



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA



Lucas Silvestrini Nicodemo

# **Resolução de Equações Diferenciais Parciais com o Método dos Elementos Finitos**

Campinas  
24/06/2024

Lucas Silvestrini Nicodemo

## **Resolução de Equações Diferenciais Parciais com o Método dos Elementos Finitos\***

Monografia apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos para obtenção de créditos na disciplina Projeto Supervisionado, sob a orientação do Prof. Dr. Maicon Ribeiro Correa.

---

\*Este trabalho foi financiado pelo CNPQ , projeto 122302/2023.

## Resumo

Este trabalho está contido na área de análise numérica e discorre sobre o uso do Método dos Elementos Finitos para a resolução de Equações Diferenciais Parciais (EDPs), sobretudo de natureza elíptica. Em particular, visa apresentar os conceitos fundamentais para o formalismo matemático do Método dos Elementos Finitos, bem como realizar experimentos numéricos utilizando aproximações clássicas do tipo Galerkin Contínua. As implementações computacionais foram feitas na linguagem Python, utilizando a plataforma FeniCs. Nesse viés, os experimentos ilustram satisfatoriamente os tópicos estudados, corroborando a empregabilidade do método em diversas áreas da matemática e da engenharia. A teoria discutida, sem perda de generalidade, pode ser estendida para problemas hiperbólicos e parabólicos

## **Abstract**

The following work falls under the area of numerical analysis, and aims to utilize the Finite Element Method for solving elliptic Partial Differential Equations (PDEs). In particular, the goal is to introduce the fundamental concepts and the rigorous foundation of the method, while proposing various numerical experiments utilizing classical Continuous Galerkin formulations. For those implementations, the Python programming language is utilized, as well as the FeniCs library. Those problems adequately illustrate the theoretical results, corroborating for the vast amount of applications of the method in various areas of mathematics and engineering. The theoretical aspects here discussed can directly be generalized for hyperbolic and parabolic equations.

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>6</b>
<b>2</b>	<b>Preliminares</b>	<b>6</b>
<b>3</b>	<b>Forma Variacional</b>	<b>8</b>
3.1	Problema de Minimização abstrato . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Aproximação de Galerkin</b>	<b>12</b>
4.1	Definindo as funções base . . . . .	14
4.2	Montagem da Matriz de Rigidez e Mapeamento local-global . . . . .	16
<b>5</b>	<b>Problema variacional simétrico</b>	<b>18</b>
5.1	Teorema da Representação de Riez . . . . .	21
5.2	Teorema de Lax-Milgram . . . . .	23
<b>6</b>	<b>Análise de Convergência</b>	<b>24</b>
<b>7</b>	<b>Experimentos numéricos</b>	<b>27</b>
7.1	Problema 1 . . . . .	28
7.2	Problema 2 . . . . .	30
7.3	Problema 3 . . . . .	34
<b>8</b>	<b>Conclusão</b>	<b>35</b>

# 1 Introdução

O estudo de equações diferenciais é uma das áreas de maior importância na matemática contemporânea. Com aplicações em diversas áreas da física, química, engenharia e economia, é amplamente utilizada na representação de fenômenos naturais e na descrição de parâmetros que se modificam com o tempo. A modelagem computacional, que nos auxilia na compreensão dos princípios de um sistema físico, depende muitas vezes da construção de um modelo matemático baseado em equações diferenciais. É evidente, porém, que a quantidade de problemas que podem ser atacados analiticamente é bastante reduzido. Por conseguinte, métodos numéricos que forneçam aproximações para essas soluções são constantemente propostos e modificados.

O método dos Elementos finitos foi concebido na década de 50, com foco na modelagem de estruturas e materiais para a engenharia. Em suma, consiste na transição da forma forte de um problema de valor de contorno a uma forma variacional, separando o domínio em elementos com funções que aproximam por partes a solução do problema, com notável precisão. Sua capacidade de lidar com imposições mais complexas e o profundo controle de acurácia definiram a interpolação de funções e a solução de equações diferenciais parciais como uma das principais aplicações do método, sem abandonar o foco da análise estrutural.

Hodiernamente, a formalização do método dos Elementos Finitos amalgama várias áreas da matemática, sendo objeto de estudo de grande interesse teórico e prático. Uma evidência disso é na área da hidráulica, sobretudo no transporte em meios porosos, regidos pelas equações de Darcy[1], e na mecânica de fluidos incompressíveis, com destaque para o Problema de Stokes. [2].

## 2 Preliminares

Nessa seção, iremos definir alguns conceitos da álgebra linear e da análise funcional que serão fundamentais na construção teórica do Método de Elementos Finitos.

**Definição 2.1 (Funcional Linear)** *Num espaço vetorial  $H$ , a função  $f : H \rightarrow \mathbb{R}$  é um funcional linear se satisfaz*

$$f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v)$$

onde  $u, v \in H, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

**Definição 2.2 (Espaço normado)** Um espaço vetorial  $H$  é dito normado se é munido da relação  $\|\cdot\| : H \rightarrow \mathbb{R}$  que satisfaz,  $\forall u, v \in H, \alpha \in \mathbb{R}$

1.  $\|v\| \geq 0$ , e  $\|v\| = 0 \iff v = 0$ ;
2.  $\|\alpha v\| = |\alpha| \cdot \|v\|$
3.  $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$  (*Desigualdade Triangular*)

**Definição 2.3 (Espaço com produto interno)** Um espaço  $H$  com produto interno é um espaço vetorial munido da relação  $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \rightarrow \mathbb{R}$ , com as propriedades:

1.  $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$
2. dados  $u, v, w \in H, \alpha, \beta$  escalares,  $\langle \alpha u + \beta v, w \rangle = \alpha \langle u, w \rangle + \beta \langle v, w \rangle$
3.  $\langle u, u \rangle \geq 0$ , com  $\langle u, u \rangle = 0 \iff u = 0$

Um resultado muito presente nas demonstrações é a *Desigualdade de Cauchy-Schwarz*. Dado  $H$  munido de um produto interno, é válido que  $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\|_H \|v\|_H, \forall u, v \in H$ . Destacamos também que as funções quadradas-integráveis num domínio  $\Omega$  definem o espaço  $L^2(\Omega)$ , munido do produto interno  $\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} u \cdot v d\Omega$ .

**Definição 2.4 (Espaço de Hilbert)** Um espaço  $H$  é de Hilbert se é munido de produto interno e é completo (toda sequência de Cauchy em  $H$  converge para algum elemento em  $H$ ). O espaço dual  $H^*$  de  $H$  é o espaço de todos os funcionais lineares limitados em  $H$ .

Fica claro que todo espaço de Hilbert também é um espaço de Banach, uma vez que podemos definir a norma induzida  $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$ . O espaço  $L^2(\Omega)$  é um exemplo de Espaço de Hilbert, e será de extrema importância para nossas considerações.

**Definição 2.5 (Forma Bilinear)** Dados os espaços de Hilbert  $H_1$  e  $H_2$ , dizemos que  $a(\cdot, \cdot) : H_1 \times H_2 \rightarrow \mathbb{R}$  é uma forma bilinear se

1.  $a(\alpha u + \beta v, w) = \alpha a(u, w) + \beta a(v, w)$ , onde  $u, v \in H_1, w \in H_2, \alpha$  e  $\beta \in \mathbb{R}$
2.  $a(u, \alpha v + \beta w) = \alpha a(u, v) + \beta a(u, w)$ , com  $u \in H_1, v, w \in H_2, \alpha$  e  $\beta \in \mathbb{R}$

Por exemplo, dado um espaço de Hilbert  $H$ , a aplicação

$$a : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(u, v) \longrightarrow a(u, v) = \langle u, v \rangle_H$$

define uma forma bilinear [3]. Veremos posteriormente que o produto interno definido a partir de uma forma bilinear, bastante empregado em resultados de convergência, é denominado *Produto Interno energia*. Essa notação teve origem nas aplicações iniciais do método em mecânica de estruturas [4].

Encerramos essa seção apresentando os espaços vetoriais que alicerçam a análise de Elementos Finitos:

**Definição 2.6 (Espaços  $H^m(\Omega)$ )** Dado  $m \geq 0$  e  $\Omega \in \mathbb{R}^n$ , definimos  $H^m(\Omega)$  como o espaço das funções quadrada-integráveis e com derivadas (no sentido distribucional)[5] até ordem  $m$  quadrada-integráveis. Com isso, temos

$$\langle u, v \rangle_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} \partial^\alpha u(x) \partial^\alpha v(x) d\Omega$$

Em particular,  $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$ . Ademais, o espaço  $H^1(\Omega)$  induz a norma

$$\|v\|_{H^1} = \left( \int_{\Omega} |v|^2 + |\nabla v|^2 d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} = (\|v\|_{L^2} + \|\nabla v\|_{L^2})^{\frac{1}{2}}$$

e empregaremos esse espaço na *formulação variacional* de uma EDP de Poisson.

