UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA

Eduardo Aparecido dos Santos Galvão Saito

Aplicações de Topologia em Resultados de Análise e em Computação

Campinas
24/06/2024

Eduardo Aparecido dos Santos Galvão Saito

Aplicações de Topologia em Resultados de Análise e em Computação

Monografia apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos para obtenção de créditos na disciplina Projeto Supervisionado, MS877.

Orientador: Prof. Dr. João Vítor da Silva

Campinas
2024

"Teoria atrai a prática assim como o imã atrai ferro"

Carl Friedrich Gauss

Agradecimentos

Agradeço a todos os amigos que gentilmente se dispuseram a ler a presente monografia e a dar sugestões de melhorias e, principalmente, a meu orientador, Prof. Dr. João Vítor da Silva, que auxiliou na ideia do projeto e forneceu as referências necessárias para que tudo fosse possível.

Resumo

O relatório a seguir é resultado do desenvolvimento de um projeto supervisionado, na área de topologia e Espaços Métricos, durante o primeiro semestre de 2024, através da disciplina correspondente da Unicamp, MS877. Nesse contexto, primeiro são apresentadas as principais definições e resultados dentro de Topologia e Espaços Métricos bem como a poderosa ferramenta do Teorema do Ponto Fixo de Banach. Na sequência, são desenvolvidas em detalhes três aplicações: o Teorema da Existência e Unicidade de EDO's, Equações Integrais e, por fim, como aplicação computacional, mostra-se o modelo matemático do buscador do Google e por que ele é tão eficiente.

Palavras-chave: Métrica, Espaço Métrico, Homeomorfismo e Ponto Fixo.

Abstract

The following report is the result of the development of a supervised project, in the area of topology and metric spaces, during the first semester of 2024, through the corresponding discipline at Unicamp, MS877. In this context, first the main definitions and results within Topology and Metric Spaces are shown as well as the powerful tool of Banach's Fixed Point Theorem. Next, three application are developed in details: the Existence and Uniqueness Theorem of ODE's, Integral Equations and, finally, as a computational application, the mathematical model of the Google search engine is shown and why it is so efficient.

Key words: Metric, Metric Space, Homeomorphism and Fixed Point.

Conteúdo

1 Introdução

A **Topologia** (do grego, *topos*, "lugar", e *logos*, "estudo") é considerada uma extensão da geometria e tem como objeto de estudo os espaços topológicos.

A resolução do problema das sete pontes de Königsberg por Euler em 1736, figura 1, é considerado como um dos primeiros resultados topológicos. Mais tarde, introduziu-se a noção de Espaços Métricos, que são casos específicos, mas muito importantes, de um conceito mais geral: os Espaços Topológicos. No que segue, vamos desenvolver conceitos e resultados relacionados a Espaços Métricos e explorar suas aplicações.

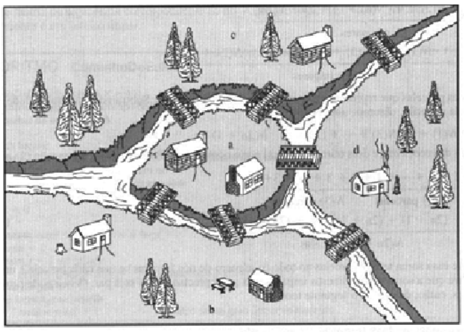

Figura 1: Problema das sete pontes de Königsberg. Consistia em atravessar todas as pontes sem repetir nenhuma.

2 Conceitos Iniciais de Topologia e Espaços Métricos

Primeiro, antes de introduzir o espaço métrico propriamente dito, vamos definir o que é uma métrica em um conjunto. Todas as definições e teoremas deste capítulo foram retiradas da referência [6].

Definição 2.1. *Uma métrica em um conjunto M é uma função $d : M \times M \to \mathbb{R}$ que associa a cada par ordenado (x, y), com $x, y \in M$, o valor $d(x, y)$, chamado de distância de x a y e satisfaz as seguintes propriedades.*

1. $d(x, x) = 0$;
2. *Se* $x \neq y$, *então* $d(x, y) > 0$; *(Positividade)*
3. $d(x, y) = d(y, x)$; *(Simetria)*
4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ *(Sub-aditividade)*

O postulado 4 também é chamado de *desigualdade do triângulo* ou *desigualdade triangular*.

Podemos ainda ter o que chamamos de *métrica induzida*. Por exemplo, seja $d : M \times M \to \mathbb{R}$ uma métrica e $S \subset M$. A restrição de d a $S \times S$ é chamada métrica induzida no subespaço S.

Definição 2.2. *Um espaço métrico é um par (M, d), em que M é um conjunto, e d é uma métrica definida em M.*

Muitas vezes é comum se referir a um espaço métrico somente pelo conjunto M, deixando a métrica subentendida. Além disso, os elementos de M serão chamados de pontos, embora possam representar vetores, matrizes, funções e etc.

Exemplos de métricas e espaços métricos

- **Métrica zero-um:** Qualquer conjunto M pode se tornar um espaço métrico ao colocar a métrica $d : M \times M \to \mathbb{R}$ definida por $d(x, x) = 0$ e $d(x, y) = 1$ se $x \neq y$. Tal métrica é conhecida como *métrica zero-um*.

- **Métrica usual da reta:** Se M for o conjunto dos números reais, a métrica mais utilizada é dada por $d(x, y) = |x - y|$. As propriedades 1 a 4 das métricas seguem diretamente das propriedades do valor absoluto.

- **Espaço Euclidiano:** Há pelo menos três maneiras intuitivas de definirmos uma métrica em $\mathbb{R}^n$, que é o conjunto das n-uplas $(x_1, \ldots, x_n)$ onde cada entrada x_i é um número real. Dados dois pontos $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$, podemos definir a distância de x a y a partir das seguintes métricas:

  1. $d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} = \left[\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\right]^{1/2}$ **(Norma Euclidiana)**
  2. $d'(x, y) = |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n| = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$ **(Norma da Soma)**
  3. $d''(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, \ldots, |x_n - y_n|\} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$ **(Norma do Máximo)**

- **Espaço de funções:** Vamos denotar por $\mathscr{B}(X; \mathbb{R})$ o conjunto das funções limitadas $f : X \to \mathbb{R}$. Uma possível métrica para esse espaço é a que se encontra abaixo e é chamada por *métrica da convergência uniforme* ou *métrica do supremo*.

$$d(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$$

  Geometricamente, a métrica definida acima representa o comprimento do maior segmento de reta que podemos traçar ligando uma função à outra. Veja a figura 2 abaixo.

