i=1}^k \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_i) \frac{\phi(x)}{|f'(x_i)|} dx,$$

onde x_i são os zeros da função $f(x)$, assim podemos concluir

$$\delta[f(x)] = \sum_{i=1}^k \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|}.$$

Também revisitamos a Transformada de Fourier e algumas de suas propriedades. Podemos escrever a Transformada de Fourier de forma geral como

$$\mathfrak{F}[f(x)] = F(k) = \sqrt{\frac{|b|}{(2\pi)^{1-a}}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ibkx} dx, \quad (1)$$

$$\mathfrak{F}^{-1}[F(k)] = f(x) = \sqrt{\frac{|b|}{(2\pi)^{1+a}}} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{-ibkx} dk, \quad (2)$$

em que a e b são parâmetros arbitrários. Podemos demonstrar que

$$\mathfrak{F}^{-1}[\mathfrak{F}[f(x)]] = f(x).$$

A Transformada de Fourier dada de forma geral pelas equações (1) e (2) se faz útil no momento em que se consulta diversas bibliografias, cada qual com uma representação diferente para a transformada.

Dentre as propriedades da Transformada de Fourier podemos destacar

1. **Linearidade.** Dados escalares α e β ,

$$\mathfrak{F}[\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha \mathfrak{F}[f(x)] + \beta \mathfrak{F}[g(x)].$$

2. **Deslocamento.**

$$\mathfrak{F}[f(x - \alpha)] = e^{ik\alpha} F(k),$$

$$\mathfrak{F}[e^{-i\alpha x} f(x)] = F(k - \alpha).$$

3. **Escala.** Dada uma constante c diferente de zero,

$$\mathfrak{F}[f(cx)] = \frac{1}{|c|}F(k/c).$$

4. **Derivada.**

$$\mathfrak{F}[f'(x)] = -ikF(k),$$

$$\mathfrak{F}[xf(x)] = -iF'(k).$$

5. **Identidade de Parseval.** O produto escalar é conservado pela Transformada de Fourier,

$$\langle f|g \rangle = \langle F|G \rangle.$$

6. **Convolução.**

$$\mathfrak{F}[(f * g)(x)] = F(k)G(k),$$

3 A Transformada de Radon

Ao discutirmos a respeito da Transformada de Radon, é útil identificar os espaços de Radon e Fourier, como também o espaço de features. Neste último é definida uma distribuição f que caracteriza alguma propriedade física no espaço Euclidiano. Os espaços de Radon e Fourier correspondem aos espaços da transformada dessa distribuição f . Para efeito de estudos teóricos, assim como feito em (Poularikas, 2010), assumimos que f pertence à classe de funções infinitamente diferenciáveis C^∞ .

A Transformada de Radon da função $f(x, y)$ é definida como a integral de linha de f para todas as linhas definidas pelos parâmetros ϕ e p ilustrados na Figura 1. Representamos o mapeamento do espaço de features para o espaço de Radon por

$$\check{f} = \mathfrak{R}f$$

em que \check{f} pertence ao espaço de Radon. Podemos expressar em termos de integrais ao longo de ℓ como segue:

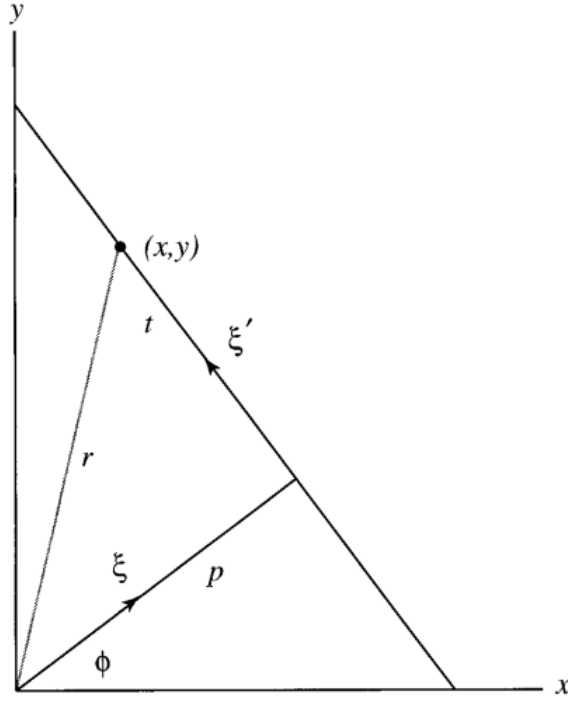


Figura 1: Coordenadas no espaço de features utilizadas para definir a Transformada de Radon. Imagem retirada de (Poularikas, 2010).

$$\check{f}(p, \phi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r}) dl,$$

em que $\mathbf{r} = (x, y)$ é um vetor posição. Definindo os vetores unitários $\boldsymbol{\xi} = (\cos \phi, \sin \phi)$ e $\boldsymbol{\xi}' = (\sin \phi, \cos \phi)$, note que $\boldsymbol{\xi}'$ é perpendicular a $\boldsymbol{\xi}$. Dessa maneira, observando a Figura 1, podemos escrever o vetor posição $\mathbf{r} = p\boldsymbol{\xi} + t\boldsymbol{\xi}'$ e

$$\check{f}(p, \boldsymbol{\xi}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(p\boldsymbol{\xi} + t\boldsymbol{\xi}') dt. \quad (3)$$

Outra definição equivalente faz uso da função delta de Dirac que, para o nosso caso, é mais conveniente e facilita a generalização

$$\check{f}(p, \phi) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(p - x \cos \phi - y \sin \phi) dx dy.$$

Pelo fato da linha ℓ na forma normal ser escrita como $p = x \cos \phi + y \sin \phi$ e pela definição do vetor $\boldsymbol{\xi}$, também podemos escrever

$$\check{f}(p, \boldsymbol{\xi}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r}) \delta(p - \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{r}) dx dy, \quad (4)$$

onde $\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{r} = \xi_1 x + \xi_2 y = x \cos \phi + y \sin \phi$.

