



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA



Lucas Silvestrini Nicodemo

Formulações Mistas de Elementos Finitos para Solução Numérica do Problema de Darcy

Campinas
22/11/2024

Lucas Silvestrini Nicodemo

Formulações Mistas de Elementos Finitos para Solução Numérica do Problema de Darcy*

Monografia apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos para obtenção de créditos na disciplina Projeto Supervisionado 2, sob a orientação do Prof. Dr. Maicon Ribeiro Correa.

*Este trabalho foi financiado pelo CNPQ , projeto 124612/2024.

Resumo

Esse trabalho se enquadra na área de Análise Numérica, sob o escopo de estudar e implementar espaços estáveis para formulações mistas de Elementos Finitos. Utilizamos o problema de Darcy, que descreve o escoamento de fluidos newtonianos em meios porosos rígidos, como ponto de partida para o desenvolvimento da teoria de formulações mistas. Nessas formulações, o uso de diferentes espaços de busca para o método de Galerkin impõe condições adicionais no tocante à compatibilidade de tais espaços, explicitadas pelo teorema de Babuska-Brezzi (condições Inf-Sup). Destarte, introduzimos duas famílias de espaços Inf-Sup estáveis (Raviart-Thomas e Brezzi-Douglas-Marini), que serão a base para nosso Método de Elementos Finitos Misto, bem como suas taxas de convergência para as grandezas relevantes. Verificamos numericamente esses resultados, ilustrando a convergência dessas famílias em duas malhas de discretização distintas.

Abstract

This work falls under the area of Numerical Analysis, with the goal of studying and implementing Stable Mixed Finite Element Spaces. We begin by presenting the Darcy's problem, which describes the flow of a newtonian fluid in rigid porous media, as well as deriving the variational formulations for the governing equations. Since we use different trial spaces, we have to ensure the mixed Galerkin Approximation is numerically stable, according to the Babuska-Brezzi theorem (or Inf-Sup conditions). Thus, we introduce two families of Inf-Sup stable spaces (Raviart-Thomas and Brezzi-Douglas-Marini), which will define our Mixed Finite Element Method, while also comparing the convergence rates for the relevant variables. Those results are summarized through numerical experiments, where we illustrate the convergence rates for those spaces on two distinct meshes.

Conteúdo

1	Introdução	6
2	Espaços de Sobolev	7
3	O Problema de Darcy	8
4	Formulação Primal	10
5	Formulação Mista-Dual	13
5.1	Existência e Unicidade	14
5.2	Mapeamento de Piola	15
5.3	Método de Galerkin Misto	16
6	Espaços Estáveis para Formulações Mistas	17
6.1	Espaços de Raviart-Thomas	18
6.2	Espaços de Brezzi-Douglas-Marini	20
7	Experimentos Numéricos	22
7.1	Malha 1	22
7.2	Malha 2	27
8	Conclusões	32

1 Introdução

Hodiernamente, a modelagem matemática através de equações diferenciais constitui um dos principais pilares da Matemática Aplicada. Com efeito, suas influências podem ser facilmente encontradas em diversas áreas do conhecimento, com destaque para física, química, biologia e economia. Nesse viés, métodos numéricos mostram-se essenciais para representar com maior acurácia possível as equações que governam os problemas respectivos de tais segmentos, a partir do momento que soluções analíticas tornam-se inviáveis ou improváveis.

Num primeiro momento, o *Método das Diferenças Finitas* pode-se mostrar deveras eficaz, sendo baseado em aproximações para o operador diferencial. A naturalidade dessa ferramenta faz com que esteja presente em diversos problemas a nível de graduação. Apesar da maioria dos resultados rigorosos terem sido concebidos em meados da década de 30 [1], seus fundamentos coincidem com a origem do cálculo diferencial.

Sob o contexto de resolver problemas mais sofisticados, a introdução de formulações variacionais na obtenção de soluções numéricas de equações diferenciais foi o alicerce para consolidar o *Método dos Elementos Finitos* [1]. Ao reduzir a regularidade imposta na solução, podemos eventualmente escrevê-la como uma combinação linear de uma base finita de polinômios, utilizando aproximações de Galerkin. O emprego computacional do Método dos Elementos Finitos é bastante comum em inúmeros segmentos da engenharia, pela sua capacidade de representar domínios matemáticos mais complexos.

Na literatura, é inegável o foco direcionado a problemas de natureza elíptica. Em particular, formulações mistas de Elementos Finitos, sob o escopo de aproximar múltiplas grandezas físicas simultaneamente, têm sido amplamente adotadas em problemas de mecânica dos fluidos, com destaque para as *equações de Stokes* [2] e a *Lei de Darcy* [3]. Esses problemas ressaltaram questões sobre a compatibilidade dos múltiplos espaços de busca empregados, culminando no desenvolvimento de espaços estáveis para as respectivas grandezas. O formalismo matemático e a consistência numérica na implementação computacional de formulações mistas, regidas por análises de convergência, foram os principais tópicos de interesse nesse trabalho.

2 Espaços de Sobolev

Nessa seção, explicitamos os espaços de Sobolev [4] utilizados como espaços de busca para soluções aproximadas pelo Método dos Elementos Finitos, sob o escopo de caracterizar *funções teste* admissíveis que permitam partirmos do problema diferencial para um problema variacional.

Definição 2.1 (Espaços de Sobolev) Dados $m \geq 0$, $1 \leq p \leq \infty$, $\Omega \in \mathbb{R}^n$, um espaço de Sobolev é o conjunto $W^{m,p}(\Omega)$ definido como:

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega), D^\alpha u \in L^2(\Omega), |\alpha| \leq m\}$$

onde $D^\alpha u$ é a derivada distribucional de grau α de u , sendo dada por:

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \text{ com } |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$$

É imediato demonstrar que todo espaço de Sobolev é um *espaço de Banach* [4]. Não obstante, para o caso particular em que $p = 2$, pode-se mostrar que tais espaços também serão de *Hilbert* [5]. Devido a extrema importância destes espaços, eles são especificamente denominados espaços $H^m(\Omega)$ [5, 6]:

Definição 2.2 (Espaços $H^m(\Omega)$) Dado $m \geq 0$ e $\Omega \in \mathbb{R}^n$, o espaço $H^m(\Omega)$ é definido como

$$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega), D^\alpha u \in L^2(\Omega), |\alpha| \leq m\}$$

sendo munido do produto interno:

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} \partial^\alpha u \overline{\partial^\alpha v} \, d\Omega$$

Em particular, para $m = 0$, temos o espaço $L^2(\Omega)$ das funções quadrado-integráveis usual, munido do produto interno

$$(u, v) = \int_{\Omega} uv \, d\Omega, \forall u, v \in L^2(\Omega)$$

Para problemas em um campo, trabalhamos predominantemente com o espaço $H^1(\Omega)$. A especificação desse espaço foi feita com base nas condições de contorno da equação diferencial parcial (EDP) estudada [2]. Condições de Dirichlet implicam que a solução é conhecida em cada ponto no contorno, impondo fortemente (essencialmente) que as funções teste terão variação nula nesses pontos. Não obstante, condições de Neumann são definidas de forma que a solução não é conhecida no contorno, implicando que tais funções teste admitem variação arbitrária nesses pontos, definindo uma condição variacionalmente fraca (natural) [7].

Fixemos o operador divergente em \mathbb{R}^n , dado por

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{u} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$$

Em formulações mistas, trabalhamos também com variáveis vetoriais. Nesse caso, destaca-se ainda [6, 8] o espaço de Hilbert $H(\operatorname{div}, \Omega)$ das funções quadrado-integráveis com divergente quadrado-integrável:

Definição 2.3 (Espaço $H(\operatorname{div}, \Omega)$) Dado $\Omega \in \mathbb{R}^n$, o espaço $H(\operatorname{div}, \Omega)$ é definido como:

$$H(\operatorname{div}, \Omega) = \{\mathbf{u} \in [L^2(\Omega)]^n, \operatorname{div} \mathbf{u} \in L^2(\Omega)\}$$

Esse espaço possui a norma induzida

$$\|\mathbf{u}\|_{H(\operatorname{div}, \Omega)} = (\|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} + \|\operatorname{div} \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)})^{\frac{1}{2}}$$

Com essa descrição dos espaços de Sobolev, vamos introduzir o problema modelo para que possamos realizar nossas considerações sobre as formulações de Elementos Finitos.

3 O Problema de Darcy

A relação entre a taxa de escoamento de um fluido newtoniano incompressível em um meio poroso rígido e a pressão aplicada nesse meio foi obtida pelo engenheiro hidráulico Henry Darcy, em 1856, onde observou empiricamente um fluido de massa e viscosidade específicas escoar, sob pressão, num solo arenoso, conforme o seguinte aparato:

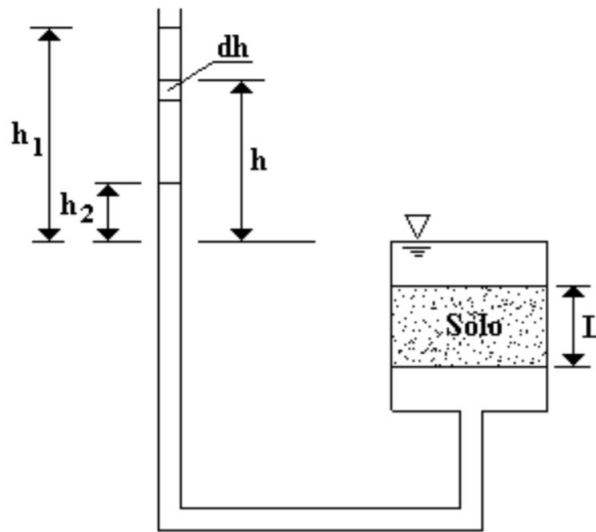


Figura 1: Esquema do experimento de Darcy - Fonte: Guia da Engenharia

Nesse viés, a composição do nosso modelo matemático será feita considerando algumas simplificações, conforme [2]:

- a inércia do fluido é desprezível para sua quantidade de movimento, quando comparado com o meio poroso;
- a transferência de quantidade de movimento por cisalhamento é muito menor que a do atrito com o meio poroso;
- o atrito é proporcional à velocidade de escoamento.