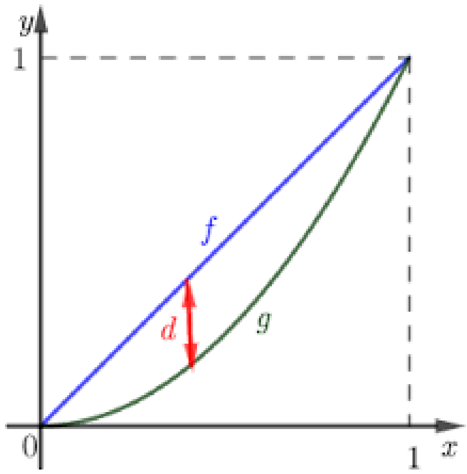

Figura 2: Distância entre duas funções f e g na métrica do sup

Podemos agora falar de **Espaços Vetoriais Normados**. Começaremos com a definição de norma abaixo.

Definição 2.3. *A norma é uma função real $|| \cdot || : E \to \mathbb{R}$, que associa a cada $x \in E$ o valor $||x||$, dito norma de x, e satisfaz as três seguintes propriedades:*

1. *Se* $x \neq 0$, *então* $||x|| > 0$; *(Positividade)*

2. $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$; *(Homogeneidade)*

3. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ *(Desigualdade Triangular)*

Com as três propriedades, é possível mostrar que $||x|| > 0$ se, e somente se, $x \neq 0$. Um **Espaço Vetorial Normado** é um par $(E, || \cdot ||)$ com E sendo um espaço vetorial dotado de uma norma $|| \cdot ||$.

Exemplos de espaços vetoriais normados

- **Espaço Euclidiano:** Em $\mathbb{R}^n$ é possível definir as seguintes normas, a fim de transformá-lo em um espaço vetorial normado:

  1. $||x||_{\mathbb{R}^n} = \left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right]^{1/2}$ **(Norma Euclidiana)**
  2. $||x||' = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ **(Norma da Soma)**
  3. $||x||'' = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ **(Norma do Máximo)**

- **Espaço de funções:** Em $\mathscr{B}(X; \mathbb{R})$, como definido anteriormente, podemos introduzir a norma $|| \cdot || : \mathscr{B}(X; \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ como abaixo

$$||f|| = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

  Utilizamos o símbolo $|| \cdot ||$ com duas barras para não confundir com o valor absoluto da função $|f|$.

Todo espaço vetorial normado $(E, || \cdot ||)$ torna-se um espaço métrico por meio da definição $d(x, y) = ||x - y||$. A métrica d é dita proveniente da norma $|| \cdot ||$. Como exemplo, as métricas d, d' e d'' são provenientes das normas $|| \cdot ||, || \cdot ||'$ e $|| \cdot ||''$ respectivamente, assim como a métrica do supremo é proveniente da norma que acabamos de definir acima.

Também temos o conceito espaços vetoriais com **produto interno**.

Definição 2.4. *Seja* E *um espaço vetorial. Um produto interno em* E *é uma função* $\langle \; , \; \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$ *que associa a cada par de vetores* $x, y \in E$ *o valor* $\langle x, y \rangle$, *chamado de produto interno de* x *com* y, *e que satisfaz as seguintes propriedades abaixo para* $x, x', y \in E$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$ *arbitrários.*

1. $\langle x + x', y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x', y \rangle$; *(Linearidade)*

2. $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$;

3. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$; *(Simetria)*

4. $x \neq 0 \Rightarrow \langle x, x \rangle > 0$ *(Positividade)*

Utilizando as propriedades 1 e 3 acima, concluímos que $\langle\ ,\ \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$ é uma aplicação bilinear, isto é, ela é linear em cada componente.

A partir de um produto interno define-se uma norma pondo $||x||^2 = \langle x, x\rangle$. Em espaços vetoriais com produto interno vale a *desigualdade de Cauchy-Schwarz*:

$$\langle x, y\rangle \leq ||x|| \cdot ||y||$$

Exemplos de espaços vetoriais com produto interno

- O exemplo mais natural de espaço vetorial com produto interno é o $\mathbb{R}^n$ com $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + \ldots x_ny_n$. As propriedades acima de produto interno são facilmente verificadas com essa definição. A norma $||x|| = \left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right]^{1/2}$ introduzida anteriormente é proveniente desse produto interno.

Falaremos agora dos conceitos de **bolas abertas** e **bolas fechadas**, que são fundamentais no estudo de espaços métricos.

Definição 2.5. *Uma bola aberta de centro a e raio r em um espaço M é o conjunto denotado por $B(a; r)$ e definido por*

$$B(a; r) = \{x \in M : d(x, a) < r\}$$

Ela representa todos os pontos cuja distância ao ponto a é menor que r. Analogamente, definimos a noção de bola fechada que representa os pontos cuja distância ao ponto a é menor ou igual a r.

Definição 2.6. *Uma bola fechada de centro a e raio r em um espaço M, denotada por $B[a; r]$, é o conjunto definido por*

$$B[a; r] = \{x \in M : d(x, a) \leq r\}$$

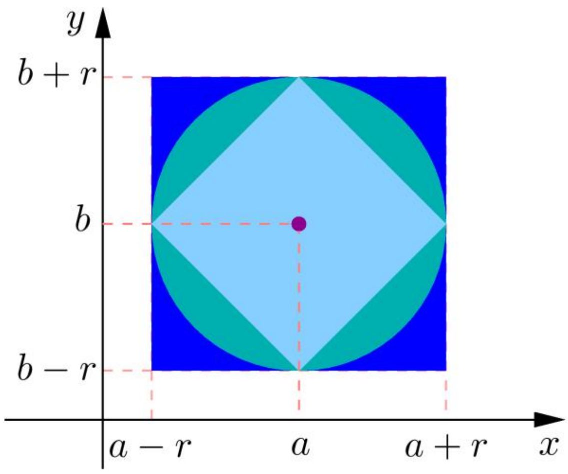

Figura 3: Bolas abertas relativas a três métricas diferentes em $\mathbb{R}^2$ de raio r e centro em (a, b).