Até o momento discutimos a definição da Transformada de Radon para uma função de features dada em \mathbb{R}^2 . Podemos estender a definição para \mathbb{R}^3 utilizando da definição (4). Seja a linha ℓ substituída por um plano e defina $\boldsymbol{\xi}$ como o vetor unitário partindo da origem tal que o vetor $p\boldsymbol{\xi}$ é perpendicular ao plano. Note que a equação do plano é dada por $p = \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{r}$ em que $\mathbf{r} = (x, y, z)$. A transformada de Radon de uma função de features em \mathbb{R}^3 é dada por

$$\check{f}(p, \boldsymbol{\xi}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r}) \delta(p - \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{r}) dx dy dz. \quad (5)$$

Da mesma maneira, seja f uma função de features definida em \mathbb{R}^n e $\mathbf{r} = (x_1, \dots, x_n)$, definindo o vetor $\boldsymbol{\xi}$ partindo da origem tal que $p\boldsymbol{\xi}$ é perpendicular ao hiperplano, definimos a transformada de Radon de f em n dimensões como a integral sobre todos os hiperplanos $p = \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{r}$ dada por

$$\check{f}(p, \boldsymbol{\xi}) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r}) \delta(p - \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{r}) dx_1 \cdots dx_n. \quad (6)$$

3.1 Propriedades da Transformada de Radon

Apresentaremos aqui propriedades básicas para o caso bidimensional da transformada de Radon. Também faremos uso da notação $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2) = (\cos \phi, \sin \phi)$. Nesta seção, modificaremos a notação para

$$\check{f}(p, \xi_1, \xi_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(p - \xi_1 x - \xi_2 y) dx dy. \quad (7)$$

1. **Linearidade.** Sejam a e b são, $f(x, y)$ e $g(x, y)$ funções no espaço de features, temos

$$\mathfrak{R}[af + bg] = a\check{f} + b\check{g}.$$

2. **Escala.** Sejam a e b constantes e $\mathfrak{R}[f(x, y)] = \check{f}(p, \xi_1, \xi_2)$, então

$$\mathfrak{R}[f(ax, by)] = \frac{1}{|ab|} \check{f}\left(p, \frac{\xi_1}{a}, \frac{\xi_2}{b}\right).$$

3. **Simetria.** Seja $\mathfrak{R}[f(x, y)] = \check{f}(p, \xi)$, temos

$$\check{f}(-p, -\xi) = \check{f}(p, \xi).$$

4. **Deslocamento.** Seja $\mathfrak{R}[f(x, y)] = \check{f}(p, \xi)$, então para constantes arbitrárias a e b temos

$$\mathfrak{R}[f(x - a, y - b)] = \check{f}(p - a\xi_1 - b\xi_2, \xi).$$

5. **Derivada.**

$$\mathfrak{R}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right] = \xi_1 \frac{\partial \check{f}(p, \xi)}{\partial p}$$

$$\mathfrak{R}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right] = \xi_2 \frac{\partial \check{f}(p, \xi)}{\partial p}$$

6. **Convolução.** Sejam $g(x, y)$ e $h(x, y)$ funções no espaço de features bidimensional e seja $\mathfrak{R}[f(x, y)] = \check{f}(p, \xi)$, denotando por $g ** h$ a convolução bidimensional, temos

$$\check{f}(p, \xi) = \mathfrak{R}[(g ** h)] = \check{g} * \check{h} = \int_{-\infty}^{\infty} \check{g}(\tau, \xi) \check{h}(p - \tau, \xi) d\tau.$$

Informalmente podemos dizer que a transformada de Radon transforma o produto convolução no plano no produto convolução do parâmetro normal da linha p .

Detalhes a respeito das demonstrações das propriedades expostas acima podem ser encontradas em (Deans, 2007).

3.2 Transformada de Radon de Casos Simples

3.2.1 Transformada de Radon de Fonte Pontual

A partir de agora, utilizaremos ρ e θ como parâmetros normais da reta, representados na Figura 2.

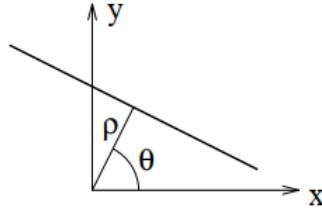


Figura 2: Parâmetros normais da linha. Imagem retirada de (Toft, 1996).

Seja $g(x, y)$ uma função de features em \mathbb{R}^2 que representa uma fonte pontual em (x^*, y^*) . Podemos escrevê-la utilizando a função delta de Dirac como

$$g(x, y) = \delta(x - x^*)\delta(y - y^*).$$

Utilizando a definição (4) podemos calcular

$$\mathfrak{R}(g) = \check{g}(\rho, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x^*)\delta(y - y^*)\delta(\rho - x \cos \theta - y \sin \theta) dx dy,$$

pela definição da função delta temos

$$\mathfrak{R}(g) = \check{g}(\rho, \theta) = \delta(\rho - x^* \cos \theta - y^* \sin \theta).$$

Este resultado é muito importante pois podemos perceber que a transformada de Radon leva um ponto do espaço de features a uma senoide no espaço de Radon.