### 3 Forma Variacional

Com os resultados anteriores, estamos prontos para iniciar os nossos estudos do Método dos Elementos Finitos. Inicialmente, consideremos o problema a seguir, com condição de contorno de Dirichlet homogênea, num domínio  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n = 1, 2, 3$  aberto, conexo e limitado.

Desejamos encontrar uma função  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u \in C^2$ , satisfazendo

$$\begin{cases} -\nabla^2 u = f(x), x \in \Omega \\ u = 0 \text{ no contorno } \partial\Omega \end{cases} \quad (1)$$

onde  $f \in \Omega$  e  $\nabla^2$  é o operador Laplaciano dado por

$$\nabla^2 = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

Numericamente, poderíamos trabalhar com diferenças finitas para obter a solução aproximada sem maiores complicações. Mas para problemas munidos de discontinuidades ou domínios mais complexos, a regularidade da solução é improvável. Para lidar com isso, o método dos elementos finitos propõe avaliar a solução através de sua integração, considerando um espaço de funções-teste (ou peso). De fato, funções cuja descontinuidades se reduzem a conjuntos de medida nula, pelo Lema de Lebesgue, continuam sendo integráveis à Riemann.

Vamos esboçar a *forma variacional* para esse problema. Considere o espaço vetorial infinito  $V = H_0^1(\Omega) = \{v : v \in H^1(\Omega), v|_{\partial\Omega} = 0\}$ , e  $v : V \rightarrow \mathbb{R}$  uma função teste.

Multiplicando (1) pela função  $v \in V$ , e integrando no domínio, temos que:

$$\int_{\Omega} f v d\Omega = - \int_{\Omega} v \nabla^2 u d\Omega$$

Pela regra do produto, vale que

$$v \nabla^2 u = \nabla(v \nabla u) - \nabla u \nabla v$$

Agora, pelo Teorema de Gauss [6],

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla(v \nabla u) d\Omega &= \int_{\partial\Omega} v \nabla u \cdot n ds \\ \implies \int_{\Omega} f v d\Omega &= - \int_{\partial\Omega} v \nabla u \cdot n ds + \int_{\Omega} \nabla u \nabla v d\Omega \end{aligned}$$

Por hipótese, fixamos que  $v$  se anula no contorno  $\partial\Omega$ . Assim, ficamos com

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v d\Omega = \int_{\Omega} f v d\Omega$$

Perceba que essa formulação reduz a regularidade da solução  $u$ , não mais exigido que seja duas vezes diferenciável. Com efeito, necessitamos apenas de seu gradiente. Por isso, a formulação variacional é denominada, também, de *formulação fraca*.

**Definição 3.1 (Formulação Variacional)** *A formulação variacional do problema modelo (1) consiste em encontrar  $u \in V$  tal que*

$$a(u, v) = L(v), \forall v \in V \quad (2)$$

onde utilizamos a forma bilinear:

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\Omega$$

e o funcional linear

$$L(v) = \int_{\Omega} f v d\Omega$$

Nessa formulação, foi levado em conta condições de contorno de Dirichlet, de forma que a variação de  $u$  é zero em  $\partial\Omega$ . Assim, a condição de que as funções teste  $v$  sejam nulas no contorno é *fortemente* (ou essencialmente) imposta[4].

### 3.1 Problema de Minimização abstrato

Podemos, ainda, propor um problema de minimização equivalente associado ao problema (2) quando temos uma forma bilinear simétrica, dado por

**Definição 3.2 (Problema de Minimização)** *Encontrar  $u \in V$  tal que*

$$J(u) \leq J(v), \forall v \in V, \quad (3)$$

em que definimos o chamado funcional energia, dado por

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - L(v).$$

Com isso, obtemos um resultado, em particular, muito elegante do ponto de vista da análise:

**Teorema 3.1 (Equivalência das soluções)** *Se a função  $\nabla^2 u + f$ , conforme (1) for contínua, então as soluções dos problemas (1), (2), (3) são equivalentes.*

**Demonstração:**

Vamos definir a solução de (1) como **D**, a solução de (2) como **V**, e a solução de (3) como **M**.

Já vimos que  $D \implies V$ . Vamos mostrar as outras implicações:

- 1)  $V \implies M$ : Seja  $v \in V$ , e fixe  $w = v - u$ . Como  $u \in V$ , então  $w \in V$ . Temos

$$\begin{aligned} J(v) &= J(u + w) = \frac{1}{2}a(u + w, u + w) - L(u + w) \\ &= \frac{1}{2}a(u, u) - L(u) + a(u, w) - L(w) + \frac{1}{2}a(w, w). \end{aligned}$$

Mas como  $a(u, w) - L(w) = 0$ , e  $a(w, w) = \int_{\Omega} (\nabla w)^2 d\Omega \geq 0$ , segue que  $J(v) \geq J(u)$ . ■

- 2)  $M \implies V$ : Temos que  $J(u) \leq J(v), \forall v \in V$ . Assim,  $\forall \epsilon > 0, (u + \epsilon v) \in V \implies J(u) \leq J(u + \epsilon v)$ . Fixe  $g(\epsilon) = J(u + \epsilon v) = \frac{1}{2}a(u, u) - L(u) + \epsilon a(u, v) - \epsilon L(v) + \frac{\epsilon^2}{2}a(v, v)$ . Então  $\frac{dg(0)}{d\epsilon} = 0$ . Note que 0 é o mínimo de  $g$ . Mas  $\frac{dg(0)}{d\epsilon} = a(u, v) - L(v)$ , e o resultado segue. ■

- $V \implies D$ : Como  $u$  é solução de  $v$ , então

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\Omega = \int_{\Omega} f v d\Omega$$

Utilizando a hipótese de que  $\nabla^2 u + f$  é contínua, e integrando por partes, obtemos que

$$\int_{\Omega} (-\nabla^2 u - f)v d\Omega = 0, \forall v \in V$$

Pela continuidade, a igualdade acima será válida se e somente se  $(\nabla^2 u + f)(x) = 0$ , e o resultado segue. ■

## 4 Aproximação de Galerkin

Nossa formulação variacional foi feita em um espaço  $V$  de dimensão infinita, cuja solução configura um problema contínuo. Queremos definir, agora, um subespaço  $V_h \subset V$ , com  $\dim(V_h) < \infty$ , sob o escopo de encontrar uma aproximação  $u_h \in V_h$  de  $u$ , propondo um problema discreto associado a (2). Essa abordagem é denominada aproximação (ou método) de Galerkin:

**Definição 4.1 (Aproximação de Galerkin)** *Encontrar  $u_h \in V_h$  tal que  $a(u_h, v_h) = L(v_h), \forall v_h \in V_h$ .*

Com isso, estamos livres para trabalhar com uma base finita de funções  $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N\}$ , de forma que toda função teste  $v_h \in V_h$  é perfeitamente caracterizada pelos elementos dessa base:

$$v_h = \sum_{i=1}^N \beta_i \varphi_i, \beta_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, N \quad (4)$$

Escrevendo a solução aproximada  $u_h$  em termos dessa base

$$u_h = \sum_{j=1}^N \alpha_j \varphi_j, j = 1, \dots, N \quad (5)$$

com  $\alpha_j$  escalares a serem determinados, e substituindo (4) na aproximação de Galerkin:

$$\begin{aligned} a(u_h, v_h) &= L(v_h) \\ \implies a(u_h, \sum_{i=1}^N \beta_i \varphi_i) &= L(\sum_{i=1}^N \beta_i \varphi_i) \\ \implies \sum_{i=1}^N \beta_i a(u_h, \varphi_i) &= \sum_{i=1}^N \beta_i L(\varphi_i) \end{aligned}$$

Mas da linearidade dos operadores, vale que

$$a(u_h, \varphi_i) = L(\varphi_i), i = 1, 2, \dots, N$$

Analogamente, expandindo  $u_h$  em termos da base:

$$a\left(\sum_{j=1}^N \alpha_j \varphi_j, \varphi_i\right) = L(\varphi_i)$$

$$\implies \sum_{j=1}^N a(\varphi_j, \varphi_i) \alpha_j = L(\varphi_i)$$

Isso define um sistema de equações lineares  $A\alpha = F$ , com  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\alpha, f \in \mathbb{R}^n$  que pode ser resolvido por métodos numéricos, onde:

- $A$  é a **matriz de rigidez** com  $a_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i)$ ;
- $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N]^T$  são as incógnitas (graus de liberdade globais) da solução  $u_h$ ;
- $F$  é o **vetor de carga** com  $F_i = L(\varphi_i)$ .

Uma observação é que a solução  $u \in V$  do problema variacional contínuo também satisfará o problema discreto, no sentido que

$$a(u, v_h) = L(v_h), \forall v_h \in V_h \subset V$$

Nesse caso, dizemos que a formulação possui *Consistência variacional*.

**Teorema 4.1 (Existência e Unicidade)** *A solução aproximada  $u_h$  associada ao problema (2) existe e é única.*

**Demonstração:**

Com efeito, a existência decorre do fato de que  $u_h$  provém de um sistema linear dado por uma matriz não-singular. Suponha, por absurdo, que exista uma outra solução  $u_h^*$  do problema (2).