Nessas condições, a Lei de Darcy, que caracteriza a velocidade média (ou fluxo) \mathbf{u} do fluido no escoamento no meio poroso através do gradiente da pressão p num domínio $\Omega \in \mathbb{R}^2$, pode ser escrita [9] como:

$$\mathbf{u} = -K\nabla p \text{ em } \Omega \quad (1)$$

sendo K a permeabilidade do meio poroso.

Consideramos também a equação de balanço de massa do fluido,

$$\text{div } \mathbf{u} = f \text{ em } \Omega \quad (2)$$

em que $f \in L^2(\Omega)$. Destarte, a junção dessas equações define o Problema de Darcy, um sistema de equações diferenciais de natureza elíptica, o qual determina o regime de escoamento de um fluido incompressível em um meio poroso rígido, de permeabilidade K , e monofásico (em que os poros do meio são ocupados unicamente pelo fluido), que vai da região de maior pressão até a de menor:

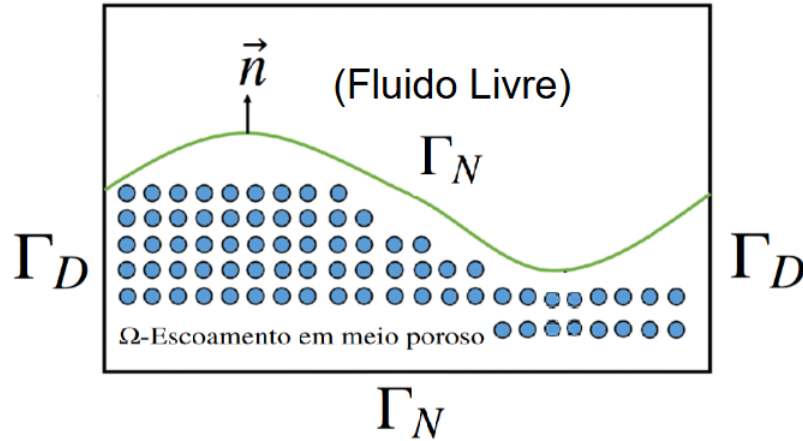


Figura 2: Representação do Domínio do Problema de Darcy - Imagem adaptada de [10]

Como veremos a seguir, duas abordagens numéricas de Elementos Finitos são possíveis, sendo elas uma formulação primal, onde escrevemos nosso problema modelo através de uma EDP de Poisson e utilizamos uma formulação que forneça a pressão do fluido, e a formulação mista-dual, que aproxima todas as grandezas relevantes de maneira simultânea. Um estudo mais aprofundado sobre formulações primais foi feita pelo autor em [7].

4 Formulação Primal

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, um domínio aberto, conexo e limitado, com contorno de Lipschitz $\Gamma = \partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$, com $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$, e vetor normal unitário \mathbf{n} . Consideremos o problema de Darcy

escrito como uma EDP de Poisson:

$$-\operatorname{div}(K\nabla p) = f \quad \text{em } \Omega \quad (3a)$$

$$p = p_0 \quad \text{sobre } \Gamma_D \quad (3b)$$

$$-K\nabla p \cdot \mathbf{n} = g \quad \text{sobre } \Gamma_N \quad (3c)$$

com $K = K(\mathbf{x})$ um tensor simétrico positivo definido com $K_{i,j} \in L^\infty(\Omega), \forall i, j$.

Vamos assumir, por simplicidade, $\Gamma = \Gamma_D$ e $p_0 = 0$ (problema de Dirichlet homogêneo). Multiplicando (3a) por $q \in H_0^1(\Omega) = \{q \in H^1(\Omega), q|_{\partial\Omega} = 0\}$, impondo a condição de contorno de Dirichlet homogênea, e integrando em Ω , obtemos a formulação primal clássica do nosso problema modelo:

Definição 4.1 (Formulação Variacional Primal) *Encontrar $p \in H_0^1(\Omega)$ tal que*

$$a(p, q) = L(q), \forall q \in H_0^1(\Omega) \quad (4)$$

onde a forma bilinear $a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por

- $a(p, q) = (K\nabla p, \nabla q)$

e a forma linear L é definida como

- $L(q) = (f, q)$

Conforme as definições apresentadas em [7, 11], segue da *Desigualdade de Poincaré* que a forma bilinear é coerciva. Outrossim, a *desigualdade de Cauchy-Schwarz* garante que a forma bilinear é contínua. A existência e unicidade de (4) é assegurada por um caso particular do teorema de Lax-Milgram, cuja versão generalizada [5, 2] é dada a seguir:

Teorema 4.1 (Lax-Milgram Generalizado) *Sejam V, Q espaços de Hilbert com as normas induzidas $\|\cdot\|_V$ e $\|\cdot\|_Q$ respectivamente. Fixe a forma bilinear contínua $a : V \times Q \rightarrow \mathbb{R}$. Dado a forma linear L , o problema variacional de encontrar $u \in V$ tal que $a(u, q) = L(q), \forall q \in Q$ admitirá solução única se e somente se:*

1. $\exists \beta > 0$ tal que $\sup_{q \in Q, q \neq 0} \frac{a(u, q)}{\|q\|_Q} \geq \beta \|u\|_V, \forall u \in V$

$$2. \sup_{u \in V} a(u, q) > 0, \forall q \in Q, q \neq 0$$

Daqui em diante, consideraremos $\mathcal{T}_h = \{E_i\}_{1 \leq i \leq n}$ uma malha de Elementos Finitos poligonais (conforme Ciarlet [7]) em Ω , em que h representa o supremo dos diâmetros dos elementos. Assumiremos ainda que a intersecção entre E_i e E_j , com $i \neq j$, ou é vazia, ou um vértice, ou uma aresta.

Vamos introduzir, por sua vez, um subespaço de dimensão finita $V_h \subset H_0^1(\Omega)$, cujas funções sejam polinomiais por partes. Uma escolha natural para as funções de base são os polinômios de Lagrange [12], que se associam naturalmente aos graus de liberdade nodais da malha. Com isso, podemos apresentar a solução primal de Elementos Finitos com o clássico *Método de Galerkin*:

Definição 4.2 (Método de Galerkin da Formulação Primal) *Encontrar $p_h \in V_h$ tal que*

$$a(p_h, q_h) = L(q_h), \forall q_h \in V_h$$

com as respectivas formas bilinear e linear definidas de maneira análoga à (4).

A observação crucial é que essa abordagem é *variacionalmente consistente*, de forma que a solução exata p irá satisfazer o Método de Galerkin para a formulação primal. Por conseguinte, a solução de Elementos Finitos p_h satisfaz as condições do teorema de Lax-Milgram. Essa característica é denominada *aproximação conforme*.

Não obstante, desejamos obter aproximações tanto para a pressão p quanto para o fluxo $\mathbf{u} = -K\nabla p$, mesmo trabalhando com uma formulação primal. A alternativa mais direta é trabalhar com um Pós-Processamento local, no sentido que para cada elemento E na malha, obtemos o fluxo ao substituí-lo no problema de Darcy,

$$\mathbf{u}_h|_E = -K\nabla(p_h|_E)$$

sendo a pressão p_h obtida pelo Método de Galerkin.

Entretanto, para o componente do fluxo (uma grandeza vetorial), isso não garante a continuidade do vetor normal entre a interface dos elementos [2], levando a aproximações sub-ótimas para condições de bordo de Neumann. Enquanto técnicas de pós-processamento que preservem a ordem de convergência têm sido desenvolvidas, uma possibilidade mais imediata é considerar formulações que forneçam simultaneamente o fluxo e a pressão [8].

5 Formulação Mista-Dual

Em diversos problemas de interesse prático, faz-se necessário uma aproximação simultânea de múltiplas grandezas físicas, como é o caso do problema de Darcy e das equações de Stokes. A formulação variacional deve considerar, portanto, a atuação de tais campos, culminando numa busca em múltiplos espaços polinomiais vetoriais [13, 14].

Em particular, essa abordagem precisa definir as funções de base para cada um desses espaços, de forma que certas condições de compatibilidade devem ser satisfeitas [6, 15]. A estabilidade da aproximação numérica depende fortemente da escolha desses espaços.

Vamos retomar novamente o problema primal da sessão anterior. Como vimos, a partir da Lei de Darcy, podemos escrever nosso problema como um sistema de EDPs de primeira ordem:

$$\mathbf{u} = -K\nabla p \quad \text{em } \Omega \text{ (Fluxo de Darcy)} \quad (5a)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = f \quad \text{em } \Omega \text{ (Equação de Balanço de Massa)} \quad (5b)$$

$$p = p_0 \quad \text{sobre } \Gamma_D \text{ (Contorno de Dirichlet)} \quad (5c)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = g \quad \text{sobre } \Gamma_N \text{ (Contorno de Neumann)} \quad (5d)$$

Observa-se [2] que para problemas de Neumann puro ($\Gamma = \Gamma_N$), o termo de fonte deve satisfazer a condição de compatibilidade $\int_{\Omega} f \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} g \, d\Gamma$. Com efeito, pela equação (5b),

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = f \implies \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u} \, d\Omega = \int_{\Omega} f \, d\Omega$$

Mas pelo teorema de Gauss,

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u} \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma = \int_{\partial\Omega} g \, d\Gamma$$

e o resultado segue.