3.2.2 Transformada de Radon de uma Linha

Seja $g(x, y)$ uma função de features em \mathbb{R}^2 dada por uma linha. Modelando-a utilizando a função delta

$$g(x, y) = \delta(\rho^* - x \cos \theta^* - y \sin \theta^*)$$

Utilizando a definição (3) podemos calcular

$$\begin{aligned}
\mathfrak{R}(g) = \check{g}(\rho, \theta) &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\rho^* - (\rho \cos \theta - t \sin \theta) \cos \theta^* - (\rho \sin \theta + t \cos \theta) \sin \theta^*) dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\rho^* - \rho \cos(\theta - \theta^*) + t \sin(\theta - \theta^*)) dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|\sin(\theta - \theta^*)|} \delta\left(\frac{\rho^* - \rho \cos(\theta - \theta^*)}{\sin(\theta - \theta^*)} + t\right) dt,
\end{aligned}$$

onde utilizamos propriedade da mudança de escala da função delta de Dirac e também consideramos $\sin(\theta - \theta^*) \neq 0$. Por outro lado, se $\sin(\theta - \theta^*) = 0$, isto é, $\theta = \theta^*$, encontramos

$$\check{g}(\rho, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\rho - \rho^*) dt.$$

Assim obtemos o interessante resultado, um pico em (ρ^*, θ^*) é formado no espaço de Radon ao realizar a transformada de uma linha dada pelos parâmetros normais ρ^* e θ^* .

Na Figura 3 podemos ver picos no espaço de Radon (figura à direita) que correspondem aos parâmetros normais de cada uma das linhas no espaço de features (figura à esquerda). Vale ressaltar que a teoria da Transformada de Radon desenvolvida aqui versa sobre a transformação de funções contínuas e infinitamente diferenciáveis, dessa maneira Toft (1996) formulou a discretização para a transformada de Radon e utilizou considerações de amostragem para gerar as imagens na Figura 3.

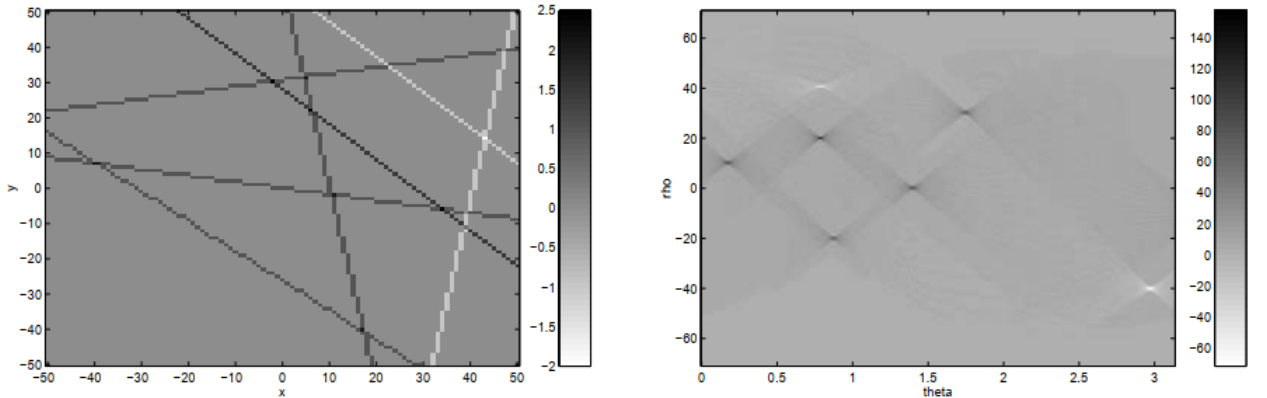


Figura 3: Transformada de Radon de várias linhas. Imagem retirada de Toft (1996).

Salientamos que inicialmente não consideramos como foco principal deste tra-

balho a análise de formulações discretas e considerações de amostragem, mas sim o estudo teórico da Transformada de Radon contínua e o estudo de sua utilização para aplicação em tomografia computadorizada.

Também ressaltamos a possibilidade de aplicação da transformada de Radon para detecção de linhas em técnicas de pós-processamento de imagens, visto o comportamento da transformada em retas no plano.

4 Problema da Transformada de Radon Inversa

O problema da Transformada de Radon inversa é chamado de reconstrução por projeções, onde as projeções podem ser interpretadas como a transformada de uma função no espaço de features.

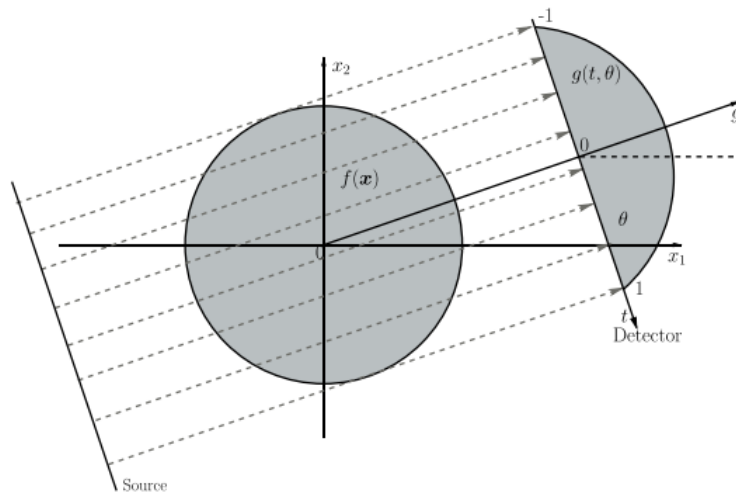


Figura 4: Projeção g indica um perfil da função f definida no espaço de features em um ângulo θ fixo em um esquema de tomografia paralela de raios-X (geometria do feixe) . Imagem retirada de [Miqueles u. a. (2018)].