Destarte:

$$\int_{\Omega} \nabla u_h \nabla v d\Omega = \int_{\Omega} f \cdot v d\Omega, \forall v \in V \quad (6)$$

$$\int_{\Omega} \nabla u_h^* \nabla v d\Omega = \int_{\Omega} f \cdot v d\Omega, \forall v \in V \quad (7)$$

Subtraindo (7) de (6):

$$\int_{\Omega} \nabla (u_h - u_h^*) \nabla v d\Omega = 0$$

Escolhendo  $v = \nabla(u_h - u_h^*)$ , a única possibilidade é  $\nabla(u_h - u_h^*)$  corresponder à função nula. Por conseguinte,  $u_h - u_h^*$  é uma constante. Mas pela definição do espaço  $V$ , sabemos que  $u_h = 0 = u_h^*$  em  $\partial\Omega$ . Segue que  $u_h - u_h^* = 0$ . ■

## 4.1 Definindo as funções base

Agora que apresentamos a formulação variacional da nossa análise de elementos finitos, devemos nos atentar à discretização do domínio da nossa equação diferencial, sob o escopo de definir uma base para o espaço  $V_h$ . A escolha dessa base afeta diretamente o aspecto da matriz de rigidez, influenciando, por conseguinte, a qualidade da solução numérica [7].

Em particular, desejamos que as funções de base definidas em células adjacentes no domínio discretizado coincidam em todos os nós em comum. Por conseguinte, tais funções devem ser construídas de forma que as incógnitas  $\alpha_j$  do Método de Galerkin correspondam exatamente à solução aproximada  $u_h(x)$  nos pontos nodais  $x_0, x_1, \dots, x_m$ . Isso implica que cada função de base  $\phi_j, j = 1, \dots, n$  deve satisfazer

$$\phi_j(x_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Uma possibilidade para a construção dessa base é utilizar os polinômios de Lagrange:

**Definição 4.2 (Polinômios de Lagrange)** *O polinômio de Lagrange de grau  $n$  associado ao  $i$ -ésimo nó de uma célula é dado por*

$$L_i(x) = \prod_{k=0, k \neq i}^n \frac{(x - x_k)}{x_i - x_k}$$

Para fixar as ideias, realizaremos a construção do subespaço  $V_h \subset V$ , utilizando funções lineares por partes. Sem perda de generalidade, vamos considerar o problema modelo unidimensional, com domínio  $\Omega = [0, 1]$  :

$$\begin{cases} -u'' = f(x), x \in (0, 1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (8)$$

Seja uma partição de  $[0, 1]$  em células, dada por  $K_h = 0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{m+1} = 1$ . Note que essa partição define elementos  $e_j = (x_{j-1}, x_j)$  com espaçamento  $h_j = x_j - x_{j-1}$ , de forma que nosso espaço de aproximação  $V_h \subset V$  será a o espaço dos polinômios lineares contidos em  $H_0^1((0, 1))$ .

Nesse caso, os polinômios de Lagrange serão definidos por:

$$\phi_j(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{j-1}}{x_j-x_{j-1}}, & \text{se } x \in e_{j-1} \\ \frac{x-x_{j+1}}{x_j-x_{j+1}}, & \text{se } x \in e_{j+1} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Podemos notar que cada  $\phi_j$  é a função linear por partes que vale 1 no nó  $x_j$ , e 0 nos demais pontos nodais, sendo chamada de "função chapéu" por conta de seu gráfico.

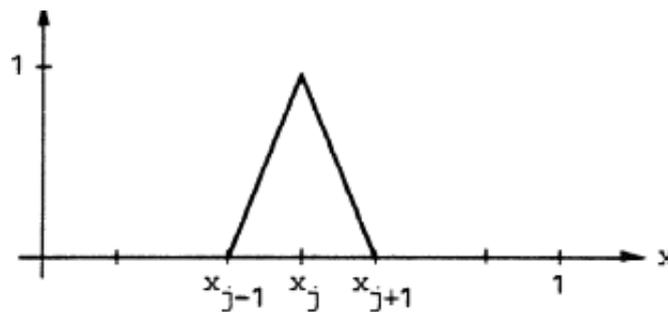


Figura 1: Função de Base nodal  $\phi_j$ . Figura extraída de [4]

Procedendo pelo método de Galerkin, vamos definir a matriz de rigidez  $A$  e o vetor de carga  $F$  para o problema (8), considerando as bases nodais anteriores:

- $a_{ij} = a(\phi_j, \phi_i) = \int_{x_{j-1}}^{x_j} (\phi_j)'(\phi_i)' dx$
- $F_i = L(\phi_i) = \int_{x_{j-1}}^{x_j} f \phi_i dx$

que define um sistema linear cuja matriz é positiva-definida e tridiagonal. No caso em que

$h_j = h, \forall 1 \leq j \leq m$  (malha uniforme), a matriz de rigidez será dada por

$$A = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

## 4.2 Montagem da Matriz de Rigidez e Mapeamento local-global

O exemplo anterior ilustra outro motivo pelo uso dos Polinômios de Lagrange: as funções de base serão de suporte compacto [8], sendo não nulas apenas em um subconjunto fechado e limitado de  $\Omega$ .

Um **Espaço de Elementos finitos** é um espaço de funções cujos elementos são polinômios por partes [9]. Para a construção desses espaços, discretizamos nosso domínio  $\Omega$  através de uma malha:

**Definição 4.3 (Malha)** *Considere o domínio limitado  $\Omega \subset \mathbb{R}^n, n = 1, 2$  ou  $3$ , com fronteira  $\partial\Omega$  suave. Uma malha  $M$  de  $\Omega$  é um conjunto finito de células  $K$ , em que  $\Omega = \cup_{K \in M} K$  e  $int(K_i) \cap int(K_j) = \emptyset$ , se  $i \neq j$ .*

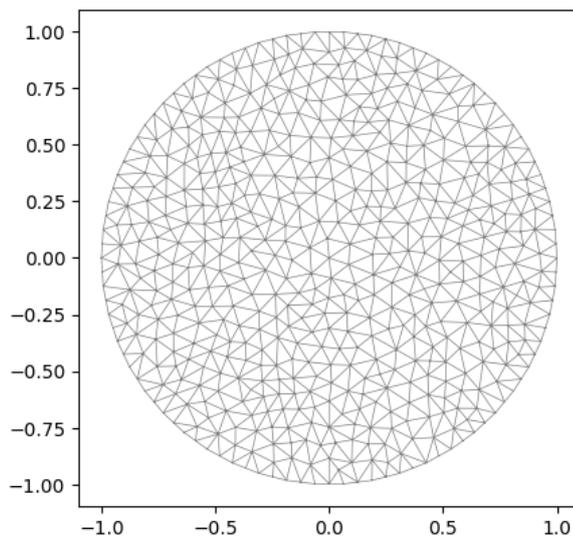


Figura 2: Malha bidimensional do disco unitário com células triangulares - Imagem do próprio autor.

Usualmente, trabalhamos com células triangulares ou quadriláteras, como ilustrado na figura anterior, que simplificam a modelagem computacional, mas que permitam uma discretização compatível com domínios irregulares. Ademais, é imediato relacionar o número de pontos nodais numa célula aos termos de uma base polinomial [10].

Há algumas considerações importantes na montagem da matriz de rigidez: a primeira é que o produto  $\phi_j \cdot \phi_i$  será não nulo se e somente se  $|i - j| \leq 1$ , isto é, apenas se o nó  $i$  e  $j$  forem adjacentes. Por conseguinte, a matriz de rigidez será esparsa. A segunda é que o fato das funções de base serem polinomiais significa que a integração numérica através de uma fórmula de quadratura gaussiana adequada será exata[4]. Por fim, cada integração em  $\Omega$  resultará em várias integrais para a mesma célula  $K$  da malha. Nesse caso, o ideal é definir a montagem da matriz de rigidez global como a soma das matrizes de rigidez em cada elemento[7]. Isso é possível pelo fato dos coeficientes da matriz de rigidez serem definidos por integrais.