Novamente, por simplicidade, vamos considerar o problema de Dirichlet homogêneo, com $\Gamma = \Gamma_D$ e $p_0 = 0$. Multiplicando a equação (5a) por $\mathbf{v} \in H(\operatorname{div}, \Omega)$ e integrando no domínio, temos que:

$$\int_{\Omega} K^{-1} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\Omega = 0, \forall \mathbf{v} \in H(\operatorname{div}, \Omega) \quad (6)$$

De forma análoga, ao multiplicar (5b) por $q \in L^2(\Omega)$ e integrar, ficamos com

$$\int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{u} \, d\Omega = \int_{\Omega} f q \, d\Omega, \forall q \in L^2(\Omega) \quad (7)$$

A junção das equações (6) e (7) define a formulação variacional mista-dual associada ao problema misto:

Definição 5.1 (Formulação Mista-Dual) *Encontrar o par $\{\mathbf{u}, p\} \in H(\operatorname{div}, \Omega) \times L^2(\Omega)$ tal que:*

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in H(\operatorname{div}, \Omega) \quad (8a)$$

$$b(\mathbf{u}, q) = L(q), \quad \forall q \in L^2(\Omega) \quad (8b)$$

cujas formas bilineares $a : H(\operatorname{div}, \Omega) \times H(\operatorname{div}, \Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, $b : H(\operatorname{div}, \Omega) \times L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ são dadas por

- $a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (K^{-1} \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} K^{-1} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega$
- $b(\mathbf{u}, q) = -(\operatorname{div} \mathbf{u}, q) = - \int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{u} \, d\Omega$

e a forma linear L é definida como

- $L(q) = -(f, q) = - \int_{\Omega} f q \, d\Omega$

Em particular, para a grandeza vetorial, as condições de contorno são essenciais, enquanto para a grandeza escalar, temos condições de contorno naturais, comportamento oposto ao da formulação primal [5]. O emprego do espaço $H(\operatorname{div}, \Omega)$ é o alicerce para garantir a conservatividade no domínio [9].

5.1 Existência e Unicidade

Primeiramente, considere o seguinte problema variacional misto geral: dados os espaços de Hilbert V e Q , com as formas bilineares $a(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ e $b(\cdot, \cdot) : V \times Q \rightarrow \mathbb{R}$, encontrar o

par $\{\mathbf{u}, p\} \in V \times Q$ tal que

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) = F(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in V \quad (9a)$$

$$b(\mathbf{u}, q) = G(q), \quad \forall q \in Q \quad (9b)$$

com F, G formas lineares pertencentes aos espaços duais de V e Q , respectivamente.

Reescrevendo esse problema através de uma formulação primal, ficamos com:

$$c((\mathbf{u}, p), (\mathbf{v}, q)) = F(\mathbf{v}) + G(q), \forall \{\mathbf{v}, q\} \in V \times Q \quad (10)$$

em que $c((\mathbf{u}, p), (\mathbf{v}, q)) = a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) + b(\mathbf{u}, q)$.

Contudo, essa formulação não será coerciva, de forma que o teorema de Lax-Milgram não será satisfeito. Nesse caso, uma condição mais restrita de estabilidade deve ser estabelecida. Isso é feito através do Teorema de Babuska-Brezzi [1, 15].

Teorema 5.1 (Teorema de Babuska-Brezzi) *Sejam V, Q espaços de Hilbert, com as respectivas normas induzidas $\|\cdot\|_V, \|\cdot\|_Q$. Considerando as formas bilineares conforme (9a) e (9b), defina o conjunto $K = \{\mathbf{v} \in V : b(\mathbf{v}, q) = 0, \forall q \in Q\}$. Suponha que:*

1. $a(\cdot, \cdot)$ e $b(\cdot, \cdot)$ são formas bilineares contínuas
2. O problema variacional de encontrar $u \in K$ tal que $a(u, \mathbf{v}) = F(\mathbf{v}), \forall \mathbf{v} \in K$ satisfaça o teorema de Lax-Milgram
3. (Condições Inf-Sup em V e Q) existe $\alpha > 0$ tal que $\inf_{q \in Q, q \neq 0} \sup_{\mathbf{v} \in V, \mathbf{v} \neq 0} \frac{b(\mathbf{v}, q)}{\|\mathbf{v}\|_V \|q\|_Q} \geq \alpha$

então o problema variacional misto terá solução única. Ainda, essa solução é numericamente estável com respeito as formas lineares F e G .

5.2 Mapeamento de Piola

Na formulação primal, utilizamos os pontos nodais como graus de liberdade, de forma que a construção de um mapeamento entre o elemento de referência \hat{E} e o elemento geométrico era dado por uma manipulação imediata, baseado na quadratura Gaussiana (utilizada no cálculo dos coeficientes da matriz de rigidez [7] obtida pelo método de Galerkin).

Na formulação mista, precisamos que a componente normal do fluxo seja contínuo entre os elementos. Nesse caso, o mapeamento entre o elemento padrão e os elementos geométricos da malha é feito através de funções vetoriais polinomiais, de forma que os graus de liberdade do interpolante em $H(\text{div}, \Omega)$ devem ser preservados. Isso é feito através do *Mapeamento de Piola* [16].

Definição 5.2 (Mapeamento de Piola) *Dado um elemento $E \in \mathcal{T}_h$, seja \hat{E} o respectivo elemento padrão. Considere $F_E : \hat{E} \rightarrow \mathbb{R}^2$ um difeomorfismo, com matriz jacobiana DF_E inversível, tal que $E = F_E(\hat{E})$. Considere $\hat{\mathbf{v}} : \hat{E} \rightarrow \mathbb{R}^2$. Nesse caso, fixando $\mathbf{x} = F_E(\hat{\mathbf{x}})$, o mapeamento de Piola $\mathbf{v} = P_{F_E}(\hat{\mathbf{v}})$ é dado por*

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\det(DF_E(\hat{\mathbf{x}}))} DF_E(\hat{\mathbf{x}}) \hat{\mathbf{v}}(\hat{\mathbf{x}})$$

Dado o elemento padrão \hat{E} com vetor unitário $\hat{\mathbf{n}}$, e considerando $\mathbf{u} = P_{F_E}(\hat{\mathbf{u}})$, $p = \hat{p} \circ F_E^{-1}$, para $\hat{p} : \hat{E} \rightarrow \mathbb{R}$, valem ainda as seguintes propriedades [16]:

1. $\int_E p \text{div } \mathbf{u} \, d\Omega = \int_{\hat{E}} \hat{p} \text{div } \hat{\mathbf{u}} \, d\hat{\Omega}$
2. $\int_{\partial E} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} p \, ds = \int_{\partial \hat{E}} \hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{n}} \hat{p} \, ds$

Para proceder com o método de Galerkin, precisamos definir os espaços $V_h \subset H(\text{div}, \Omega)$, e $Q_h \subset L^2(\Omega)$ com o mapeamento de Piola. Fixando o espaço de referência $\hat{V} \subset H(\text{div}, \hat{E})$ para o fluxo, e $\hat{Q} \subset L^2(\hat{E})$ para pressão, podemos definir os espaços de Elementos Finitos [3] como:

- $V_h = \{\mathbf{v}_h \in H(\text{div}, \Omega), \mathbf{v}_h|_E \in P_{F_E}(\hat{V}), \forall E \in \mathcal{T}_h\}$
- $Q_h = \{q_h \in L^2(\Omega), q_h|_E \in \hat{Q} \circ F_E^{-1}, \forall E \in \mathcal{T}_h\}$

5.3 Método de Galerkin Misto

Considerando os espaços V_h, Q_h definidos anteriormente, o método de Galerkin Misto [3] define o problema variacional de encontrar o par $\{\mathbf{u}_h, p_h\} \in V_h \times Q_h$ satisfazendo:

$$a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p_h) = 0, \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h \quad (11a)$$

$$b(\mathbf{u}_h, q_h) = L(q_h), \quad \forall q_h \in Q_h \quad (11b)$$

com as formas bilineares e linear definidas de forma análoga à (8a) e (8b), respectivamente.

Para que esse problema esteja bem posto, ele deve satisfazer o teorema de Babuska-Brezzi aplicado aos subespaços V_h e Q_h . Nesse caso valerá, $\forall \{v_h, q_h\} \in V_h \times Q_h$, a seguinte estimativa de erro [12]:

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{H(\text{div}, \Omega)} + \|p - p_h\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left(\inf_{v_h \in V_h} \|\mathbf{u} - v_h\|_{H(\text{div}, \Omega)} + \inf_{q_h \in Q_h} \|p - q_h\|_{L^2(\Omega)} \right)$$

com $C \in \mathbb{R}^+$.

Computacionalmente, o emprego do método de Galerkin Misto acarreta na resolução de sistemas lineares definidos a nível dos elementos [3], assumindo a forma:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^T & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_u \\ X_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D \\ E \end{pmatrix}$$

fornecendo, como desejado, as componentes do fluxo e pressão de Darcy, escritos como a combinação linear das funções de base de seus respectivos espaços. Entretanto, a montagem do sistema global acarreta numa matriz de rigidez indefinida (problema de ponto de sela) [3, 2], motivando o emprego de métodos diretos na resolução do sistema linear associado.