Na Figura 4 podemos ver que $g(t, \theta)$ indica uma projeção da função de features $f(x, y)$ definida no espaço. Esse perfil pode ser visto como a transformada de Radon da função $f(x, y)$ com θ fixo dado por

$$g(t, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(t - \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\xi}_{\theta}) dx dy.$$

Para uma determinação completa da função de features precisamos repetir o

processo de obtenção de projeções para todos os ângulos e, com as projeções à disposição temos como objetivo obter novamente a distribuição no espaço de features como aponta o diagrama abaixo.

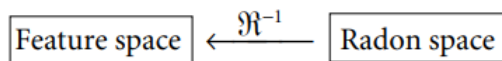


Figura 5: Diagrama retirado de [Poularikas (2010)].

Discussão a respeito do método direto de inversão pode ser encontrado em [Deans (2007)]. Contudo, o esquema direto de inversão apresenta extrema robustez teórica e pouca utilização prática devido à necessidade teórica de um conjunto com infinitas projeções para a inversão. Na prática, o conjunto de projeções é discreto. Existe o que chamamos de “*Indeterminacy Theorem*” apresentado em (Smith u. a., 1977) o qual afirma que uma função $f(x, y)$ com suporte compacto é unicamente determinada por um conjunto infinito de projeções, mas não é determinada por nenhum conjunto finito de projeções. Entretanto, existem também resultados que atestam que boas aproximações de funções no espaço de features podem ser obtidas utilizando um número suficientemente grande de projeções.

Resultados como esses motivam a criação de algoritmos que podem ser vistos como implementações discretas da inversão de Radon. Experimentalmente, outro fator que torna a inversão de Radon um problema não trivial é que ele pode ser visto como um problema malposto, isto é, pequenos erros de aproximação na projeção \check{f} podem resultar em grandes erros na função reconstruída f .

O processo de aquisição de projeções de uma dada distribuição espacial requer algum tipo de sonda capaz de atravessar o material sem causar nenhum dano significativo a ele. No contexto do estudo deste trabalho, foi considerada a utilização de raios-X e o processo de aquisição de imagens segue os padrões da linha de luz intitulada Mogno nas instalações do Laboratório Nacional de Luz Síncrotron, instituição que foi fundamental no processo de aprendizagem dos tópicos aqui discutidos. Retornaremos mais adiante ao tópico experimental de reconstrução e seus desafios.

4.1 Fourier Slice Theorem

Nosso objetivo aqui é, a partir da transformada de Radon $\check{g}(\rho, \theta)$, obter $g(x, y)$. Para isso, faremos uso da transformada de Fourier, mais especificamente, de um algoritmo padrão utilizado na inversão de Radon, o chamado Fourier Slice Theorem, também conhecido como Central Slice Theorem.

Aqui, utilizaremos j como unidade imaginária. Seja a transformada de Fourier 2D de $g(x, y)$ dada por

$$G(k_x, k_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) e^{-j2\pi(k_x x + k_y y)} dx dy \quad (8)$$

e a transformada inversa dada por

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(k_x, k_y) e^{j2\pi(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y. \quad (9)$$

Faremos uso de frequências polares

$$\begin{pmatrix} k_x \\ k_y \end{pmatrix} = \nu \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$$

fazendo a substituição na equação (8)

$$G(\nu \cos \theta, \nu \sin \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) e^{-j2\pi\nu(x \cos \theta + y \sin \theta)} dx dy,$$

utilizando a função delta

$$\begin{aligned} G(\nu \cos \theta, \nu \sin \theta) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) \delta(\rho - x \cos \theta - y \sin \theta) e^{-j2\pi\nu\rho} dx dy \right] d\rho \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) \delta(\rho - x \cos \theta - y \sin \theta) dx dy \right] e^{-j2\pi\nu\rho} d\rho \end{aligned}$$

assim,

$$G(\nu \cos \theta, \nu \sin \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \check{g}(\rho, \theta) e^{-j2\pi\nu\rho} d\rho. \quad (10)$$

Logo, a função $g(x, y)$ no espaço de features pode ser recuperada utilizando da transformada de Fourier unidimensional e bidimensional, isto é, utilizando as equações (9) e (10).

Note que podemos utilizar o resultado, não só para a inversão de Radon, mas também como uma ferramenta para calcular a transformada de Radon utilizando o resultado de maneira inversa. Podemos generalizar a relação entre os espaços de Fourier e Radon como representado na Figura 6 e, de forma geral, podemos escrever o Fourier Slice Theorem para uma função $f(\mathbf{x})$ no espaço de features n-dimensional como

$$\mathfrak{F}_1 \mathfrak{R}[f] = \mathfrak{F}_n[f].$$

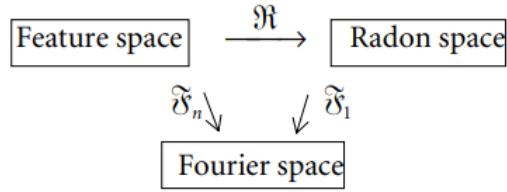


Figura 6: Diagrama que esclarece a relação entre os espaços de Radon e Fourier. Imagem retirada de [Poulikas (2010)].