Definição 2.7. *A esfera de centro a e raio r, denotada por $S[a; r]$, em um espaço M é o conjunto definido por*

$$S[a; r] = \{x \in M : d(x, a) = r\}$$

Vale a seguinte relação: $B[a, r] = B(a, r) \cup S[a, r]$. É claro que as bolas e as esferas são relativas às métricas que estamos trabalhando.

Na figura 2, encontram-se as bolas abertas em $\mathbb{R}^2$ relativas às métricas d, d' e d'' definidas anteriormente, com centro no ponto (a, b) e raio r. O círculo verde é relativo à métrica d, o losango azul-claro é relativo à métrica d' e o quadrado azul-escuro é relativo à métrica d''.

O conceito de bola aberta nos permite definir pontos interiores, de fronteira ou isolados de um determinado conjunto segundo as seguintes definições.

Definição 2.8. *Seja X um subconjunto de um espaço métrico M, com a métrica induzida por M. Um ponto $a \in X$ é interior se é centro de uma bola aberta contida em X, i.e, existe $r > 0$ tal que para todo x satisfazendo $d(x, a) < r$ tem-se $x \in X$.*

Chamamos de $\operatorname{int} X$ *o conjunto de todos os pontos interiores de X.*

Definição 2.9. *Se X é um conjunto como anteriormente, então um ponto é de fronteira se toda bola aberta com centro nesse ponto possui ao menos um ponto do conjunto X e um ponto pertencente a $M \backslash X$.*

O conjunto de tais pontos é dito fronteira de X e é denotado por ∂X.

Definição 2.10. *Considere o mesmo subconjunto X e espaço métrico M. Um ponto de X é dito isolado se existir alguma bola aberta com centro nesse ponto que possui apenas um único ponto de X, que é o própio centro.*

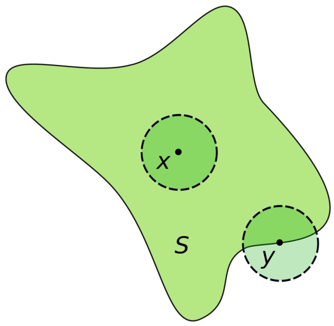

Figura 4: Exemplo de ponto interior e de fronteira. O ponto x é interior ao conjunto S e y faz parte da fronteira.

Definição 2.11. *Diremos que $A \subset M$, sendo M um espaço métrico, é um conjunto aberto se todos os seus pontos forem interiores, i.e, $A = \operatorname{int} A$ ou ainda $A \cap \partial A = \varnothing$.*

Definição 2.12. *Diremos que $A \subset M$, sendo M um espaço métrico, é um conjunto fechado se o seu complementar, relativamente a M, $M \backslash A$, for aberto.*

Definição 2.13. *X é dito um conjunto limitado quando existe um número real $c > 0$ tal que $||x|| < c$ para todo $x \in X$. Isto equivale a dizer que X está contido na bola fechada de centro na origem e raio c.*

Definição 2.14. *Diremos que um conjunto $C \subset M$, sendo M um espaço métrico, é compacto se for fechado e limitado.*

Mais adiante, será necessário trabalhar com o que chamamos de **Espaços Métricos Completos**. Para isso, dado um espaço métrico (M, d), vamos primeiro definir uma **sequência de Cauchy** em M.

Definição 2.15. *Uma sequência de $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $x_k \in \mathbb{R}^n$ para todo $k \in \mathbb{N}$, é dita de Cauchy em $\mathbb{R}^n$ quando para todo $\epsilon > 0$ existir $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todos $k, r > k_0$ tem-se $||x_k - x_r|| < \epsilon$.*

Usando, por exemplo, a norma do máximo, temos

$$||x_k - x_r|| = \max\{|x_{k1} - x_{r1}|, \dots, |x_{kn} - x_{rn}|\}$$

Logo, $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é sequência de Cauchy em $\mathbb{R}^n$ se, e somente se, para cada $i = 1, \dots, n$, a sequência $(x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{ki}, \dots)$ das suas i-ésimas coordenadas é uma sequência de Cauchy de números reais.

Definição 2.16. *Um espaço métrico (M, d) é dito completo se toda sequência de Cauchy em M for convergente.*

De fato, não é difícil encontrar casos em que esta propriedade não é válida. Tome por exemplo a sequência (S_n) nos racionais $\mathbb{Q}$, em que $S_n = 1 + 1/2^2 + \cdots + 1/n^2$. Esta sequência é de Cauchy, porém ela converge para $\pi^2/6$, um número irracional.

Vamos desenvolver agora a noção de funções contínuas, ou também chamadas de aplicações contínuas. Uma função f é uma regra que associa pontos de um conjunto M, dito domínio de f, a outro conjunto N, dito contradomínio de f.

Definição 2.17. *Sejam M, N espaços métricos. Diz-se que $f : M \to N$ é contínua no ponto $a \in M$ se, para todo $\epsilon > 0$, for possível encontrar $\delta > 0$ tal que $d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \epsilon$. A função será dita contínua se for contínua em cada ponto de M.*

Outra forma de enxergar a continuidade de $f : M \to N$ no ponto $a \in M$, é quando dada qualquer bola aberta $B' = B(f(a); \epsilon)$, de centro em $f(a) \in N$, for possível encontrar uma bola aberta $B = B(a; \delta)$, de maneira que $f(B) \subset B'$.