Devemos, então, compor um espaço *local* de funções  $V_K$  em cada célula  $K$ , para em seguida construir o subespaço global  $V_h$ . Um *Elemento Finito* constitui, assim, da união das células  $K$  com seus respectivos espaços locais  $V_h$ . Sua definição formal (Ciarlet, 1976) é dada por:

**Definição 4.4 (Elemento Finito)** *É uma terna  $(K, V_K, L)$  em que*

- *A célula  $K \subset \mathbb{R}^n$  é compacta com interior não-vazio e contorno suave por partes;*
- *O espaço  $V_K \subset K$  possui dimensão  $Dim(V) = n < \infty$ ;*
- *O conjunto de nós  $L = \{l_1, \dots, l_n\}$  é uma base para o espaço dual  $V^*$  de  $V$ .*

Vamos, agora, retornar ao cálculo do sistema linear da aproximação de Elementos Finitos:

$$A_{ij} = a(\phi_j, \phi_i), F_i = L(\phi_i)$$

Como cada célula  $K$  da malha  $M$  define um elemento finito, devemos delimitar um mapeamento que especifique a continuidade de uma célula com suas adjacentes. A construção do espaço global  $V_h = span\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ , assim, será feita com um mapeamento do local ao global [10, 8], que associa cada nó (grau de liberdade) da célula a um grau de liberdade global:

$$i_K : [1, n_K] \longrightarrow [1, N]$$

de forma que os graus de liberdade globais possam ser definidos como:

$$l_{i_K(i)}(v_h) = l_i^K(v_h|_K), \forall i = 1, \dots, n_K \text{ e } \forall v_h \in V_h$$

É evidente que para obtermos uma aproximação contínua entre os elementos, devemos mapear os nós de células adjacentes ao mesmo grau de liberdade global:

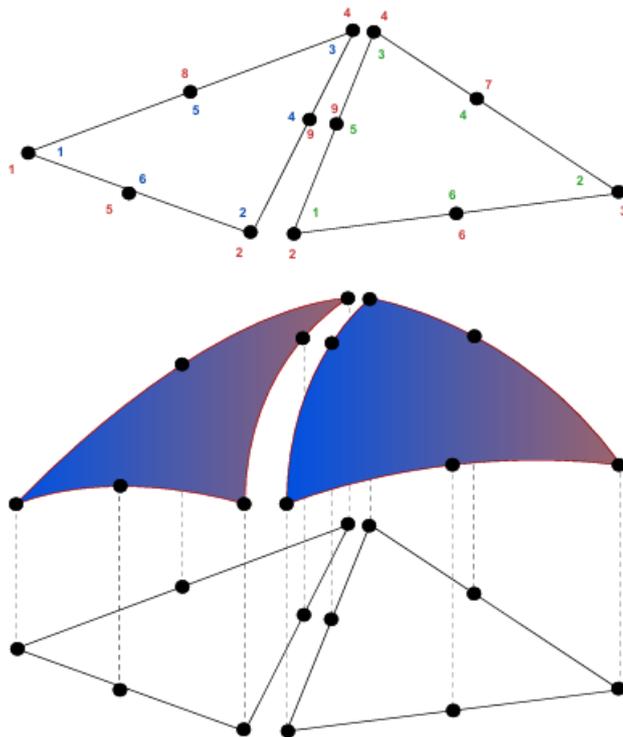


Figura 3: Mapeamento local-global em Elementos triangulares de Lagrange de 2 ordem - Imagem extraída de [8]

## 5 Problema variacional simétrico

Vários problemas físicos munidos de leis de conservação herdam a propriedade de simetria de maneira imediata, motivando a análise de formulações variacionais simétricas[7]. Nessa seção, estamos interessados em estudar sob quais condições a nossa formulação variacional será bem posta.

**Definição 5.1 (Forma Bilinear limitada)** *Seja  $H$  um espaço de Hilbert, e  $\|\cdot\|_H$  a sua norma induzida. A forma bilinear  $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  é limitada se  $\exists M > 0$  tal que  $|a(v, w)| \leq$*

$M\|v\|_H\|w\|_H$ . Em particular, toda forma bilinear limitada é contínua.

Vamos demonstrar que a forma bilinear de (2) é limitada:

$$\begin{aligned}
 |a(u, v)| &= \left| \int_{\Omega} \nabla u \nabla v d\Omega \right| \\
 &\leq \left( \int_{\Omega} (\nabla u)^2 d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \int_{\Omega} (\nabla v)^2 d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \text{ (por Cauchy-Schwarz)} \\
 &= \|\nabla u\|_{L^2} \cdot \|\nabla v\|_{L^2} \\
 &\leq \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1} \blacksquare
 \end{aligned}$$

**Definição 5.2 (Forma Bilinear Coerciva)** Num espaço de Hilbert  $H$ ,  $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  é uma forma bilinear coerciva em  $V \subset H$  se  $\exists \alpha > 0$  tal que

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|_H^2$$

Essa definição deixa implícito que qualquer forma bilinear coerciva é positiva.

Para mostrar a coercividade da forma bilinear de (2), precisaremos da *Desigualdade de Poincaré* [6]:

**Teorema 5.1 (Desigualdade de Poincaré)** Dado  $m > 0$  e um domínio limitado  $\Omega$ , então existe  $C = C(\Omega) > 0$  tal que

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}, \forall u \in H^m(\Omega)$$

Temos que

$$\begin{aligned}
 \|v\|_{H^1}^2 &= \int_{\Omega} (\nabla v)^2 d\Omega + \int_{\Omega} v^2 d\Omega = \|\nabla v\|_{L^2}^2 + \|v\|_{L^2}^2 \\
 &\leq (1 + C) \|\nabla v\|_{L^2}^2 \text{ (pela desigualdade de Poincaré)} \\
 &\implies a(v, v) \geq \frac{1}{1 + C} \|v\|_{H^1}^2
 \end{aligned}$$

provando a coercividade. ■

Observe que se a forma Bilinear do problema (2) for coerciva e simétrica, a matriz de rigidez do sistema linear obtido pelo Método de Galerkin também será simétrica e positiva-definida[9]. Ademais, esse forma define o chamado **produto interno energia** em  $H$ , definida

por  $\langle \cdot, \cdot \rangle_a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\langle u, v \rangle_a = a(u, v)$ . Se considerarmos a **norma energia**  $\|\cdot\|_a$ , temos a equivalência entre a norma do Espaço de Hilbert  $H$ ,  $\|\cdot\|_H$  e a norma energia, isto é, dado  $u \in H$ , vale que:

1.  $\sqrt{\alpha}\|u\|_H \leq \|u\|_a \leq \sqrt{M}\|u\|_H$
2.  $\frac{1}{\sqrt{M}}\|u\|_a \leq \|u\|_H \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\|u\|_a$

De fato, como a forma bilinear é coerciva, temos que

$$\begin{aligned} \alpha\|u\|_H^2 \leq a(u, u) &\implies \sqrt{\alpha}\|u\|_H \leq \sqrt{a(u, u)} \\ &= |\sqrt{a(u, u)}| \\ &\leq \sqrt{M}\|u\|_H. \end{aligned}$$

pois a forma é limitada, provando (1.).

Analogamente, como a forma bilinear é limitada, vale que

$$\begin{aligned} \frac{1}{M}|a(u, u)| \leq \|u\|_H^2 &\implies \frac{1}{\sqrt{M}}\sqrt{\langle u, u \rangle_a} \leq \|u\|_H \\ &\leq \|u\|_H \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\sqrt{a(v, v)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\|u\|_a \end{aligned}$$

onde utilizamos a coercividade da forma bilinear, provando (2.). Uma última observação é o fato de que  $\|u\|_a = \|\nabla u\|_{L^2}$ . Agora, somos capazes de demonstrar o seguinte teorema:

**Teorema 5.2** *Seja  $H$  um espaço de Hilbert, e  $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  uma forma bilinear simétrica, limitada em  $H$  e coerciva em um subespaço fechado  $V \subset H$ . Então o espaço  $(V, a(\cdot, \cdot))$  é de Hilbert.*

### Demonstração:

Por hipótese, assumimos simetria e linearidade. Como  $a$  é coerciva, então  $a(v, v) = \langle v, v \rangle_a = 0 \implies v = 0$ .

Seja  $x_n$  sequência de Cauchy em  $V \subset H$ . Como  $H$  é completo,  $x_n$  converge para algum elemento

$x \in H$ . O fato de  $V$  ser fechado implica que  $x \in V$ . Mas, por hipótese,  $a$  é limitado, logo

$$\sqrt{a(x - x_n, x - x_n)} \leq \sqrt{\alpha \|x - x_n\|_H^2} = \sqrt{\alpha} \|x - x_n\|_H^2$$

Como  $x_n \rightarrow x$  na norma  $a(\cdot, \cdot)$ , segue que o espaço  $(V, a(\cdot, \cdot))$  é completo, logo é de Hilbert. ■

## 5.1 Teorema da Representação de Riez

A seguir, enunciaremos o teorema da Representação de Riez [3], para posteriormente definir e demonstrar o Teorema de Lax-Milgram.