4.2 Filtered Backprojection

Outro esquema de inversão muito utilizado é o Filtered Backprojection. Podemos obtê-lo substituindo as frequências polares na equação (9)

$$\begin{aligned} g(x, y) &= \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \nu G(\nu \cos \theta, \nu \sin \theta) e^{j2\pi\nu(x \cos \theta + y \sin \theta)} d\nu d\theta \\ &= \int_0^\pi \int_{-\infty}^\infty |\nu| G(\nu \cos \theta, \nu \sin \theta) e^{j2\pi\nu(x \cos \theta + y \sin \theta)} d\nu d\theta \\ &= \int_0^\pi \int_{-\infty}^\infty |\nu| \left(\int_{-\infty}^\infty \check{g}(\tilde{\rho}, \theta) e^{-j2\pi\tilde{\rho}\nu} d\tilde{\rho} \right) e^{j2\pi\nu(x \cos \theta + y \sin \theta)} d\nu d\theta \end{aligned} \quad (11)$$

A equação (11) pode ser escrita em duas partes. Mais especificamente,

$$\check{g}(\rho, \theta) = \int_{-\infty}^\infty |\nu| \left(\int_{-\infty}^\infty \check{g}(\tilde{\rho}, \theta) e^{-j2\pi\tilde{\rho}\nu} d\tilde{\rho} \right) e^{j2\pi\nu(x \cos \theta + y \sin \theta)} d\nu \quad (12)$$

chamada de etapa de filtro e

$$\begin{aligned}
 g(x, y) &= \int_0^\pi \bar{g}(x \cos \theta + y \sin \theta, \theta) d\theta \\
 &= \int_0^\pi \int_{-\infty}^\infty \bar{g}(\rho, \theta) \delta(\rho - x \cos \theta - y \sin \theta) d\rho d\theta
 \end{aligned} \tag{13}$$

em que (13) é chamado de operador de backprojection. Em termos simples, o operador de backprojection pode ser visto como uma integração ao longo de uma curva senoidal no espaço de Radon $\bar{g}(\rho, \theta)$. Em [Deans (2007)] é mostrado que a adjunta da transformada de Radon é duas vezes o operador de backprojection. O par de equações (12) e (13) forma o que chamamos de esquema de inversão por Filtering Backprojection.

Implementação computacional dos esquemas clássicos de inversão aqui apresentados demandariam profundo estudo de discretização de esquemas e questões de amostragem que fogem do escopo proposto neste trabalho.

5 Tomografia Computadorizada Experimental

Nesta etapa do trabalho, devido a um estágio nas instalações no Grupo de Computação Científica do LNLS - Laboratório Nacional de Luz Síncrotron, tivemos a oportunidade de acompanhar de perto como funciona a obtenção e o tratamento de dados para tomografia no contexto de um laboratório de luz síncrotron. Assim, aliado ao estudo introdutório acerca da transformada de Radon, pudemos compreender um pouco mais o trabalho da tomografia computadorizada.

Neste contexto, utilizamos raios-X como feixe para obter informações sobre uma amostra específica. O feixe emitido interage com a amostra antes de atingir um detector. Consideramos apenas o efeito de atenuação dos raios-X ao colidirem com a amostra tridimensional, sendo μ o coeficiente de atenuação. É importante ressaltar que no contexto do LNLS, o feixe emitido apresenta geometria cônica, que acarreta na necessidade de métodos de reconstrução que levam a geometria do feixe em consideração. Assumimos que o emissor de radiação (fonte de luz síncrotron) e um pixel do detector definem uma linha com parâmetros normais (ρ, θ) como na Figura 7 e temos diferentes coeficientes de atenuação para cada posição ao longo dessa linha.

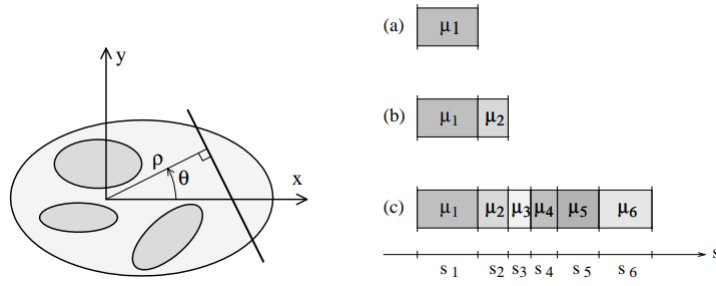


Figura 7: Imagem retirada de [Toft (1996)].

Pela lei de Lamber-Beer

$$I(\rho, \theta) = I_0 e^{-\int \mu(x,y) ds}. \quad (14)$$

Nessa equação, I_0 representa a intensidade do emissor e s denota o parâmetro normal da linha.

Na linha de luz, sob efeito dos raios-X, a amostra é rotacionada em torno de um eixo e no detector obtemos uma pilha de imagens bidimensionais que serão utilizadas para a reconstrução do objeto. A Figura 8 apresenta um diagrama que auxilia na compreensão.

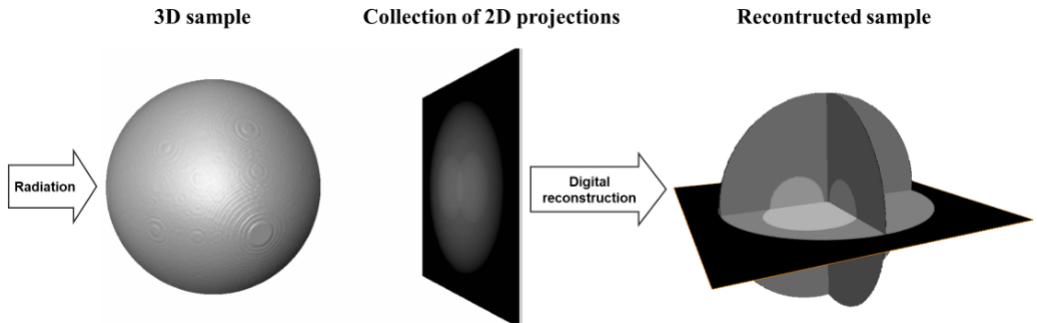


Figura 8: Imagem retirada de [Brookhaven National Lab (2021)].