Observação. *A noção de continuidade é local, isto é, depende apenas da proximidade do ponto que estamos interessados.*

Definição 2.18. *Sejam M e N espaços métricos. Um homeomorfismo é uma bijeção contínua $f : M \to N$, tal que sua inversa $f^{-1} : N \to M$ também é contínua.*

Quando existe um homeomorfismo de M para N, dizemos que M e N são espaços homeomorfos. Também é possível encontrar o nome equivalência topológica para descrever tal função f.

Uma propriedade que é compartilhada entre espaços homeomorfos é dita *propriedade topológica*.

Exemplo 2.1. *Dados $a \in \mathbb{R}^n$, com $n \geq 2$, e $r > 0$, a inversão de $\mathbb{R}^n \backslash \{a\}$ com respeito à esfera $S[a; r] \in \mathbb{R}^n$ é a aplicação $f : \mathbb{R}^n \backslash \{a\} \Rightarrow \mathbb{R}^n \backslash \{a\}$, dada por*

$$f(x) = r^2 \frac{x - a}{||x - a||^2} + a$$

Interpretação geométrica: *A inversão com respeito à $S[a; r]$ mapeia seu interior, $B(a; r)\backslash\{a\}$ em seu exterior, $\mathbb{R}^n \backslash B[a; r]$ e vice-versa. Para pontos localizados sobre esfera, isto é para $x \in S[a; r]$, tem-se $f(x) = x$. Isto é a restrição de f à esfera é a aplicação identidade, i.e., $f|_{S[a;r]} = Id_{\mathbb{R}^n\backslash\{a\}}$.*

A essência da transformação é tornar constante o produto $||x - a|| \cdot ||f(x) - a|| = r^2$. Ou seja, quanto mais próximo do centro a o ponto x estiver, mais longe ele será mapeado em relação ao centro da esfera. E quanto mais longe de a, x estiver, então mais perto de a ele será mapeado. De fato,

$$||f(x) - a|| \cdot ||x - a|| = \left|\left| r^2 \frac{x - a}{||x - a||^2} \right|\right| \cdot ||x - a|| = \frac{r^2 ||x - a|| ||x - a||}{||x - a||^2} = r^2$$

Observe que f é contínua. Além disso, f é uma involução, ou seja, $f \circ f = Id_{\mathbb{R}^n \backslash \{a\}}$. Desta forma, f é bijetiva e $f^{-1} = f$, o que implica que sua inversa também é contínua. Assim f é um homeomorfismo entre os espaços $B(a;r)\backslash\{a\}$ e $\mathbb{R}^n\backslash B[a;r]$. Portanto, eles se comportam de maneiras semelhantes e possuem propriedades topológicas em comum, por exemplo o fato se serem conjuntos abertos e conexos.

3 O Teorema do Ponto Fixo de Banach

Neste capítulo, vamos desenvolver a linguagem necessária para introduzir o teorema do ponto fixo de Banach e, com isso, demonstrar o teorema da existência e unicidade para equações diferenciais ordinárias e também para as integrais no próximo capítulo. As definições e teoremas que seguem foram retiradas da referência [3].

Definição 3.1. *Seja X e Y dois espaços métricos. Dizemos que uma função $f : X \to Y$ é uniformemente contínua, se dado $\epsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que para quaisquer que sejam $x_1, x_2 \in X$, então*

$$d(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow d(f(x_1), f(x_2)) < \epsilon$$

A partir daqui iremos preferir a notação Tx do que $T(x)$ para indicar a imagem de um ponto x por uma aplicação T.

Definição 3.2. *Dados dois espaços métricos X e Y, diremos que uma aplicação T é uma contração se existir $0 \leq c < 1$ tal que para quaisquer $x_1, x_2 \in X$, tem-se*

$$d(Tx_1, Tx_2) \leq c \cdot d(x_1, x_2)$$

*Tal número c é conhecido como **constante de contração** de T.*

Note que toda contração é uniformemente contínua, pois para quaisquer $x_1, x_2 \in X$, conseguimos $d(Tx_1, Tx_2) < \epsilon$, pondo $d(x_1, x_2) < \dfrac{\epsilon}{c}$. De fato, teríamos $d(Tx_1, Tx_2) \leq c \cdot d(x_1, x_2) < c \cdot \dfrac{\epsilon}{c} = \epsilon$.

Notação: Se $T : X \to X$ é uma contração, iremos indicar por T^n a composição $T \circ T \circ \cdots \circ T$ (n vezes)

Teorema 3.1 (Teorema do Ponto Fixo de Banach)**.** *Sejam X um espaço métrico completo e $T : X \to X$ uma contração. Então,*

1. *Existe um e somente um x^* tal que $Tx^* = x^*$. Tal ponto é dito ponto fixo da contração T;*

2. *$\forall x_1 \in X$, a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, onde $x_{n+1} = Tx_n$ ou ainda $x_{n+1} = T^n x_1$, converge ao ponto fixo x^*;*

3. *Para todo n, temos que $d(x_n, x^*) \leq c^{n-1}\dfrac{d(x_1, x_2)}{1-c}$, onde c é a constante de contração de T e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é a sequência definida no item (2) acima.*

Demonstração. Começaremos demonstrando a existência de um ponto fixo.

Seja a sequência (x_n), onde x_1 é um ponto qualquer de X e $x_{n+1} = Tx_n$, ou ainda $x_{n+1} = T^n x_1$. Vamos demonstrar que (x_n) construída dessa forma é uma sequência de Cauchy.

Para $n > 1$, temos que

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(Tx_{n-1}, Tx_n) \leq c \cdot d(x_{n-1}, x_n)$$

Com $0 \leq c < 1$ pelo fato de T ser contração. Indutivamente, temos que $d(x_n, x_{n+1}) \leq c^{n-1} \cdot d(x_1, x_2)$ para todo inteiro positivo n.