Seja  $V$  um espaço vetorial munido de produto interno, com  $\dim(V) < \infty$ . Definimos

$$\phi_v : V \rightarrow V$$

$$u \rightarrow \phi_v(u) = \langle u, v \rangle$$

Note que  $\phi_v$  é um funcional linear. Com efeito, dados  $u_1, u_2 \in V, \alpha \in \mathbb{R}$ ,

$$\phi_v(u_1 + \alpha u_2) = \langle u_1 + \alpha u_2, v \rangle$$

$$= \langle u_1, v \rangle + \alpha \langle u_2, v \rangle$$

$$= \phi_v(u_1) + \alpha \phi_v(u_2)$$

**Teorema 5.3 (Representação de Riez)** *Seja  $V$  um espaço vetorial de dimensão finita, munido de produto interno, e  $\phi : V \rightarrow \mathbb{R}$  um funcional linear. Então existe um único  $v \in V$  tal que*

$$\phi(u) = \phi_v(u) = \langle u, v \rangle, \forall u \in V$$

**Demonstração:**

Fixe a base ortonormal  $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ . Então  $\forall u \in V$ , podemos escrever

$$u = \langle u, v_1 \rangle \cdot v_1 + \dots + \langle u, v_n \rangle \cdot v_n$$

- **Existência:** da linearidade, vale que

$$\begin{aligned}\phi(u) &= \phi(\langle u, v_1 \rangle v_1 + \dots + \langle u, v_n \rangle v_n) \\ &= \langle u, v_1 \rangle \phi(v_1) + \dots + \langle u, v_n \rangle \phi(v_n)\end{aligned}$$

Mas escrevendo  $v = \phi(v_1).v_1 + \dots + \phi(v_n).v_n$ , obtemos

$$\begin{aligned}\langle u, v \rangle &= \langle u, \phi(v_1).v_1 + \dots + \phi(v_n).v_n \rangle \\ &= \langle u, v_1 \rangle \phi(v_1) + \dots + \langle u, v_n \rangle \phi(v_n)\end{aligned}$$

Então:

$$\phi(u) = \langle u, v \rangle = \phi_v(u), \forall u \in V \blacksquare$$

- **Unicidade:** Suponha, por absurdo, que exista  $w \in V$  satisfazendo

$$\langle u, w \rangle = \langle u, v \rangle, \forall u \in V$$

Então  $\langle u, v - w \rangle = 0, \forall u \in V$ . Como  $v - w \in V$ , escolhendo  $u = v - w$ , temos que

$$\langle v - w, v - w \rangle = 0 \iff v - w = 0 \iff v = w \blacksquare$$

A consequência fundamental desse teorema é que, dado um funcional linear  $f \in H^*$ , existe uma única função  $L : H^* \rightarrow H$  que associa  $f$  ao espaço  $H$  (**Mapeamento de Riez**). Essa função define um isomorfismo linear [10, 2].

Finalmente, mostraremos que a formulação variacional (simétrica) de nosso problema modelo é bem posta.

**Teorema 5.4 (Problema variacional bem posto)** *Seja  $H$  um espaço de Hilbert, e  $V \subset H$  fechado. Se  $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  é uma forma bilinear simétrica, coerciva e limitada, então, dado  $L \in V^*$ , o problema variacional*

$$\text{Achar } u \in H, a(u, v) = L(v), \forall v \in V$$

possui solução única (e, em particular, é estável).

**Demonstração:**

Temos que  $a(.,.)$  define um produto interno em  $V$ , e que  $(V, a)$  define um espaço de Hilbert (teorema 5.1). Pelo teorema da Representação de Riez, e considerando o funcional linear  $L : V^* \rightarrow V$ , existe um único  $u \in V$  satisfazendo  $L(v) = a(u, v), \forall v \in V$ . A estabilidade vem do fato do mapeamento de Riez constituir um isomorfismo. ■

## 5.2 Teorema de Lax-Milgram

Até aqui, trabalhamos com maior foco em formas bilineares simétricas. O teorema de Lax-Milgram, por sua vez, garante a existência e unicidade para problemas variacionais independentemente da sua simetria.

**Teorema 5.5 (Lax-Milgram)** *Seja  $H$  um espaço de Hilbert,  $V \subset H$  fechado. Se a forma bilinear  $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  é limitada e coerciva, então  $\forall L \in V^*, \exists$  um único  $u \in V$  tal que*

$$a(u, v) = L(v), \forall v \in V$$

**Demonstração:**

Pelo teorema da Representação de Riez, podemos definir o funcional  $A : V \rightarrow V$  satisfazendo

$$a(u, v) = \langle A(u), v \rangle$$

Analogamente,  $\forall L \in V^*$ , podemos associar  $f \in V$  tal que  $L(v) = \langle f, v \rangle$ . Destarte, devemos resolver a seguinte equação funcional [5]:

$$A(u) = f, \text{ que pode ser escrita como } u - rA(u) + rf = u$$

É suficiente mostrar que  $T : V \rightarrow V, T(u) = u - rA(u) + rf$  é uma contração para  $r$  suficientemente pequeno [5, 10], utilizando ponto fixo de Banach. A existência e unicidade segue diretamente. ■

## 6 Análise de Convergência

A qualidade da solução de elementos finitos pode ser melhorada ao aumentar o número de células na malha, ou aumentar o grau das funções de base. Deve-se levar em conta, obviamente, a suavidade do subespaço  $V_h$ , além da análise numérica que alicerça o custo computacional. A definição de *erro* associado a formulação variacional (2) decorre naturalmente:

### Definição 6.1 (Função erro)

$$e(x) = u(x) - u_h(x)$$

ou seja, a diferença entre a solução exata e a aproximação de Galerkin.

Queremos definir uma cota superior para o erro da aproximação de Galerkin, bem como inferir sobre a qualidade dessa aproximação em diferentes normas (em particular, na norma Energia e as normas induzidas por  $H^1(\Omega)$  e  $L^2(\Omega)$ ). O seguinte teorema é fundamental para esse resultado:

**Teorema 6.1 (Ortogonalidade de Galerkin)** *Seja  $u_h$  a solução do Método de Galerkin. Então*

$$a(u - u_h, v) = \int_{\Omega} \nabla(u - u_h) \cdot \nabla v dx = 0$$

### Demonstração:

Temos que

$$a(u, v) = L(v), \forall v \in V \implies a(u, v_h) = L(v_h), \forall v_h \in V_h$$

Usando a aproximação de Galerkin,

$$a(u_h, v_h) = L(v_h)$$

Finalmente,

$$a(u - u_h, v_h) = L(v_h) - L(v_h) = 0 \blacksquare$$

Geometricamente, podemos afirmar que a aproximação de Galerkin  $u_h$  é a projeção ortogonal no subespaço  $V_h$ , considerando a norma energia[9].

Com isso em mente, o teorema de Céa fornecerá uma cota superior para o erro da aproximação de Galerkin.

**Teorema 6.2 (Teorema de Céa)** *Seja  $u_h$  a solução obtida pelo Método de Galerkin, num espaço de Hilbert  $H$ . É válida a seguinte estimativa de erro:*

$$\|u - u_h\|_H \leq \frac{M}{\alpha} \|u - v\|_H, \forall v \in V_h$$

**Demonstração:**

Utilizando a equivalência das normas, e assumindo forma bilinear coerciva, temos que

$$\begin{aligned} \alpha \|u - u_h\|_H^2 &\leq |a(u - u_h, u - u_h)| \\ &= a(u - u_h, u + v - v - u_h) \\ &= a(u - u_h, u - v) + a(u - u_h, v - u_h) \end{aligned}$$

mas da ortogonalidade de Galerkin, o 2º termo se anula, e ficamos com

$$\begin{aligned} a(u - u_h, u - v) &\leq M \|u - u_h\|_H \|u - v\|_H \\ \implies \|u - u_h\|_H &\leq \frac{M}{\alpha} \|u - v\|_H, \forall v \in V_H \blacksquare \end{aligned}$$

Sob essas hipóteses, temos que  $u_h$  é a melhor aproximação de  $u$  no espaço de aproximação  $V$ , na norma energia.

**Teorema 6.3 (Melhor aproximação)** *A solução aproximada  $u_h$  satisfaz  $\|e\|_a \leq \|u - v\|_a, \forall v \in V_h$ .*

Esse resultado define um majorante de erro com base no espaço  $V_h$ , considerando a norma energia. Entretanto, nem sempre desejamos computar o erro nessa norma. Outrossim, nenhuma consideração é feita sobre os parâmetros numéricos, isto é, o tamanho de malha  $h$  e o grau de aproximação  $p$ . Realizaremos essas considerações a seguir.

Em particular, notemos que o **Interpolante de grau  $k$**  de  $u$ , que denotaremos por  $u_{I_k}$ , pertence ao subespaço  $V_h$ . Assim, escolhendo  $v = u_{I_k}$  podemos construir majorantes para o erro de aproximação por meio de seu interpolante, utilizando um teorema bem conhecido da análise numérica:

**Teorema 6.4** *Considere um domínio  $\Omega$  discretizado numa malha com células uniformes de*

tamanho  $h$ . Dado  $u \in H^{m+1}(\Omega)$ , seja  $u_{I_k}$  o interpolante de grau  $k$  de  $u$ , com  $1 \leq m \leq k$ . Então  $\exists C > 0$  tal que

$$\|u - u_{I_k}\|_{L^2} + h\|\nabla u - \nabla u_{I_k}\|_{L^2} \leq Ch^{k+1}|u|_{m+1}$$

onde  $|u|_{m+1} = \|u\|_m$  é a Seminorma de Sobolev [10].

Por exemplo, se desejamos computar o erro na norma  $L^2$ , temos, pelo teorema da melhor aproximação:

$$\begin{aligned} \|e\|_a &= \|u - u_h\|_a = \|\nabla u - \nabla u_h\|_{L^2} \\ &\leq \|\nabla u - \nabla u_{I_k}\|_{L^2} \\ &\leq Ch^k|u|_1 \end{aligned}$$

Mas, pela Desigualdade de Poincaré,

$$\|u - u_h\|_{L^2} \leq C_2\|\nabla(u - u_h)\|_{L^2} \leq Ch^k|u|_1$$

que é uma estimativa não-ótima em  $L^2$  [6], uma vez que, pelo Teorema de Céa e pelo teorema 6.4, esperamos convergência na ordem de  $h^{k+1}$ .