As imagens bidimensionais obtidas inicialmente se tratam, na verdade, de mapas de intensidade. Parte fundamental do pré-processamento de dados é obter as projeções a partir desses dados de intensidade. Após o processamento, podemos empilhar as projeções para obter o chamamos de tomograma, como exhibe a Figura 9 .

A projeção, que denotaremos por $\mathcal{P}(\rho, \theta)$ é definida como

$$\mathcal{P}(\rho, \theta) = -\log \left(\frac{I(\rho, \theta)}{I_0} \right) = \int \mu(x, y) ds = \int_{-\infty}^{\infty} \mu(\rho \cos \theta - s \sin \theta, \rho \sin \theta + s \cos \theta) ds.$$

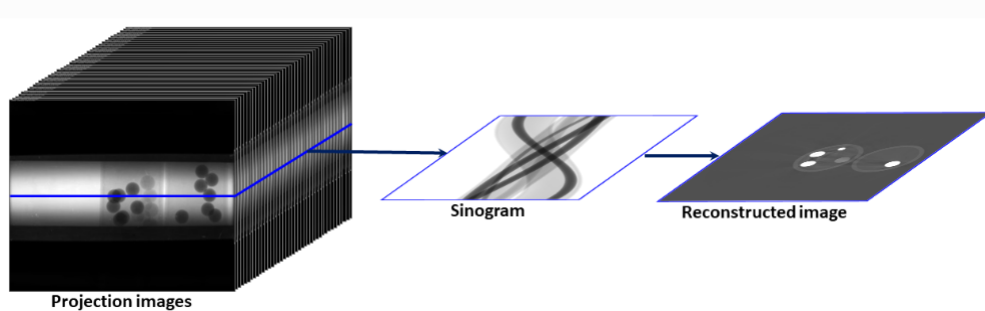


Figura 9: Imagem retirada de [Brookhaven National Lab (2021)].

Podemos perceber que a projeção $\mathcal{P}(\rho, \theta)$ pode ser identificada como a transformada de Radon de $\mu(x, y)$, observando a definição (3). Assim, o objetivo é recuperar o coeficiente de atenuação $\mu(x, y)$ a partir de projeções utilizando esquemas de inversão da transformada de Radon.

Outra técnica de pré-processamento utilizada é a chamada correção por flat e dark. A medida flat é a medida em que o feixe propaga-se até o detector só que desta vez sem a presença da amostra, essa medida coincide com a definição de I_0 dada. A medida de dark é a medida do detector, ainda sem amostra, porém desta vez com o feixe desligado e a denotamos por I_D . Isso é feito visando obter informação a respeito de possíveis pixels queimados no detector e procurando ajustar contraste para melhor visualização das projeções. Chama-se de projeção, na verdade, a correção

$$\mathcal{P}(\rho, \theta) = -\log \left(\frac{I(\rho, \theta) - I_D}{I_0 - I_D} \right).$$

Com o tomograma em mãos, podemos realizar cortes neste volume tridimensional digital e obter dois espaços que chamamos de espaço de projeções e espaço de sinogramas, ambos podem ser vistos na Figura 10. O espaço de sinogramas é, na verdade, o espaço de Radon no qual aplicaremos os esquemas de inversão para obter a reconstrução do que chamamos de um slice do tomograma. Esse processo é repetido para todos os slices (sinogramas) do tomograma e em seguida são empilhados, assim obtemos nosso volume reconstruído.

O processo de reconstrução, inversão de Radon, no contexto do LNLS é feito utilizando principalmente o método FDK (Feldkamp, Davis e Kress) e Expectation Maximization (EM) que são adaptados para a geometria cônica do feixe do laboratório.

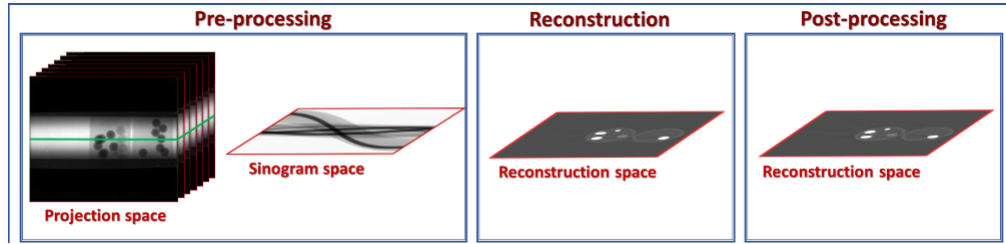


Figura 10: Imagem retirada de [Brookhaven National Lab (2021)].

Além desses algoritmos, o Grupo de Computação Científica também implementou os algoritmos clássicos para a geometria de feixes paralelos, Filtered Back-projection (FBP) e Back-projection by Slice Theorem (BST).

Contudo, nesse processo experimental surgem diversos desafios que precisam ser trabalhados em detalhe. Aqui, iremos destacar o artefato de *rings*, isto é, a aparição indesejada de anéis no slice reconstruído. Isso ocorre quando há a presença de linha no sinograma como aponta a Figura 11.