Mas como já mencionamos, o método de Galerkin Misto não necessariamente herda as condições Inf-Sup do problema variacional. Um exemplo, extraído de [12], é a construção de tais aproximações utilizando elementos lineares de Lagrange tanto para pressão quanto para o fluxo, que configura uma aproximação instável, de acordo com as condições do teorema de Babuska-Brezzi.

6 Espaços Estáveis para Formulações Mistas

Conforme as observações anteriores, a consideração primordial ao trabalhar com aproximações em múltiplos campos é garantir a compatibilidade entre os espaços de busca para as grandezas físicas.

Nesse viés, foram concebidos na literatura espaços que preservam a Inf-Sup estabilidade em formulações mistas de Elementos Finitos [2, 3]. Este trabalho abrangeu dois desses espaços: Raviart-Thomas (*RT*) e Brezzi-Douglas-Marini (*BDM*), que configuram aproximações

$H(\text{div}, \Omega)$ -conformes. Para malhas afins (triângulos ou retângulos), podemos classificar esses espaços, por sua vez, como completos em $H(\text{div}, \Omega)$, em que a taxa do divergente é a mesma do que a do fluxo (RT), e reduzidos em $H(\text{div}, \Omega)$, em que o divergente converge com uma taxa mais baixa (BDM). Para descrever esses espaços, será conveniente introduzir os seguintes conjuntos, definidos, sem perda de generalidade, no elemento padrão \hat{E} :

- $P_k(\hat{E}) = \{p(\mathbf{x}); p(x, y) = \sum_{i+j \leq k} a_{i,j} x^i y^j\}$, o espaço dos polinômios de grau total k ;
- $P_{k,m}(\hat{E}) = \{p(\mathbf{x}); p(x, y) = \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^m a_{i,j} x^i y^j\}$, o espaço dos polinômios de grau até k na componente x , e de grau até m na componente y .

6.1 Espaços de Raviart-Thomas

Os Espaços de Raviart-Thomas são os espaços $H(\text{div}, \Omega)$ -conformes mais elementares. Introduzidos em 1977 por P. A. Raviart e J. M. Thomas [13], eles foram concebidos, a priori, para malhas triangulares, sendo definidos como:

Definição 6.1 (Espaços RT_k em triângulos) Dado o elemento padrão triangular $\hat{E} \in \mathbb{R}^2$, os espaços locais RT_k , com $k \geq 0$ são dados por

$$RT_k(\hat{E}) = [P_k(\hat{E})]^2 + \mathbf{x}P_k(\hat{E})$$

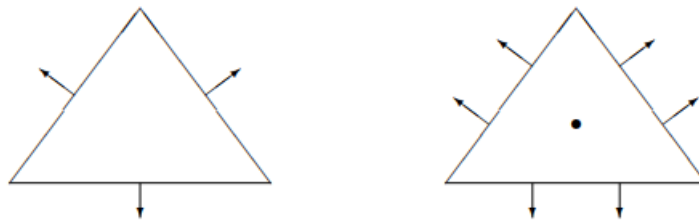


Figura 3: Graus de Liberdade dos Elementos RT_0 e RT_1 em malhas triangulares. Imagem extraída de [17]

Observe que os graus de liberdade são definidos principalmente pelas arestas do polígono, e não mais pelos seus nós, uma vez que devemos considerar a continuidade do vetor normal do

fluxo entre os elementos. Contudo, exigimos apenas que a pressão esteja em $L^2(\Omega)$, admitindo componentes descontínuas.

Para malhas retangulares, os espaços RT são definidos da seguinte forma:

Definição 6.2 (Espaços RT_k em retângulos) *Seja $\hat{E} \in \mathbb{R}^2$ o elemento padrão retangular. Os espaços locais $RT_k, k \geq 0$ são definidos, para o fluxo, como o espaço:*

$$V_{RT_k}(\hat{E}) = P_{k+1,k}(\hat{E}) \times P_{k,k+1}(\hat{E})$$

Já para a pressão, considera-se

$$Q_{RT_k}(\hat{E}) = P_{k,k}(\hat{E})$$

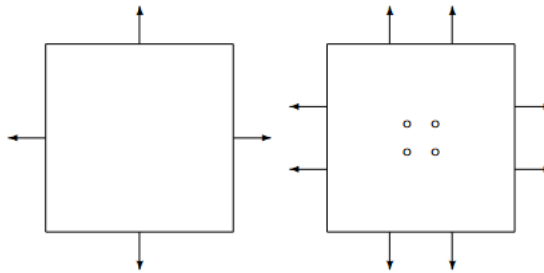


Figura 4: Graus de Liberdade dos Elementos RT_0 e RT_1 em malhas retangulares. Imagem extraída de [17]

Como os espaços RT_k são completos em $H(\text{div}, \Omega)$, então para os tipos de malhas aqui descritas, temos os seguintes resultados de convergência [3]:

Teorema 6.1 (Ordens de convergência nos espaços RT_k) *Seja \mathcal{T}_h uma malha retangular ou triangular de Elementos Finitos. Então as taxas de convergência para as grandezas nos espaços RT_k são dadas por:*

- $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\| \leq Ch^{k+1} \|\mathbf{u}\|_{k+1}$
- $\|\text{div } \mathbf{u} - \text{div } \mathbf{u}_h\| \leq Ch^{k+1} \|\text{div } \mathbf{u}\|_{k+1}$
- $\|p - p_h\| \leq Ch^{k+1} \|p\|_{k+1}$

Finalmente, para a composição global dos espaços RT_k empregados no método de Galerkin Misto, obtemos, através do mapeamento de Piola:

- $V_h = \{v \in H(\text{div}, \Omega), v|_E \in V_{RT_k}(E), \forall E \in \mathcal{T}_h\}$
- $Q_h = \{q \in L^2(\Omega), q|_E \in Q_{RT_k}(E), \forall E \in \mathcal{T}_h\}$

6.2 Espaços de Brezzi-Douglas-Marini

Esses espaços foram apresentados em 1985 por F. Brezzi, J. Douglas e D. L. Marini [14], sendo de menor dimensão que os espaços RT_k (menos graus de liberdade), reduzindo seu custo computacional.

Dado um elemento $E \in \mathcal{T}_h$, com o respectivo elemento padrão \hat{E} , fixemos $P_k(\hat{E})^2$ o conjunto dos polinômios de grau k em todas as componentes [3]. Para malhas triangulares, os espaços BDM são definidos como:

Definição 6.3 (Espaços BDM_k em triângulos) *Seja o elemento padrão triangular $\hat{E} \in \mathbb{R}^2$. Os espaços locais BDM_k , com $k \geq 1$, consistem em utilizar, para o fluxo:*

$$V_{BDM_k}(\hat{E}) = P_k(\hat{E})^2$$

E, para a pressão, considera-se

$$Q_{BDM_k} = P_{k-1}(\hat{E})$$

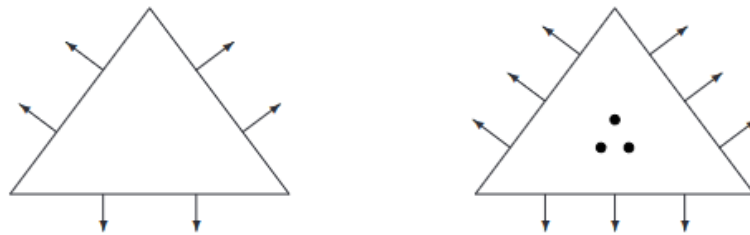


Figura 5: Graus de Liberdade dos Elementos BDM_1 e BDM_2 em malhas triangulares. Imagem extraída de [17]

Fixemos também o operador rotacional que mapeia escalares a vetores em \mathbb{R}^2 , conforme [8]:

$$\text{curl } w = \left(\frac{\partial w}{\partial y}, -\frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

Destarte, para malhas retangulares, podemos definir esses espaços como:

Definição 6.4 (Espaços BDM_k em retângulos) Considere $\hat{E} \in \mathbb{R}^2$ o elemento padrão retangular. Os espaços locais BDM_k , $k \geq 1$, consistem em definir, para o fluxo,

$$V_{BDM_k}(\hat{E}) = P_k(\hat{E})^2 \oplus \text{span}\{\text{curl}(x^{k+1}y), \text{curl}(xy^{k+1})\}$$

Já para a pressão, considera-se

$$Q_{BDM_k}(\hat{E}) = P_{k,k}(\hat{E})$$

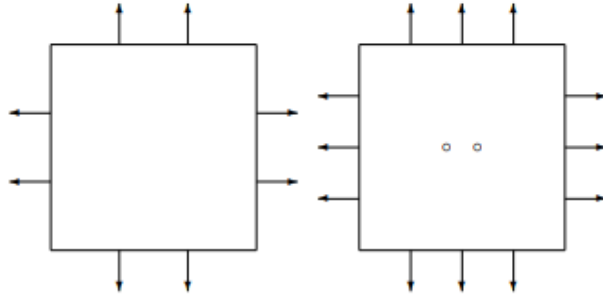


Figura 6: Graus de Liberdade dos Elementos BDM_1 e BDM_2 em malhas retangulares. Imagem extraída de [17]

Como os espaços BDM_k são reduzidos em $H(\text{div}, \Omega)$ [8], valem as seguintes taxas de convergência [3]:

Teorema 6.2 (Ordens de convergência nos espaços BDM_k) Seja \mathcal{T}_h uma malha retangular ou triangular de Elementos Finitos. Então as taxas de convergência para as grandezas nos espaços BDM_k são dadas por:

- $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\| \leq Ch^{k+1} \|\mathbf{u}\|_{k+1}$
- $\|\text{div } \mathbf{u} - \text{div } \mathbf{u}_h\| \leq Ch^k \|\text{div } \mathbf{u}\|_k$
- $\|p - p_h\| \leq Ch^k \|p\|_k$

Uma das vantagens desses espaços é, além do menor número de graus de liberdade, permitir aproximações em ordens distintas para as grandezas.