Para obtermos a taxa ótima de convergência, utilizamos o *Truque de Nitsche*, definindo o problema auxiliar

$$\begin{cases} -\nabla^2 w = e(x), x \in \Omega \\ u = 0 \text{ no contorno } \partial\Omega \end{cases} \quad (9)$$

Como  $e(x) = (u - u_h)(x) \in V_h$ , tomemos a função teste  $e(x)$ . Temos que  $e^2 = -e\nabla^2 w \implies \int_{\Omega} e^2 d\Omega = -\int_{\Omega} e\nabla^2 w d\Omega$ . Utilizando o teorema de Gauss, temos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} e^2 d\Omega &= \int_{\Omega} \nabla e \cdot \nabla w \cdot d\Omega - \underbrace{\int_{\partial\Omega} e \cdot n \nabla w ds}_{0, \text{ pela Ortogonalidade}} \\ &= \int_{\Omega} \nabla e \cdot \nabla w \cdot d\Omega \end{aligned} \quad (10)$$

Utilizando novamente a ortogonalidade de Galerkin, considerando  $w_I \in V_h$  o interpolante

da função  $w$ , temos que

$$a(u - u_h, w) = \int_{\Omega} \nabla w_I \nabla \underbrace{(u - u_h)}_e d\Omega = 0 \quad (11)$$

Finalmente, subtraindo (11) de (10), temos que:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} e^2 d\Omega &= \int_{\Omega} \nabla(w - w_I) \cdot \nabla e d\Omega \\ \implies \|u - u_h\|_{L^2}^2 &= \int_{\Omega} \nabla(w - w_I) \cdot \nabla e d\Omega \\ &\leq \|\nabla(w - w_I)\|_{L^2} \cdot \|\nabla(u - u_h)\|_{L^2} \text{ (Por Cauchy-Schwarz)} \\ \implies \|u - u_h\|_{L^2}^2 &\leq ch|w|_2 \cdot \|\nabla(u - u_h)\|_{L^2} \\ \implies \|u - u_h\|_{L^2}^2 &\leq ch\|u - u_h\|_{L^2} \cdot h^k |u|_{k+1} \\ \implies \|u - u_h\|_{L^2} &\leq ch^{k+1} |u|_{k+1} \end{aligned}$$

obtendo a taxa ótima de convergência. ■.

## 7 Experimentos numéricos

De maneira sucinta, um algoritmo de Elementos Finitos é dividido em:

- **Pré-Processamento:** Discretização do domínio em uma malha; formulação variacional do problema contínuo; Definição das funções de base;
- **Processamento:** Montagem da matriz de rigidez nos elementos; montagem da matriz de rigidez global e resolução (direta ou iterativa) do sistema linear originado do Método de Galerkin;
- **Pós-Processamento:** Apresentação de gráficos/tabelas; análise de convergência;

A seguir, realizaremos implementações computacionais para ilustrar os resultados teóricos verificados. Os softwares utilizado foram a linguagem de Programação Python, juntamente da biblioteca de Análise de Elementos Finitos FeniCs [8]. Essa biblioteca também está disponível

para GNU Octave. Os gráficos tridimensionais foram feitos ao exportar as curvas de nível geradas pelo Python ao software ParaView.

## 7.1 Problema 1

$$\begin{cases} -\frac{d^2u}{dx^2} = x, 0 < x < 1 \\ u(0) = 0 \\ u(1) = 0 \end{cases}$$

É imediato verificar que a solução analítica é dada por  $u(x) = \frac{-x^3}{6} + \frac{x}{6}$ . Vamos obter a solução aproximada pelo método de elementos finitos utilizando espaços de Lagrange lineares e malhas uniformes, comparando a qualidade da aproximação para diferentes tamanhos de malha:

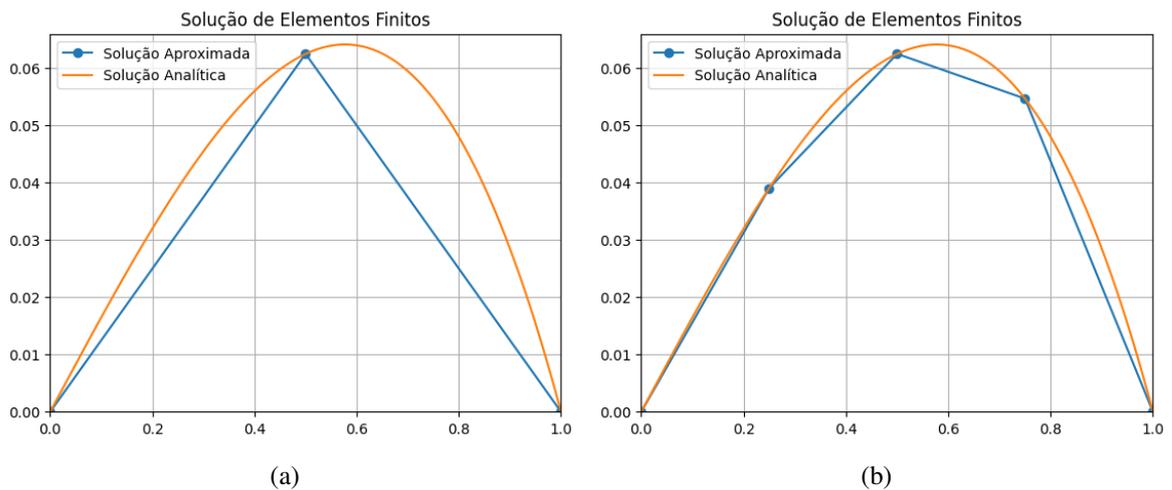


Figura 4: Interpolação do PVC com malhas com 2 e 4 nós

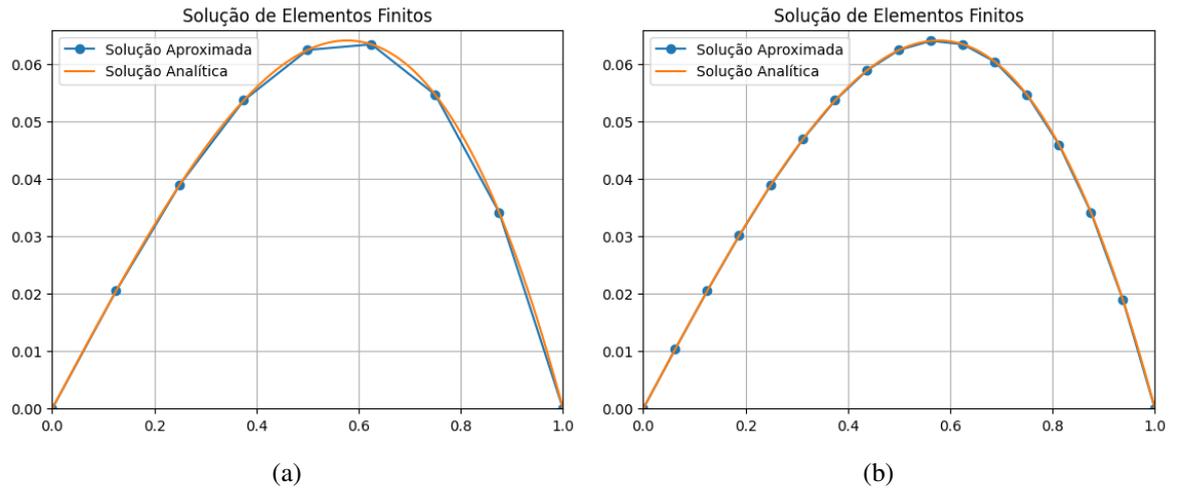


Figura 5: Interpolação do PVC com malhas com 8 e 16 nós

Comparando os erros de interpolação conforme refinamos a malha, obtemos

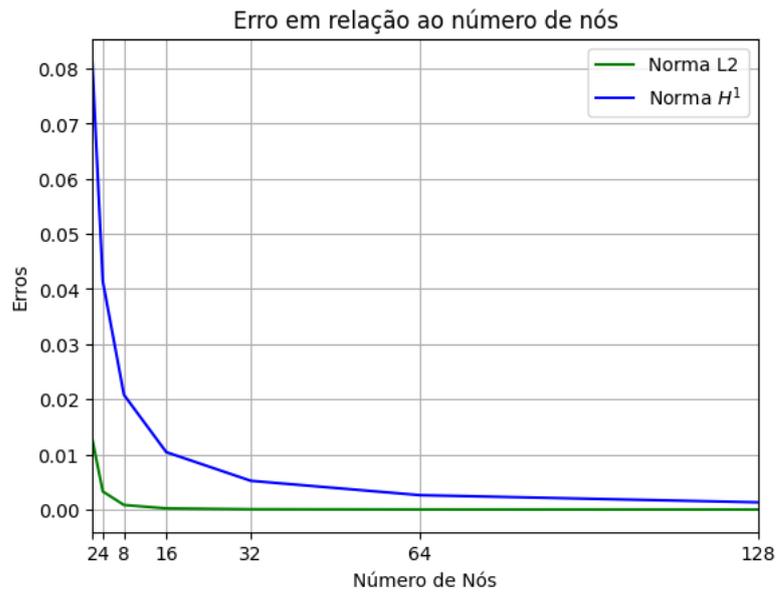


Figura 6: Normas de erro  $\|e\|_{L^2}$  e  $\|e\|_{H^1}$  em relação ao número de nós na malha