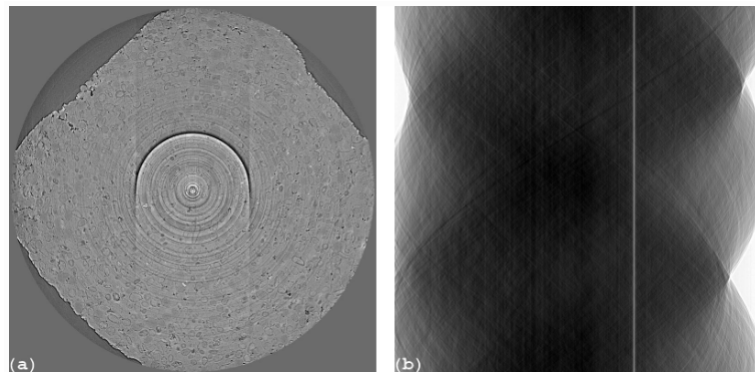


Figura 11: Imagem retirada de [Brookhaven National Lab (2020)].

Um dos desafios do estudo experimental de tomografia computadorizada é desenvolver metodologias capazes de remover esses artefatos para que a reconstrução represente o objeto de maneira mais confiável. No quesito do artefato de *rings* existem métodos clássicos de processamento de imagens, como o chamado *all stripes* que suaviza as faixas no sinograma por meio de médias dos valores próximos. Também existem métodos que levam em consideração a característica da imagem ser um sinograma, uma adaptação implementada pelo Grupo de Computação Científica está relatada em [Miqueles u. a. (2014)].

Na Figura 12 vemos o resultado da aplicação de um algoritmo de *all stripes*

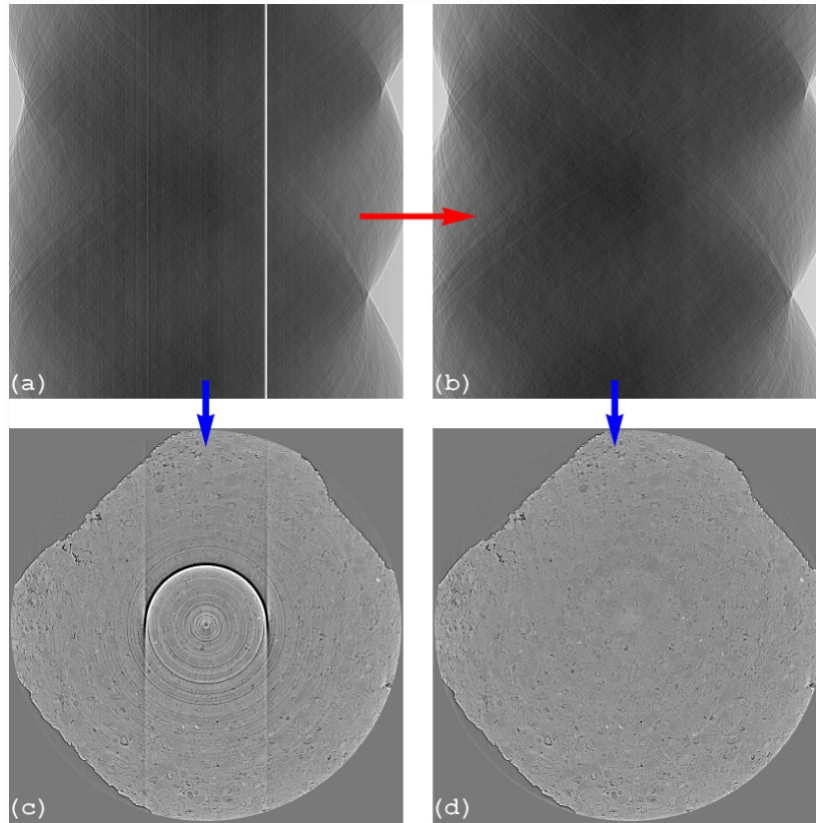


Figura 12: Figura (a): sinograma antes da aplicação do filtro de *rings*; figura (b): sinograma após a aplicação do filtro de *rings*; figura (c): reconstrução do slice antes da aplicação do filtro; figura (d): reconstrução do slice após a aplicação do filtro . Imagem retirada de [Brookhaven National Lab (2020)].

para a remoção de *rings*. É importante frisar que outros artefatos de origem óptica podem surgir, porém não temos domínio suficiente para discutí-los aqui.

Achamos pertinente destacar que a utilização de filtros de suavização para reduzir o efeito de artefatos podem nem sempre ser recomendados, pois estes podem tornar a imagem reconstruída demasiadamente suavizada acarretando na perda de features interessantes que buscávamos obter por ferramentar de segmentação de imagem em uma fase de pós-processamento.

Até aqui, apenas efeitos de absorção dos raios-X no processo de reconstrução da amostra foram considerados. Contudo, outros modelos físicos também consideram importantes os efeitos de refração e difração dos raios-X ao colidirem com a amostra e viajarem até o detector. Existe um amplo estudo no desenvolvimento de algoritmos de recuperação de fase que visam minimizar esses efeitos e obter uma reconstrução mais

fidedigna.

6 Revisão Bibliográfica

Para compreender as lacunas na pesquisa sobre a transformada de Radon e tomografia computadorizada, esta seção serve para elencar principais estudos relacionados ao tema de modo que facilite revisitar o assunto para estudos futuros.

Uma sólida e completa teoria a respeito da transformada de Radon, métodos de inversão da transformada e considerações de discretização e amostragem podem ser encontrados em [Poularikas (2010)], [Toft (1996)], [Deans (2007)] e [Natterer und Wübbeling (2001)].