Utilizando o mapeamento de Piola entre o elemento padrão e geométrico, temos os espaços globais

- $V_h = \{v \in H(\text{div}, \Omega), v|_E \in V_{BDM_k}(E), \forall E \in \mathcal{T}_h\}$
- $Q_h = \{q \in L^2(\Omega), q|_E \in Q_{BDM_k}(E), \forall E \in \mathcal{T}_h\}$

7 Experimentos Numéricos

Conforme os resultados aqui apresentados, vamos realizar um exemplo numérico de um problema de Darcy com solução analítica conhecida para as grandezas físicas, sob o escopo de comparar as normas dos erros do Método de Galerkin Misto e as taxas de convergência para os espaços Inf-Sup estáveis estudados. Vamos trabalhar com duas malhas \mathcal{T}_h de Elementos Finitos afins. O mapeamento entre o elemento de referência e os geométricos foi feito com o mapeamento de Piola.

Consideremos o problema advectivo elíptico definido em $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$:

$$\begin{cases} \mathbf{u} = -\nabla p \text{ em } \Omega \\ \text{div } \mathbf{u} = 8\pi^2 \text{sen}(2\pi x) \text{sen}(2\pi y) \text{ em } \Omega \\ p = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (12)$$

As soluções analíticas para pressão e fluxo, respectivamente, são dadas por $p(x, y) = \text{sen}(2\pi x) \text{sen}(2\pi y)$, e $\mathbf{u}(x, y) = -[2\pi \cos(2\pi x) \text{sen}(2\pi y), 2\pi \text{sen}(2\pi x) \cos(2\pi y)]^T$. Observe-mos os resultados obtidos para norma do erro em $L^2(\Omega)$ para o fluxo, divergente e pressão, para diferentes tamanhos N de malha.

7.1 Malha 1

Vamos trabalhar com a malha de Elementos Finitos triangular dada a seguir:

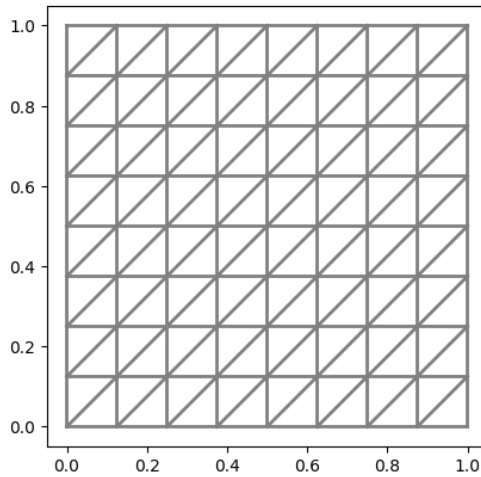


Figura 7: Malha de Elementos Finitos triangular - Figura do autor.

Tabela 1: Erros e taxas de convergência para espaços RT_0

N	$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ $		$\ \nabla \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\ $		$\ p - p_h\ $	
	erro	taxa	erro	taxa	erro	taxa
4	2.01e-00	—	19.28e-00	—	2.49e-01	—
8	1.00e-00	0.99	10.19e-00	0.92	1.29e-01	0.94
16	5.03e-01	1.00	5.17e-00	0.98	6.52e-02	0.98
32	2.51e-01	1.00	2.59e-00	0.99	3.27e-02	0.99
64	1.26e-01	1.00	1.30e-00	0.99	1.63e-02	0.99

Tabela 2: Erros e taxas de convergência para espaços RT_1

N	$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ $		$\ \nabla \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\ $		$\ p - p_h\ $	
	erro	taxa	erro	taxa	erro	taxa
4	4.89e-01	—	6.12e-00	—	7.66e-02	—
8	1.14e-01	2.09	1.56e-00	1.97	1.95e-02	1.96
16	2.82e-02	2.01	3.93e-01	1.99	4.95e-03	1.98
32	7.05e-03	2.00	9.84e-02	1.99	1.24e-03	1.99
64	1.76e-03	2.00	2.46e-02	2.00	3.11e-04	2.00

Tabela 3: Erros e taxas de convergência para espaços RT_2

N	$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ $		$\ \nabla \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\ $		$\ p - p_h\ $	
	erro	taxa	erro	taxa	erro	taxa
4	1.68e-01	—	2.50e-00	—	2.28e-02	—
8	1.47e-02	3.51	3.38e-01	2.89	2.24e-03	3.22
16	1.42e-03	3.37	4.32e-02	2.97	2.85e-04	3.10
32	1.60e-04	3.15	5.43e-03	2.99	3.50e-05	3.03
64	1.19e-05	3.04	6.79e-04	2.99	4.00e-06	3.00

Tabela 4: Erros e taxas de convergência para espaços BDM_1

N	$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ $		$\ \nabla \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\ $		$\ p - p_h\ $	
	erro	taxa	erro	taxa	erro	taxa
4	1.31e-00	—	19.22e-00	—	2.97e-01	—
8	3.78e-01	1.79	10.14e-00	0.92	1.32e-01	0.98
16	9.83e-02	1.94	5.15e-00	0.98	6.57e-02	1.01
32	2.48e-02	1.98	2.58e-00	0.99	3.28e-02	1.00
64	6.22e-03	1.99	1.29e-00	1.00	1.63e-02	1.00

Tabela 5: Erros e taxas de convergência para espaços BDM_2

N	$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ $		$\ \nabla \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\ $		$\ p - p_h\ $	
	erro	taxa	erro	taxa	erro	taxa
4	2.87e-01	—	6.11e-00	—	7.75e-02	—
8	3.26e-02	3.12	1.56e-00	1.97	1.95e-02	2.00
16	3.89e-03	3.07	3.92e-01	1.99	4.95e-03	1.98
32	4.79e-04	3.02	9.82e-02	1.99	1.24e-03	1.99
64	6.00e-05	3.00	2.45e-02	2.00	3.11e-04	2.00

Fica evidente que o espaço RT_0 , apesar de possuir menor custo computacional, apresenta os maiores erros para as grandezas de interesse. No entanto, como os espaços RT_k são completos em $H(\text{div}, \Omega)$, podemos notar que as grandezas convergem com a mesma taxa de $O(h^{k+1})$. Os espaços BDM_k , por sua vez, apresentam taxas mais baixas no divergente e na pressão, sendo reduzidos em $H(\text{div}, \Omega)$. Porém, a convergência do fluxo, que é geralmente a grandeza de maior interesse, foi semelhante entre os espaços de mesma ordem, destacando os espaços BDM_k por exigirem menos graus de liberdade.

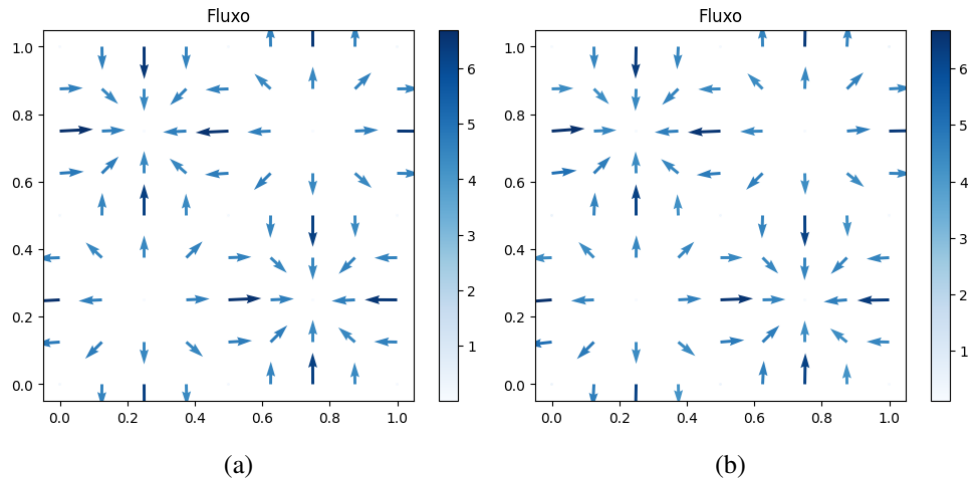


Figura 8: Solução de Elementos Finitos para o fluxo com $N = 8$, em (a) RT_1 , (b) BDM_1 - Figura do autor