Agora considere $1 \leq n < m$, então

$$\begin{align}
d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m) \tag{1}\\
&\leq c^{n-1} \cdot d(x_1, x_2) + \cdots + c^{m-2} \cdot d(x_1, x_2) \tag{2}\\
&= c^{n-1} d(x_1, x_2)(1 + \cdots + c^{m-n-1}) \tag{3}\\
&\leq c^{n-1} \frac{d(x_1, x_2)}{1-c} \tag{4}
\end{align}$$

Como $0 \leq c < 1$, então $c^n \to 0$, e pela última desigualdade segue que (x_n) é de Cauchy. Como estamos assumindo que o conjunto X é um espaço métrico completo, então existe $x^* \in X$ tal que $x_n \to x^*$.

Vamos mostrar que $Tx^* = x^*$. De fato, para todo inteiro positivo n tem-se

$$d(Tx^*, x_{n+1}) = d(Tx^*, Tx_n) \leq c \cdot d(x^*, x_n)$$

Porém, como $d(x^*, x_n) \to 0$, então $x_n \to Tx^*$, e pela unicidade do limite temos necessariamente $Tx^* = x^*$.

Para demonstrar a unicidade, suponhamos que existam x^* e y^*, diferentes, tais que $Tx^* = x^*$ e $Ty^* = y^*$. Então

$$0 < d(x^*, y^*) = d(Tx^*, Ty^*) \leq c \cdot d(x^*, y^*)$$

.

Da última relação, teríamos que $c \geq 1$, contrariando a hipótese.

Para demonstrar a terceira e última propriedade, note que para $1 \leq n < m$, tem-se $d(x_n, x^*) \leq d(x_n, x_m) + d(x_m, x^*)$ e por 4 temos que

$$d(x_n, x^*) \leq c^{n-1} \frac{d(x_1, x_2)}{1-c} + d(x_m, d^*)$$

Como $d(x_m, d^*) \to 0$, então o resultado fica demonstrado. $\square$

Corolário 3.1. *Seja $T : X \to X$ tal que, para algum m, a iterada T^m é uma contração. Então T tem um só ponto fixo e, para todo $x_1 \in X$, a sequência $(T^n x_1)_{n \in \mathbb{N}}$ converge ao ponto fixo.*

O exemplo abaixo mostra que a hipótese de $c < 1$ é essencial para garantir a existência do ponto fixo.

Exemplo 3.1. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{1}{2}(x + \sqrt{1+x^2})$. Tem-se que $f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$, donde $0 < f'(x) < 1$, o que garante que $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ para todo par de pontos $x \neq y \in \mathbb{R}$. Mas $f(x) > x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, logo f não possui ponto fixo.*

4 O Teorema da Existência e Unicidade para Equações Diferenciais Ordinárias

Vamos agora aplicar o Teorema do Ponto Fixo de Banach ao estudo de soluções de equações diferencias ordinárias e integrais.

Definição 4.1. *Denotaremos o conjunto das funções contínuas* $f : A \to B$ *por* $\mathcal{C}(A, B)$.

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C}$ e $f \in \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{C})$. A equação

$$y' = f(t, y) \tag{5}$$

é dita uma **equação diferencial de primeira ordem**.

Definição 4.2. *Diremos que uma função* $f : X \to Y$ *é de classe* C^1 *ou continuamente diferenciável se* f *for diferenciável e a função* f' *for contínua.*

Definição 4.3. *Dizemos que uma função continuamente diferenciável* $u : [c, d] \to \mathbb{C}$ *é uma solução da equação diferencial (5) se, para todo* $t \in [c, d]$*, temos* $(t, u(t)) \in \Omega$ *e* $u'(t) = f(t, u(t))$.

Proposição 4.1. *Seja* $(t_0, y_0) \in \Omega$*. Uma condição necessária e suficiente para que uma função contínua* $u : [c, d] \to \mathbb{C}$*, com* $(t, u(t)) \in \Omega$ *para todo* $t \in [c, d]$ *seja uma solução de (5) satisfazendo a condição inicial* $u(t_0) = y_0$ *é que* u *seja solução contínua da seguinte equação integral:*

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds \tag{6}$$

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Integrando ambos os lados da equação (5), temos que

$$\int_{t_0}^{t} y'(s)ds = \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds \Rightarrow y\Big|_{t_0}^{t} = \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds \Rightarrow y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds$$

$(\Leftarrow)$ Derivando ambos os lados da equação (6) com relação a t, encontramos

$y' = f(t, y)$. E observe que se u é solução contínua da equação (6), então $u(t_0) = y_0$.

Vamos enunciar e provar o teorema abaixo que garante existência e unicidade de soluções para equações diferencias ordinárias de primeira ordem.

Teorema 4.1 (Teorema da existência de Cauchy para equações diferenciais)**.** *Seja* $(t_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}$ *uma condição inicial, e* f *definida em* $[t_0 - a, t_0 + a] \times B[y_0; b]$*, a valores em* $\mathbb{C}$*, contínua e lipschitziana na segunda variável, isto é, existe uma constante real* $c > 0$ *tal que*

$$|f(t, z_1) - f(t, z_2)| \leq c|z_1 - z_2| \tag{7}$$

para todo $t \in [t_0 - a, t_0 + a]$*, e* $z_1, z_2 \in B[y_0; b]$*. Então existe* a^* *com* $0 < a^* \leq a$ *tal que a equação diferencial*

$$y' = f(t, y) \tag{8}$$

tem uma, e somente uma, solução u *definida em* $[t_0 - a^*, t_0 + a^*]$ *e que satisfaz* $u(t_0) = y_0$.

Demonstração. A função f é contínua por definição e está definida no compacto $[t_0-a, t_0+a]\times B[y_0;b]$. Logo f é limitada, e existe $M>0$ tal que $|f(t,y)|\leq M$, para todo $(t,y)\in[t_0-a,t_0+a]\times B[y_0;b]$. Se $M=0$, então $f\equiv 0$ e a afirmação é trivial, pois teríamos $u'=0$, que é uma função constante. Aplicando a condição inicial, então $u=y_0$ em todo intervalo $[t_0-a^*, t_0+a^*]$. Vamos considerar o caso $M\neq 0$.

Vamos tomar $a^*=\min\{a, b/M\}$.