Em se tratando da tomografia por recuperação de fase, aquela que leva em consideração efeitos de refração e difração do feixe, podemos nos pautar no estudo de trabalhos como [Maretzke u. a. (2016)], [Tonin (2022)] e [Paganin (2006)].

Existem bibliotecas python como “Astra Toolbox” e “Algotom” que tem por propósito forcener ferramentas para reconstrução tomográfica. Contudo, venho destacar o trabalho desenvolvido pelos membro do Grupo de Computação Científica do LNLS - CNPEM que vêm desenvolvendo uma biblioteca em python com o propósito de auxiliar na reconstrução tomográfica no âmbito do Acelerador de Partículas Sirius. O trabalho do grupo originou trabalhos como [Miqueles u. a. (2018)], [Miqueles u. a. (2014)] e [Miqueles u. a. (2020)].

7 Conclusão

Concluimos que a transformada de Radon é uma poderosa ferramenta de recuperação de uma função a partir de suas projeções com uma vasta teoria a ser estudada. Com aplicações não apenas para a detecção de linhas em processamento de imagens, mas também em processos experimentais para recuperação de propriedades de volumes tridimensionais.

Agradecimentos

Agradeço ao professor Marcos Eduardo Ribeiro do Valle Mesquisa pela orientação e pela disponibilidade de conversar e tirar dúvidas sempre que necessário. Também agradeço aos colaboradores do Grupo de Computação Científica do Laboratório Nacional de Luz Síncrotron do CNPEM, Eduardo Xavier Silva Miqueles, Paola Cunha Ferraz, Larissa Macul Moreno e João Francisco Gondim de Albuquerque Oliveira que se dispuseram a me instruir a respeito de processos de tomografia computadorizada em um contexto experimental.

Referências

- [Brookhaven National Lab 2020] BROOKHAVEN NATIONAL LAB, US: *Sarepy package page*. 2020. – <https://sarepy.readthedocs.io/index.html> [Accessed: (19/11/2024)]
- [Brookhaven National Lab 2021] BROOKHAVEN NATIONAL LAB, US: *Algotom package page*. 2021. – <https://algotom.readthedocs.io/en/latest/index.html> [Accessed: (19/11/2024)]
- [Deans 2007] DEANS, S.R.: *The Radon Transform and Some of Its Applications*. Dover Publications, 2007 (Dover Books on Mathematics Series). – URL <https://books.google.com.br/books?id=xSCc0KGi0u0C>. – ISBN 9780486462417
- [Maretzke u. a. 2016] MARETZKE, Simon ; BARTELS, Matthias ; KRENKEL, Martin ; SALDITT, Tim ; HOHAGE, Thorsten: Regularized Newton methods for x-ray phase contrast and general imaging problems. In: *Opt. Express* 24 (2016), Mar, Nr. 6, S. 6490–6506. – URL <https://opg.optica.org/oe/abstract.cfm?URI=oe-24-6-6490>
- [Miqueles u. a. 2014] MIQUELES, E. X. ; RINKEL, J. ; O'DOWD, F. ; BERMÚDEZ, J. S. V.: Generalized Titarenko's algorithm for ring artefacts reduction. In: *Journal of Synchrotron Radiation* 21 (2014), Nr. 6, S. 1333–1346. – URL <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1107/S1600577514016919>
- [Miqueles u. a. 2018] MIQUELES, Eduardo ; KOSHEV, Nikolay ; HELOU, Elias S.: A Backprojection Slice Theorem for Tomographic Reconstruction. In: *IEEE Transactions on Image Processing* 27 (2018), Nr. 2, S. 894–906
- [Miqueles u. a. 2020] MIQUELES, Eduardo X. ; JR., Gilberto M. ; GUERRERO, Patriocio P.: *Fast image reconstruction at a synchrotron laboratory*. S. 24–34. In: *Proceedings of the 2020 SIAM Conference on Parallel Processing for Scientific Computing (PP)*, URL <https://epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/1.9781611976137.3>, 2020
- [Natterer und Wübbeling 2001] NATTERER, Frank ; WÜBBELING, Frank: *Mathematical Methods in Image Reconstruction*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2001. – URL <https://epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/1.9780898718324>

- [Paganin 2006] PAGANIN, David M.: 64X-ray interactions with matter. In: *Coherent X-Ray Optics*. Oxford University Press, 01 2006. – URL <https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780198567288.003.0002>. – ISBN 9780198567288
- [Poularikas 2010] POULARIKAS, Alexander D.: *Transforms and Applications Handbook*. Second. Boca Raton : CRC Press, 2010. – URL <http://www.crcnetbase.com/doi/book/10.1201/9781420066531>. – ISBN 9781420066531 1420066536
- [Smith u. a. 1977] SMITH, Kennan T. ; SOLMON, Donald C. ; WAGNER, Sheldon L.: Practical and mathematical aspects of the problem of reconstructing objects from radiographs. In: *Bull. Amer. Math. Soc.* 83 (1977), Nr. 6, S. 1227–1270. – URL <http://dml.mathdoc.fr/item/1183539851>
- [Toft 1996] TOFT, Peter Aundal: *The Radon Transform - Theory and Implementation*, Technical University of Denmark, Dissertation, November 1996
- [Tonin 2022] TONIN, Yuri R.: Coherent X-ray diffraction imaging: image reconstruction via a matrix model of the inhomogenous Helmholtz equation. In: *recurso online (113 p.) Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Física Gleb Wataghin, Campinas, SP (2022)*
- [Vaz und de Oliveira. 2016] VAZ, Jayme ; OLIVEIRA., Edmundo C. de: *Métodos Matemáticos, volume II*. Editora da UNICAMP, 2016