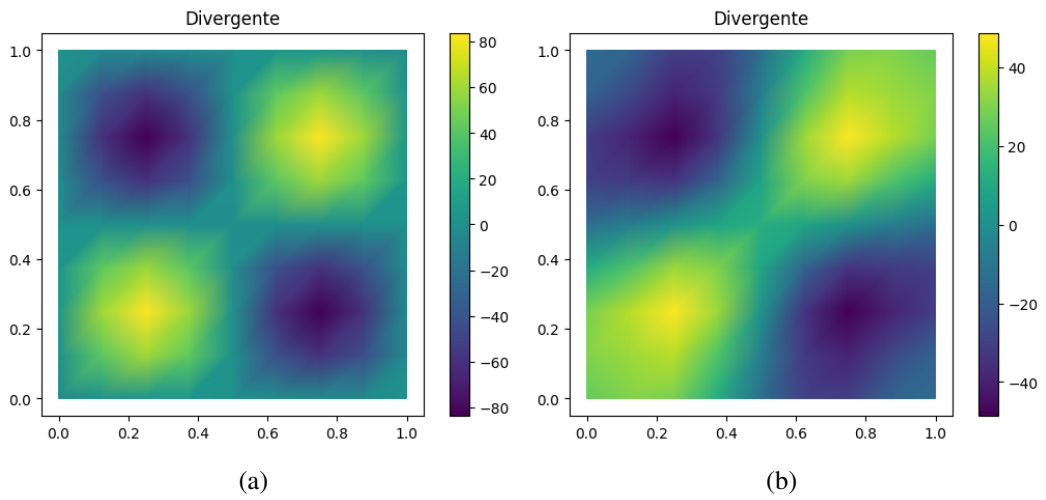


Figura 9: Solução de Elementos Finitos para o divergente com $N = 8$, em (a) RT_1 , (b) BDM_1 - Figura do autor

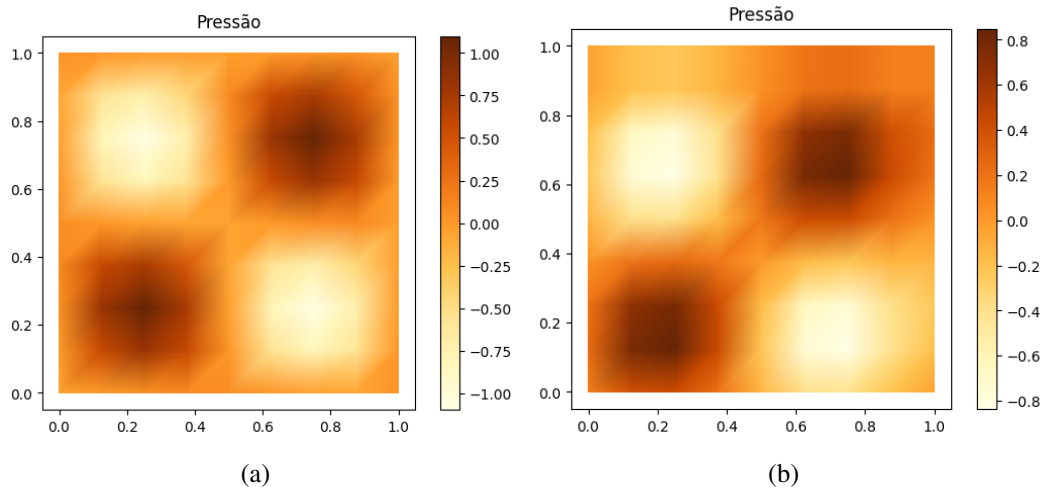


Figura 10: Solução de Elementos Finitos para a pressão com $N = 8$, em (a) RT_1 , (b) BDM_1 - Figura do autor

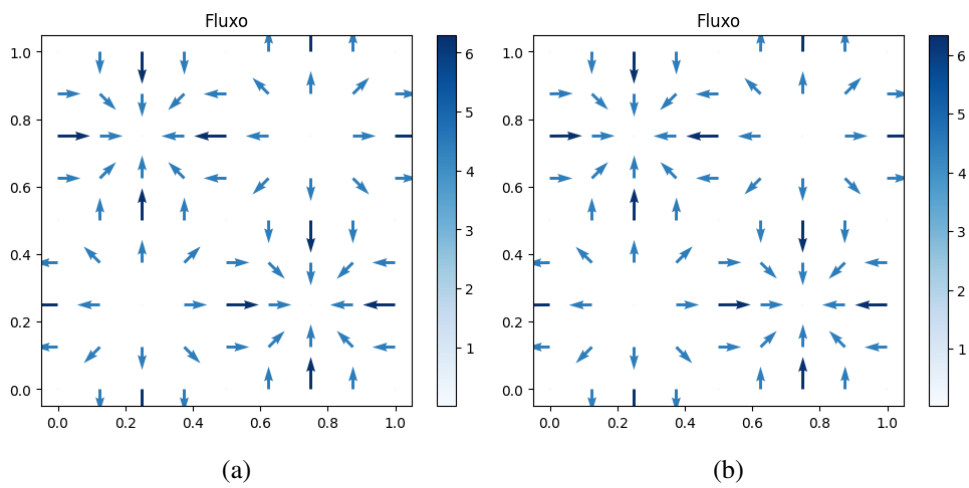


Figura 11: Solução de Elementos Finitos para o fluxo com $N = 8$, em (a) RT_2 , (b) BDM_2 - Figura do autor

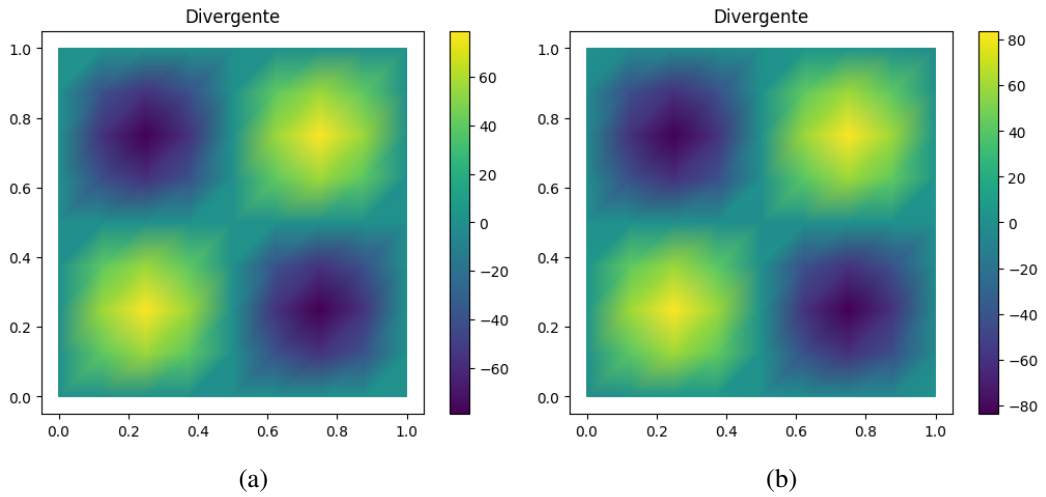


Figura 12: Solução de Elementos Finitos para o divergente com $N = 8$, em (a) RT_2 , (b) BDM_2 - Figura do autor

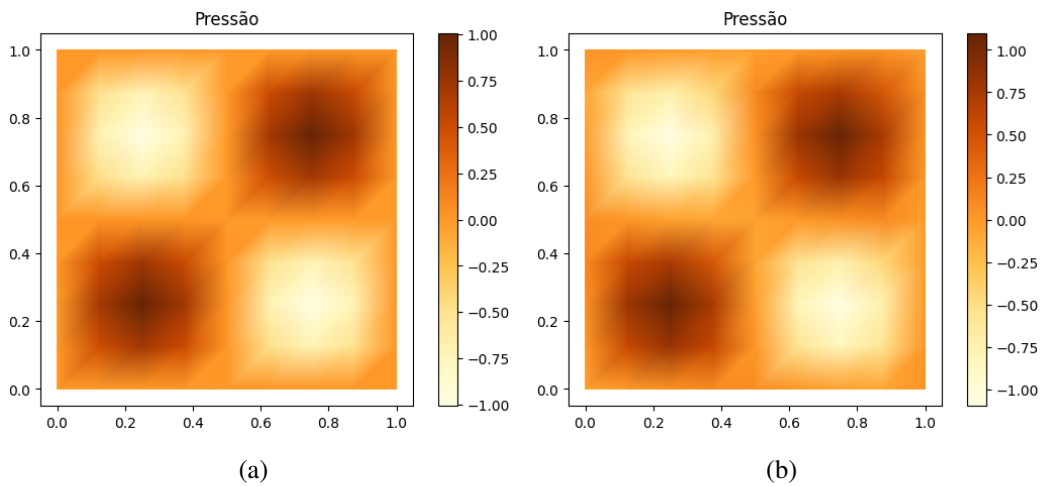


Figura 13: Solução de Elementos Finitos para a pressão com $N = 8$, em (a) RT_2 , (b) BDM_2 - Figura do autor

7.2 Malha 2

Para finalizar, vamos modificar a discretização anterior, adicionando mais graus de liberdade em cada elemento, sob o escopo de comparar a magnitude dos erros. Nossa malha agora terá a seguinte forma:

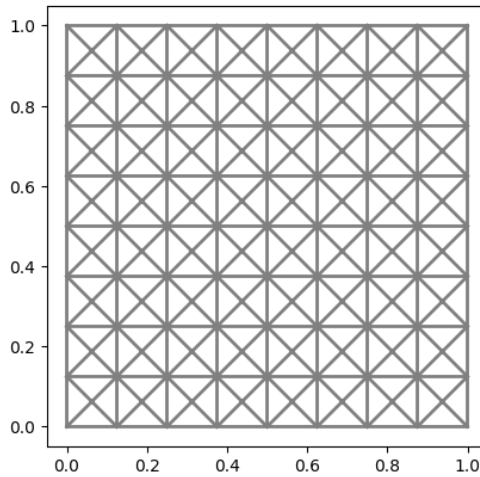


Figura 14: Malha de Elementos Finitos modificada - Figura do autor.