Considere o seguinte espaço métrico completo $E=\mathcal{C}([t_0-a^*, t_0+a^*], B[y_0;b])$, que representa o conjunto das funções contínuas definidas em $[t_0-a^*, t_0+a^*]$ e que assumem valores em $B[y_0;b]$, com a métrica induzida por

$$d(u,v)=||u-v||=\sup\{|u(t)-v(t)|, t\in[t_0-a^*, t_0+a^*]\} \tag{9}$$

Para $u\in E$ vamos definir o seguinte operador $L_u:[t_0-a^*, t_0+a^*]\to\mathbb{C}$:

$$(Lu)(t)=y_0+\int_{t_0}^{t} f(s,u(s))ds \tag{10}$$

Lu é contínua devido à presença da integral na equação acima. Além disso, u é solução da equação diferencial se, e somente se, $Lu=u$, ou seja, se u é **ponto fixo** do operador L.

Para todo t com $|t-t_0|\leq a^*$, tem-se

$$|(Lu)(t)-y_0|\leq\left|\int_{t_0}^{t}|f(s,u(s))|ds\right|\leq M|t-t_0|\leq Ma^*\leq b$$

Então Lu é uma função contínua cujo domínio é o intervalo $[t_0-a^*, t_0+a^*]$ e cuja imagem é $B[y_0;b]$. Portanto, $Lu\in E$. Logo L pode ser vista como uma aplicação $L:E\to E$.

Dados $u,v\in E$, temos

$$\begin{aligned}
|(Lu)(t)-(Lv)(t)| &\leq \left|\int_{t_0}^{t}[f(s,u(s))-f(s,v(s))]\,ds\right| && (11)\\
&\leq c\left|\int_{t_0}^{t}|u(s)-v(s)|\,ds\right| && (12)\\
&\leq c\,||u-v||\cdot|t-t_0| && (13)
\end{aligned}$$

e por indução encontramos que

$$|(L^m u)(t)-(L^m v)(t)|\leq\frac{c^m|t-t_0|^m}{m!}||u-v|| \tag{14}$$

Mas $|t-t_0|\leq a^*\leq a$, de forma que

$$|(L^m u)(t)-(L^m v)(t)|\leq\frac{c^m a^m}{m!}||u-v|| \tag{15}$$

Como $\lim\dfrac{c^m a^m}{m!}=0$, temos para algum valor de m que $\dfrac{c^m a^m}{m!}<1$, e com esse valor de m, L^m é uma contração.

Portanto, o operador L satisfaz as condições do Corolário 3.1, e portanto há somente uma função u definida em $[t_0-a^*, t_0+a^*]$ tal que $Lu=u$. □

Observações

- No enunciado do Teorema da existência de Cauchy, podemos substituir $[t_0 - a^*, t_0 + a^*]$ por $[t_0 - a_1^*, t_0 + a_2^*]$, $a_1^*, a_2^* \geq 0$, $a_1^* + a_2^* > 0$, desde que $a_i^* \leq \dfrac{b}{M}$ para $i = 1, 2$. Isto é, o intervalo de existência e unicidade de solução não precisa mais ser um intervalo simétrico em torno de t_0.

- Quando f é não lipschitziana na segunda variável, ainda temos a existência de solução, mas não a unicidade. A existência é garantida por meio do Teorema de Peano.

Em tudo o que fizemos para demonstrar o caso da EDO de primeira ordem, podemos substituir $\mathbb{C}$ por $\mathbb{C}^n$ ou $\mathbb{R}^n$ sem alterar as demonstrações, mas substituindo o módulo pela norma. Mais geralmente ainda, podemos garantir existência e unicidade em qualquer espaço de Banach E.

Quando o espaço é $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$, então $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n$, $f = (f_1, \ldots, f_n) : \Omega \to \mathbb{C}^n$ e $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{C}^n$.

Nesse contexto, a EDO $y' = f(t, y)$ representa o sistema

$$\begin{cases} y_1' = f_1(t, y_1, \ldots, y_n) \\ \quad \vdots \\ y_n' = f_n(t, y_1, \ldots, y_n) \end{cases} \tag{16}$$

Podemos transformar uma EDO de ordem arbitrária $y^{(n)} = f(t, y', \ldots, y^{(n-1)})$ em um sistema do tipo (16).

Se $y^{(n)} = f(t, y', \ldots, y^{(n-1)})$, em que $f : U \to \mathbb{C}$, $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n$, e f é lipschitziana nas suas n últimas componentes. Então, fazendo $y_1 = y, y_2 = y', \ldots, y_n = y^{(n-1)}$, temos o sistema

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1}' = y_n \\ y_n' = f(t, y_1, y_2 \ldots, y_n) \end{cases} \tag{17}$$

Então, dada uma condição inicial $y(t_0) = y_0$, que nesse contexto significa a condição $y(t_0) = y_1^0, y'(t_0) = y_2^0, \ldots, y^{n-1}(t_0) = y_n^0$, então aplicamos o teorema da existência de Cauchy para EDO's de primeira ordem para garantir existência e unicidade de solução $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ para o sistema (17), que é equivalente a EDO $y^{(n)} = f(t, y', \ldots, y^{(n-1)})$.

Uma outra aplicação do teorema do ponto fixo é nas chamadas *equações integrais*.

Teorema 4.2 (Teorema de existência e unicidade para equações integrais)**.** *Considere a seguinte equação integral linear, também conhecida como Equação de Fredholm de segunda espécie.*

$$y(t) = f(t) + \lambda \int_a^b K(t, s) y(s) ds \tag{18}$$

em que $K : [a, b] \times [a, b] \to \mathbb{C}$ é contínua. Então, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|\lambda| < \dfrac{1}{M(b-a)}$, em que M é um limitante para $||K||$ (i.e $M \geq ||K||$), dada $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{C})$, existe uma, e somente uma, $u \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{C})$, que é solução da equação integral (18).