E, em escala logaritmica,

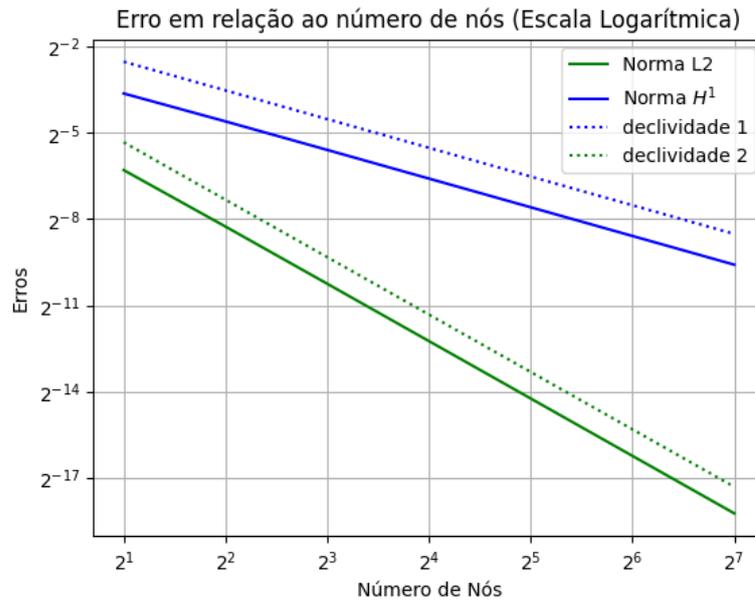


Figura 7: Normas de erro  $\|e\|_{L^2}$  e  $\|e\|_{H^1}$  em escala log log

Esse exemplo ilustra as taxas de convergência em diferentes normas, de forma que

$$\|e\|_{L^2} \leq Ch^2$$

$$\|e\|_{H^1} \leq Ch$$

## 7.2 Problema 2

Consideremos a seguinte equação de Poisson em duas dimensões:

$$\begin{cases} -\nabla^2 u + u = (2\pi^2 + 1)\text{sen}(\pi x)\text{sen}(\pi y), & \text{em } (0, 1) \times (0, 1) \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \quad (12)$$

Sua solução analítica é dada por  $u(x, y) = \text{sen}(\pi x) \cdot \text{sen}(\pi y)$

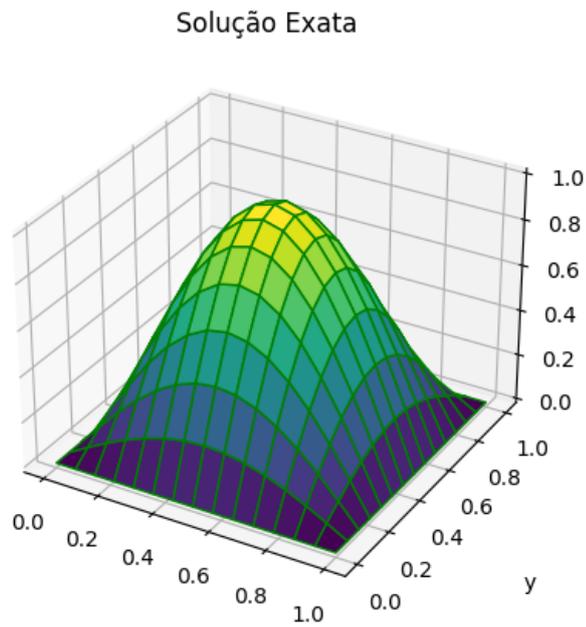


Figura 8: Solução analítica para o problema (12)

As soluções de Elementos Finitos para diferentes tamanhos de malha são dadas por:

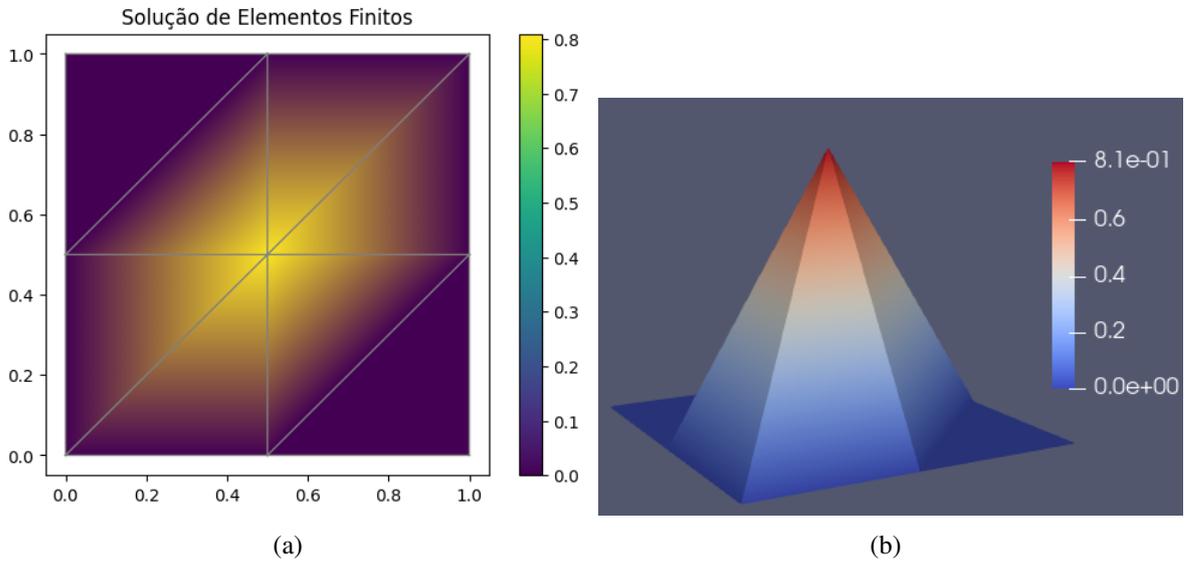


Figura 9: Malha com  $h_{max} = 0,5$ .

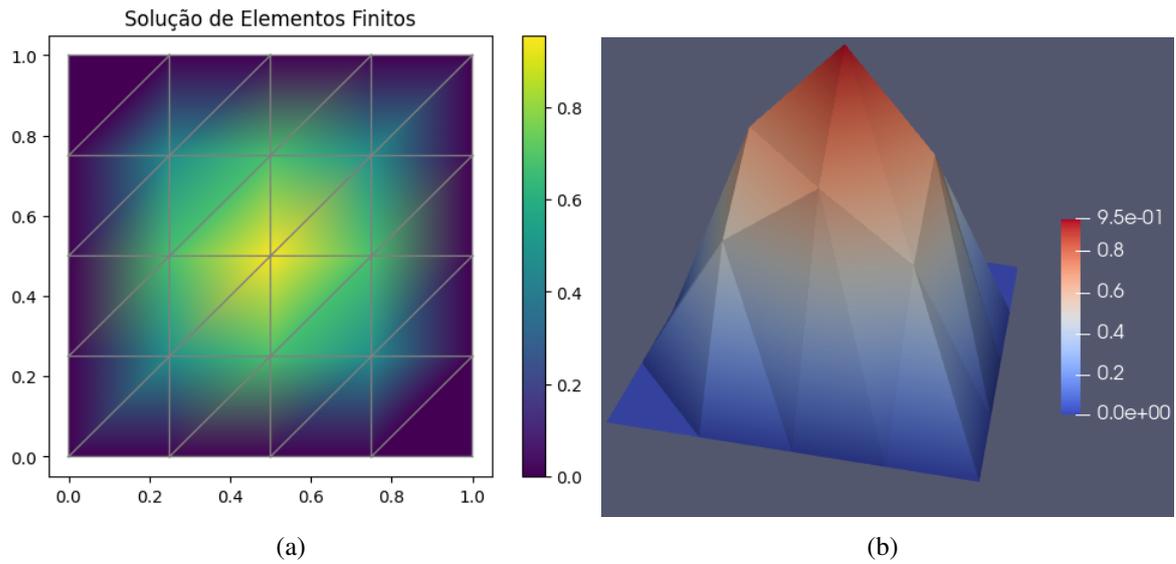


Figura 10: Malha com  $h_{max} = 0,25$ .