Os resultados obtidos para os diferentes espaços são dados a seguir:

Tabela 6: Erros e taxas de convergência para espaços RT_0

N	$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ $		$\ \nabla \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\ $		$\ p - p_h\ $	
	erro	taxa	erro	taxa	erro	taxa
4	1.96e-00	—	14.31e-00	—	1.83e-01	—
8	1.00e-00	0.97	7.32e-00	0.96	9.22e-02	0.99
16	5.00e-01	0.99	3.68e-00	0.99	4.62e-02	0.99
32	2.51e-01	1.00	1.84e-00	1.00	2.31e-02	0.99
64	1.25e-01	1.00	9.19e-01	0.99	1.12e-02	0.99

Tabela 7: Erros e taxas de convergência para espaços RT_1

N	$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ $		$\ \nabla \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\ $		$\ p - p_h\ $	
	erro	taxa	erro	taxa	erro	taxa
4	2.82e-01	—	2.83e-00	—	3.50e-02	—
8	7.37e-02	1.93	7.01e-01	2.00	8.87e-03	1.98
16	1.86e-02	1.98	1.76e-01	2.00	2.21e-03	1.99
32	4.68e-03	1.99	4.41e-02	1.99	5.56e-04	2.00
64	1.17e-03	2.00	1.11e-02	2.00	1.39e-04	2.00

Tabela 8: Erros e taxas de convergência para espaços RT_2

N	$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ $		$\ \nabla \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\ $		$\ p - p_h\ $	
	erro	taxa	erro	taxa	erro	taxa
4	5.01e-02	—	8.51e-01	—	5.47e-03	—
8	4.94e-03	3.34	1.09e-01	2.96	6.06e-04	3.17
16	5.69e-04	3.11	1.37e-02	2.99	7.31e-05	3.05
32	7.01e-05	3.02	1.71e-03	3.00	9.00e-06	3.01
64	8.89e-06	3.00	2.15e-04	3.00	1.00e-06	3.00

Tabela 9: Erros e taxas de convergência para espaços BDM_1

N	$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ $		$\ \nabla \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\ $		$\ p - p_h\ $	
	erro	taxa	erro	taxa	erro	taxa
4	7.18e-01	—	14.21e-00	—	1.88e-01	—
8	1.83e-01	1.97	7.25e-00	0.96	9.34e-02	0.99
16	4.59e-02	1.99	3.64e-00	0.99	4.63e-02	1.00
32	1.15e-02	2.00	1.83e-00	0.99	2.31e-02	1.00
64	2.87e-03	2.01	9.13e-01	1.00	1.15e-02	1.00

Tabela 10: Erros e taxas de convergência para espaços BDM_2

N	$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ $		$\ \nabla \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\ $		$\ p - p_h\ $	
	erro	taxa	erro	taxa	erro	taxa
4	7.91e-02	—	2.82e-00	—	3.49e-02	—
8	9.86e-03	3.00	7.03e-01	1.00	8.84e-03	1.98
16	1.23e-03	2.99	1.75e-01	1.99	2.23e-03	2.00
32	1.55e-04	3.00	4.39e-02	2.00	5.56e-04	1.99
64	1.92e-05	3.00	1.09e-02	2.00	1.40e-04	2.00

A modificação para a malha \mathcal{T}_h resultou em erros de menor magnitude para a pressão e para o divergente, principalmente, mesmo que a taxa permaneça inalterada. Com efeito, veremos que os plots para essas grandezas, em particular nos espaços BDM , em virtude do maior número de graus de liberdade, se aproximam consideravelmente da solução analítica. É claro, porém, que esse aumento é concomitante a um maior custo computacional.

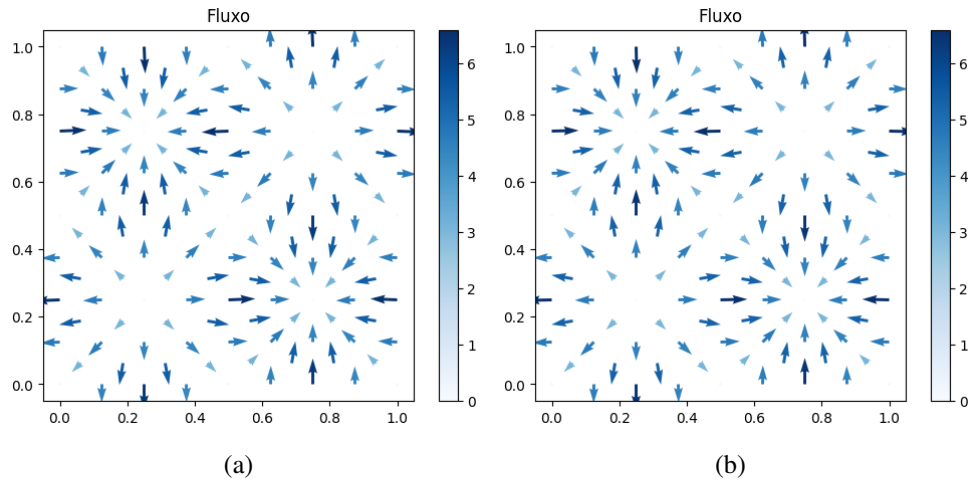


Figura 15: Solução de Elementos Finitos para o fluxo com $N = 8$, em (a) RT_1 , (b) BDM_1 - Figura do autor

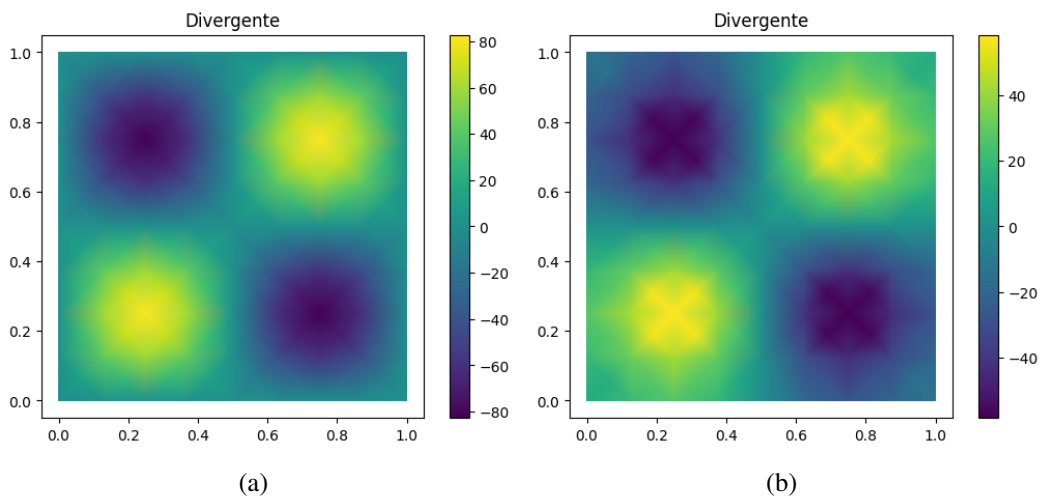


Figura 16: Solução de Elementos Finitos para o divergente com $N = 8$, em (a) RT_1 , (b) BDM_1 - Figura do autor

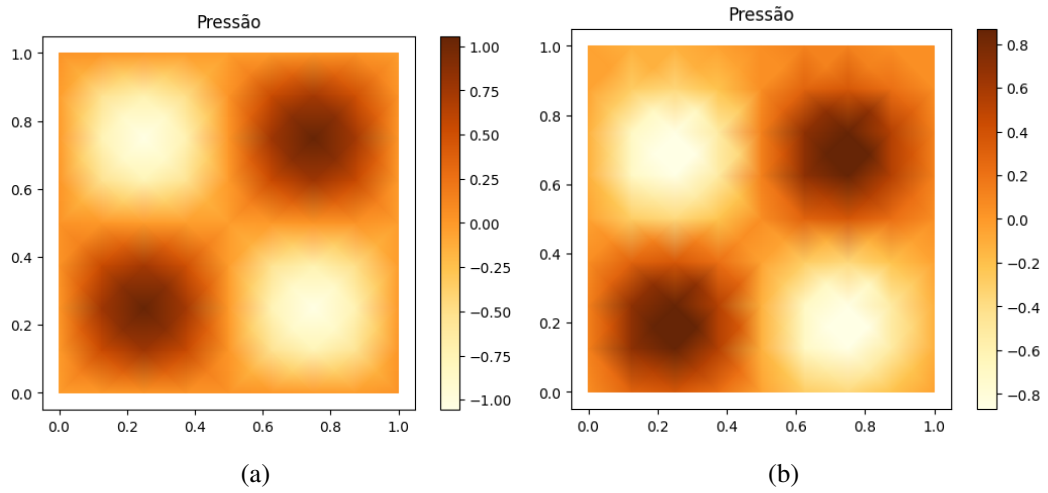


Figura 17: Solução de Elementos Finitos para a pressão com $N = 8$, em (a) RT_1 , (b) BDM_1 - Figura do autor