Demonstração. $E = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{C})$ é um espaço métrico completo. Seja um operador $T : E \to E$, tal que para $u \in E$

$$(Tu)(t) = f(t) + \lambda \int_a^b K(t,s)u(s)ds, t \in [a,b] \tag{19}$$

Note que u é ponto fixo de (19) se, e somente se, é solução da equação integral (18). Basta mostrar que T é uma contração.

Dados $u, v \in E$, temos:

$$(Tu)(t) - (Tv)(t) = \lambda \int_a^b K(t,s)[u(s) - v(s)]ds \tag{20}$$

$$|(Tu)(t) - (Tv)(t)| \leq |\lambda|(b-a)M||u - v|| \tag{21}$$

$$||Tu - Tv|| \leq c||u - v|| \tag{22}$$

com $c = |\lambda|(b-a)M < 1$. Assim, T é uma contração em um espaço métrico completo e, pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, há um único $u \in E$, tal que $Tu = u$, i.e, há uma única solução para a equação integral (18). □

Com o teorema do ponto fixo de Banach ainda é possível demonstrar existência e unicidade para EDP's, o que mostra a força deste teorema.

5 Buscador do Google

Esta seção se baseia nos conteúdos apresentados pela referência bibliográfica [1].

No início da década de 90, mais precisamente em 1996, Larry Page e Sergey Brin iniciavam um projeto de pesquisa quando ambos eram estudantes de doutorado na Universidade de Stanford, Califórnia, nos Estados Unidos. Enquanto os buscadores convencionais classificavam as páginas pela contagem de quantas vezes os termos pesquisados apareciam, os dois teorizaram sobre um sistema melhor que também levava em consideração a relação entre os sites.

Eles apelidaram essa nova tecnologia de *PageRank*, onde a relevância de um site era determinada pelo número de páginas que apontavam para ela, através de *links*. Cada *link* possui um peso, isto é, *links* de páginas mais importantes que apontam para uma determinada página geram mais credibilidade. O processo é iterativo e vamos ver a seguir a garantia de sua convergência. Page e Brin, originalmente, apelidaram sua nova ferramenta de busca por *BackRub*, pois o sistema checava *backlinks* para determinar a relevância de um site.

Eventualmente, mudaram o nome da ferramenta para Google, proveniente de um erro ortográfico da palavra "googol", o número seguido por cem zeros que foi criado para indicar a quantidade de informações que o sistema podia buscar. Originalmente, o Google rodou pela primeira vez sob o site da Universidade de Stanford com o domínio *google.stanford.edu.*

O nome do domínio "Google"foi registrado em 15 de setembro de 1997, e a empresa foi constituída em 4 de setembro de 1998. No início, sua sede ficava na garagem de uma amiga, Susan Wojcicki, em Menlo Park, na Califórnia.

A fonte de inspiração para criar a *PageRank* foi o sistema acadêmico de citações e referências. O valor de uma publicação acadêmica é, como se sabe, calculado de modo muito matemático, conforme o número de citações que um artigo ou publicação tenha recebido em outros trabalhos. Consequentemente, a classificação geral do artigo é a soma de todas as citações que ele tenha recebido.

O Google ainda é o buscador mais utilizado. Segundo dados da empresa de análise de dados *Statcounter*, o Google foi o navegador mais utilizado em 2023, encerrando o ano com uma participação de 65,23% nas pesquisas.

O funcionamento de um buscador é baseado em duas etapas:

- **Matching:** O algoritmo busca, dentre todas as páginas da Web, aquelas que possuem as palavras ou frases digitadas.
- **Ranking:** O algoritmo seleciona, entre todas as páginas encontradas no primeiro passo, aquelas que são mais relevantes para exibir no topo dos resultados de pesquisa.

A diferença crucial entre o Google e os outros buscadores convencionais está no segundo passo. As técnicas de Ranking utiizada por outros buscadores são focadas no conteúdo das páginas, ou seja, analisa a proximidade das palavras procuradas, o que não garante o sucesso da pesquisa.

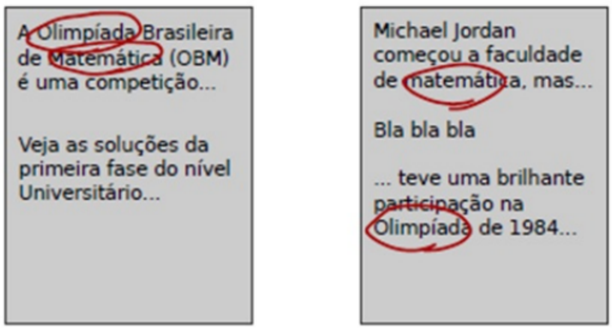

Figura 5: Exemplo de um caso em que somente a proximidade de palavras não garante o sucesso da pesquisa.

Larry Page e Sergey Brin inovaram ao perceber que podiam utilizar a própria estrutura da Web como uma espécie de um grafo, em que os nós são os sites e as arestas são *links* que direcionam um site para o outro.

Note que na imagem 6, os sites que possuem relevância maior são apontados por mais sites e há mais sites relevantes que apontam para eles.

A proposta do Google é de considerar a importância de cada página como a soma das importâncias das páginas que "apontam"para ela, dividida pelo número de links que saem delas. Ou seja, cada página "empresta"em partes iguais a sua importância para as páginas para as quais ela aponta. Assim, se uma página é apontada por páginas importantes, ela deve ser importante.