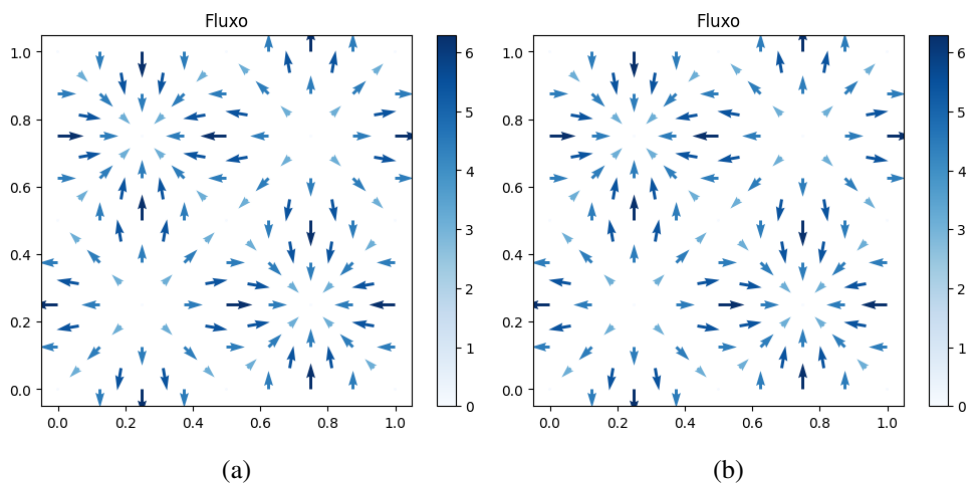


Figura 18: Solução de Elementos Finitos para o fluxo com $N = 8$, em (a) RT_2 , (b) BDM_2 - Figura do autor

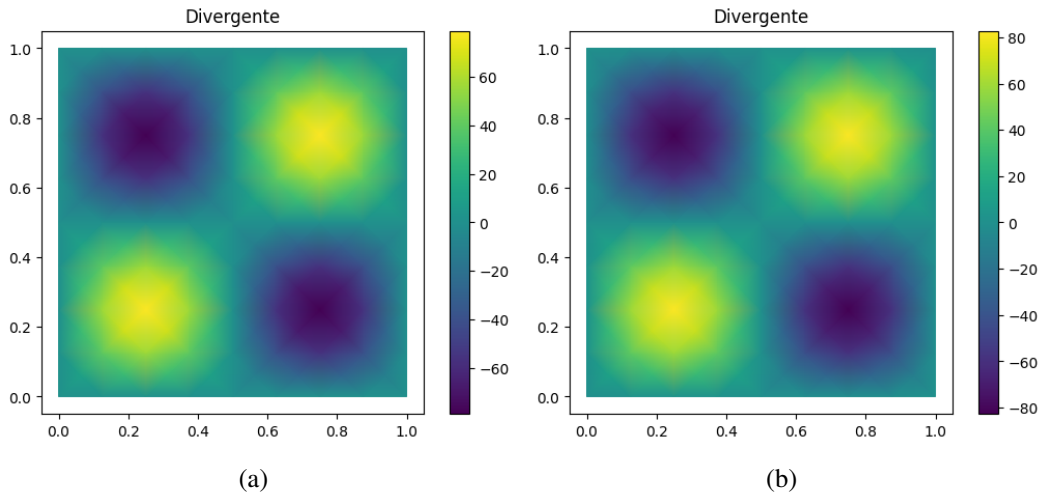


Figura 19: Solução de Elementos Finitos para o divergente com $N = 8$, em (a) RT_2 , (b) BDM_2 - Figura do autor

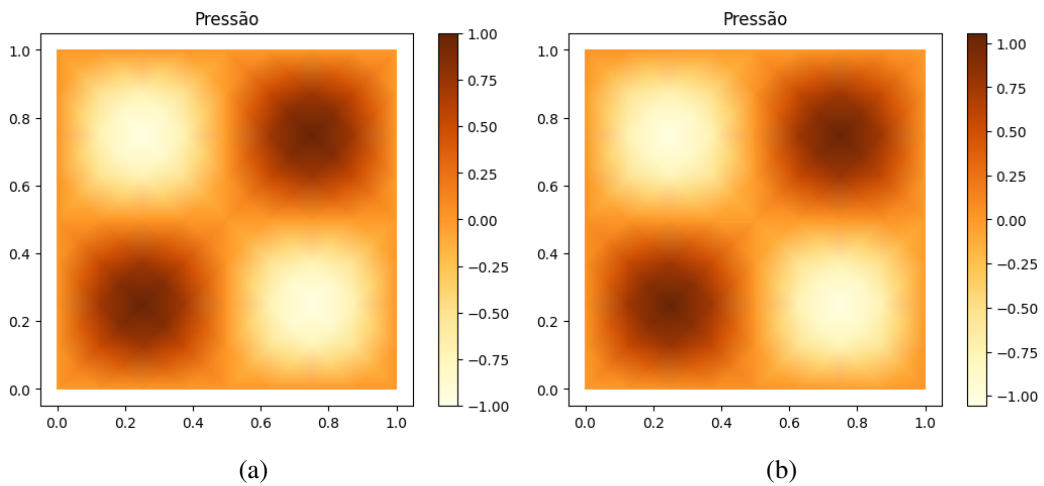


Figura 20: Solução de Elementos Finitos para a pressão com $N = 8$, em (a) RT_2 , (b) BDM_2 - Figura do autor

8 Conclusões

Esse projeto compreendeu o estudo profundo do Método dos Elementos Finitos, com ênfase na aplicação em equações diferenciais de natureza elíptica, sobretudo o Problema de Darcy. Analiticamente, considerou-se os resultados teóricos do método, abrangendo as condições de existência e unicidade da solução numérica de equações elípticas, e obtenção de estabilidade e de taxas de convergência, culminando no teorema de Babuska-Brezzi. Em seguida, introduziu-se dois diferentes espaços Inf-Sup estáveis para formulações mistas (RT e BDM), bem como seus

comportamentos numéricos para diferentes malhas.

Do ponto de vista computacional, as implementações realizadas ilustram satisfatoriamente os resultados de convergência em malhas afins, corroborando na eficiência do emprego de formulações mistas em EDPs elípticas. As perspectivas mais imediatas de desdobramento do projeto são implementar os espaços aqui estudados em malhas generalizadas (não afins). Nesse caso, as taxas de convergência tanto para os espaços RT_k quanto BDM_k , em virtude do mapeamento de Piola, podem sofrer sérias dificuldades [3], motivando o emprego de espaços com mais graus de liberdade (como os de Arnold-Boffi-Falk [16]), ou de espaços com conjuntos de vetores auxiliares, que limitam a atuação desse mapeamento (como os espaços de Arbogast-Correa [8]).

Referências

- [1] Vidar Thomée. “From Finite Differences to Finite Elements. A Short History of Numerical Analysis of Partial Differential Equations”. Em: *Department of Mathematics, Chalmers University of Technology* (1999).
- [2] Maicon Ribeiro Correa. “Métodos de Elementos Finitos Estabilizados para Escoamentos de Darcy e de Stokes-Darcy Acoplados”. Em: *Laboratório Nacional de Computação Científica - LNCC* (2006).
- [3] Margui Angélica Romero Pinedo. “Métodos de Elementos Finitos Mistos-Híbridos para um Problema Elíptico Não Linear em Malhas Quadrilaterais”. Em: *Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica - IMECC, Unicamp* (2016).
- [4] Joa Weber. *Introduction to Sobolev Spaces*. Vol. 1. Springer Briefs in Mathematics, 2014.
- [5] Gabriel N. Gatica. *A Simple Introduction to the Mixed Finite Element Method - Theory and Applications*. Springer Briefs in Mathematics, 2018.
- [6] Daniele Boffi, Franco Brezzi e Michel Fortin. *Mixed Finite Element Methods and Applications*. Springer Series in Computational Mathematics, 2010.
- [7] Lucas Silvestrini Nicodemo. “Resolução de Equações Diferenciais Parciais com o Método dos Elementos Finitos”. Em: *Departamento de Matemática Aplicada - IMECC, Unicamp* (2024).

- [8] Todd Arbogast e Maicon Ribeiro Correa. “Two Families of H(div) Mixed Finite Elements on Quadrilaterals of Minimal Dimension”. Em: *Society for Industrial and Applied Mathematics* (2016).
- [9] Maria Victória Paulino de Souza. “Implementation of Multiscale Methods for Flow in Porous Media on the FEniCS Finite Element Platform”. Em: *Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC - USP* (2023).
- [10] Yongshuai Wang e Yi Qin. “Second-order Partitioned Method and Adaptive Time Step Algorithms for the Nonstationary Stokes-Darcy Equations”. Em: *Numerical Algorithms - Springer* (2023).
- [11] Mats G. Larson e Fredrik Bengzon. *The Finite Element Method: Theory, Implementation and Applications*. Springer, 1981.
- [12] Patrick E. Ferrel. *Finite Element Method for PDEs*. Oxford University, 2021.
- [13] P.A. Raviart e J.M. Thomas. *A Mixed Finite Element Method for 2nd Order Elliptic Problems*. Springer, 1977.
- [14] Franco Brezzi, Jim Douglas e Donatella L. Marini. “Two Families of Mixed Finite Elements for Second Order Elliptic Problems”. Em: *Springer - Numerische Mathematik* (1985).
- [15] Franco Brezzi e Klaus Jurgen Bathe. *A discourse on the Stability Conditions for Mixed Finite Element Formulations*. Computer Methods in Applied Mechanics e Engineering, 1990.
- [16] Douglas N. Arnold, Danielli Boffi e Richard S. Falk. “Quadrilateral H(div) Finite Elements”. Em: *SIAM J. Numerical Analysis - Society for Industrial and Applied Mathematics* (2005).
- [17] Ricardo G. Duran. *Mixed Finite Element Methods*. Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas, Universidad de Buenos Aires, 2018.