Nesse contexto, o Teorema do Ponto Fixo Banach garante que essa ordenação é única e que a proposta do Google é de fato viável. Seja G um grafo com nós $1, \dots, n$. Para cada nó $i \in (1, \dots, n)$, queremos atribuir o valor x_i que representa a importância daquele nó. Chamaremos o vetor $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ de **vetor relevância**. Quando j é um nó que aponta para i, chamaremos de **link** de j para i e denotaremos por $j \to i$. Seja l_j o número de nós que saem de j. Assim, definimos

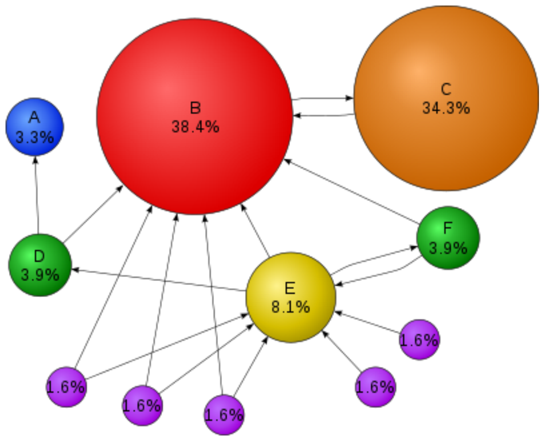

Figura 6: Grafo da relevância de sites pela *PageRank*

$$x_i = \sum_{j \to i} \frac{x_j}{l_j}$$

Com isso, obtemos o sistema linear

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{m_{11}}{l_1}x_1 + \dfrac{m_{12}}{l_2}x_2 + \cdots + \dfrac{m_{1n}}{l_n}x_n \\ x_2 = \dfrac{m_{21}}{l_1}x_1 + \dfrac{m_{22}}{l_2}x_2 + \cdots + \dfrac{m_{2n}}{l_n}x_n \\ \vdots \\ x_1 = \dfrac{m_{n1}}{l_1}x_1 + \dfrac{m_{n2}}{l_2}x_2 + \cdots + \dfrac{m_{nn}}{l_n}x_n \end{cases}$$

Onde m_{ij} é o número de links $j \to i$, que pode inclusive ser zero. Nesses termos, se $A = (a_{ij})$, onde $a_{ij} = \dfrac{m_{ij}}{l_j}$, então podemos ver $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ como uma transformação linear e a relevância $x = (x_1, \ldots, x_n)$ sendo um autovetor de autovalor unitário.

Podemos interpretar (a_{ij}) como sendo a probabilidade de um internauta saindo do vértice j chegar ao vértice i. Se um internauta escolhe, aleatoriamente, uma das n páginas, por exemplo, $v_0 = (1, 0, \ldots, 0)$ indica que ele escolheu a primeira página. Então, o vetor v_1 obtido de $A \cdot v_0 = v_1$ indica a probabilidade do internauta se encontrar na página i após um click, partindo de v_0. Logo, sucessivamente, após n clicks, a probabilidade do internauta de se encontrar na página i é $A \cdot v_{n-1} = v_n$.

No entanto, nem sempre é verdade que o internauta clica em um link após entrar em uma página. Isso pode acontecer por vários motivos, seja por gráfico desconexos ou simplesmente vontade própria do internauta em parar sua sequência e recomeçar. A ideia de Page e Brin para resolver esse problema foi introduzir o fator probabilístico p de começar tudo de novo e, consequentemente, $1-p$ de avançar clicando nos links disponíveis no site. Experimentalmente, o Google decidiu usar $p = 0,15$. Assim, a aplicação que indica um percurso aleatório de um internauta em n vértices é:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \longmapsto p \cdot \begin{bmatrix} 1/n \\ 1/n \\ \vdots \\ 1/n \end{bmatrix} + (1-p) \cdot \begin{bmatrix} \dfrac{m_{11}}{l_1} & \dfrac{m_{12}}{l_2} & \cdots & \dfrac{m_{1n}}{l_n} \\ \dfrac{m_{21}}{l_1} & \dfrac{m_{22}}{l_2} & \cdots & \dfrac{m_{2n}}{l_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{m_{n1}}{l_1} & \dfrac{m_{n2}}{l_2} & \cdots & \dfrac{m_{nn}}{l_n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Que podemos escrever de forma mais simples como $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, onde $y \mapsto pe + (1-p)Ay$, onde $e = (1/n, 1/n, \ldots, 1/n)^T$. Interpretando o vetor e, note que ele dá probabilidades iguais de escolher um site, no caso em que o internauta decide recomeçar.

Claramente T é uma função contínua. Se mostrarmos que T é contração e lembrando que $\mathbb{R}^n$ é um espaço métrico completo, o Teorema do Ponto Fixo de Banach nos garante que T possui um único ponto fixo v, tal que $T \cdot v = v$, e a sequência $T \cdot v_{n-1} = v_n$ começando com v_0, converge a v para qualquer escolha de v_0.

Para tanto, vejamos que

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1$$

Portanto, tomando em $\mathbb{R}^n$ a norma da soma e dados $y, z \in \mathbb{R}^n$, temos que

$$\begin{aligned}
||T(y) - T(z)|| &= ||(1-p)A(y-z)|| \\
&= (1-p) \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot |y_j - z_j| \right) \\
&= (1-p) \sum_{j=1}^{n} |y_j - z_j| \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \right) \\
&= (1-p) \sum_{j=1}^{n} |y_j - z_j| \\
&= (1-p)||y - z||
\end{aligned}$$

Já que $1 - p$ é menor que 1, temos que T é uma contração. Finalmente, pelo fato da aplicação T possuir um único ponto fixo, o Teorema do Ponto Fixo de Banach garante que o método do *PageRank* de fato converge e funciona, garantido classificação única para o vetor relevância.

6 Bibliografia

[1] BARROS, C. D. V., *O Teorema do Ponto Fixo e Algumas Aplicações*. Universidade Federal da Paraíba, Departamento de Matemática. Agosto, 2013.

[2] CROWELL, Richard H; FOX, Ralph H. *Introduction to Knot Theory - Introduction to higher mathematics.* - Editorial Board, 1963.

[3] HONIG, Samuel C. *Aplicações da topologia à análise.* - São Paulo : Editora Livraria da Física, 2011.

[4] LIMA, E. L., *Curso de análise* Vol 2. 1ª edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.

[5] LIMA, E. L., *Elementos de topologia geral*. 3ª edição. Rio de Janeiro: SBM, 2014.

[6] LIMA, E. L., *Espaços métricos*. 3ª edição. Rio de Janeiro: IMPA, 1993.

[7] MUNKRES, J., *Topology: Pearson New International Edition*. 2ª edição. Pearson Education Limited, 2013.