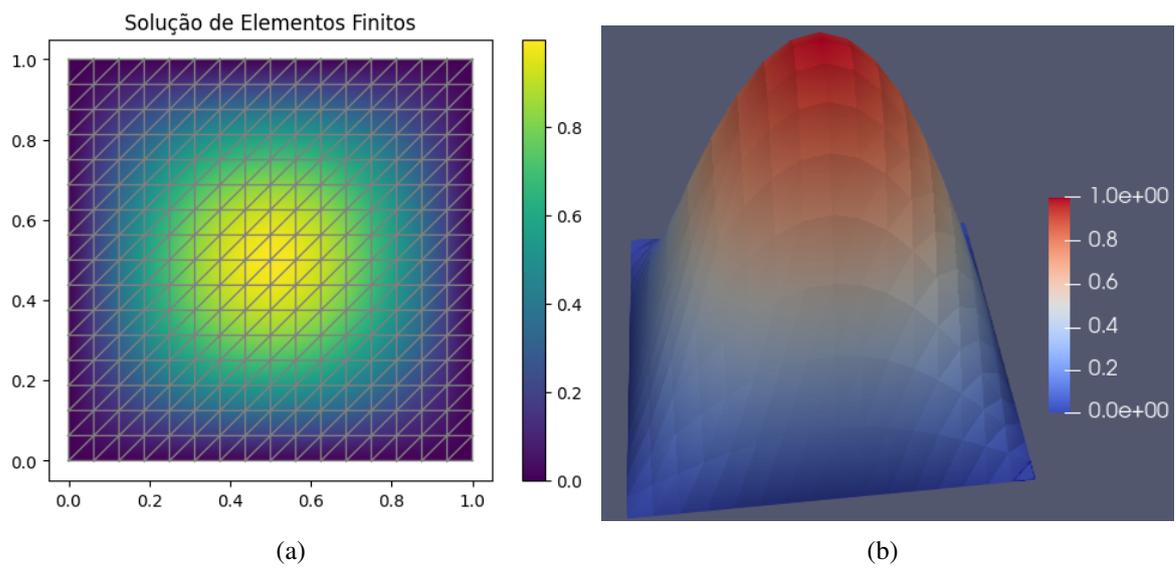


Figura 11: Malha com  $h_{max} = 0,0625$

Os erros da solução de Elementos Finitos em relação ao número de malhas são descritos por:

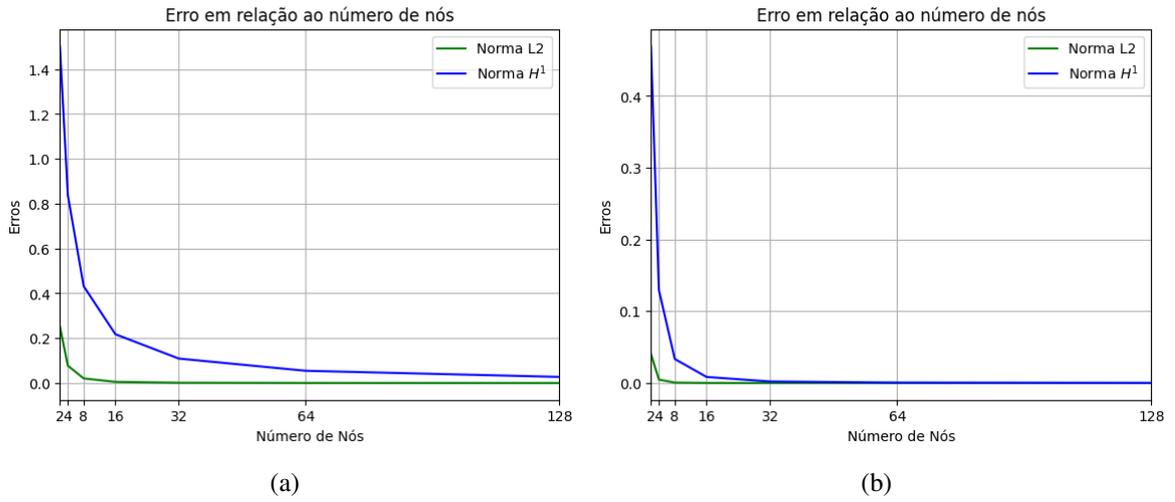


Figura 12: Erros de aproximação para bases lagrangeanas: (a) Lineares (b) Quadráticas

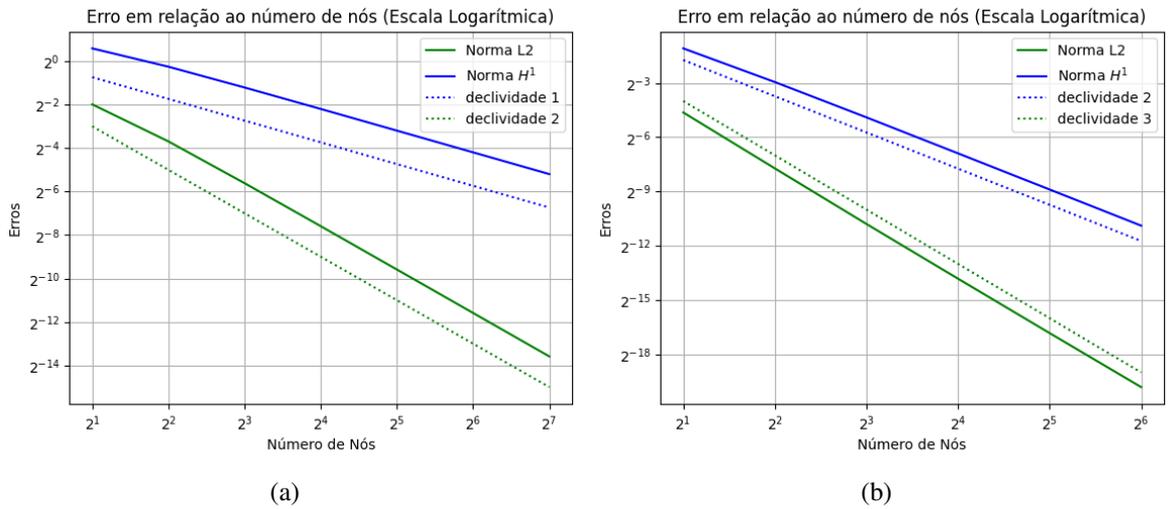


Figura 13: Erros de aproximação para bases lagrangeanas: (a) Lineares (b) Quadráticas

Podemos notar que o uso de bases quadráticas produz, conforme esperado, as taxas de convergência:

$$\|e\|_{L^2} \leq Ch^3$$

$$\|e\|_{H^1} \leq Ch^2$$

### 7.3 Problema 3

Por fim, vamos considerar uma equação de Poisson com condições de contorno de Neumann:

$$\begin{cases} -\nabla^2 u = e^{-\frac{1}{2}(x+y)}, & \text{em } \Omega = x^2 + y^2 < 1 \\ u = y & \text{em } \Gamma_D \\ n \cdot \nabla u = \cos(x) & \text{em } \Gamma_N \end{cases} \quad (13)$$

As soluções de Elementos Finitos para diferentes diâmetros de malha, bem como os vetores gradiente, são dados por:

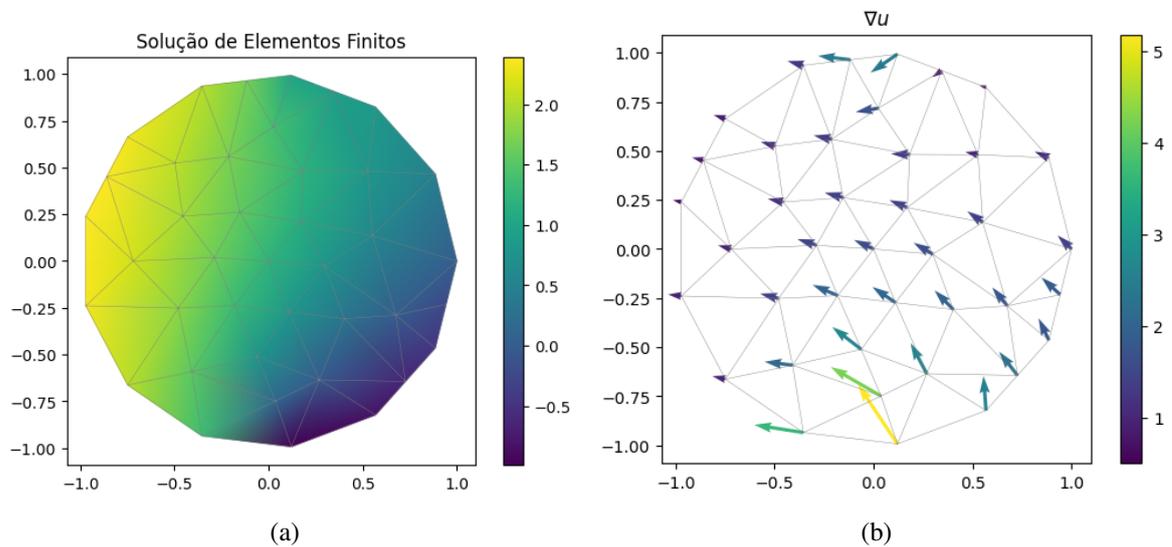


Figura 14: Malha com  $h_{max} = 0.5$

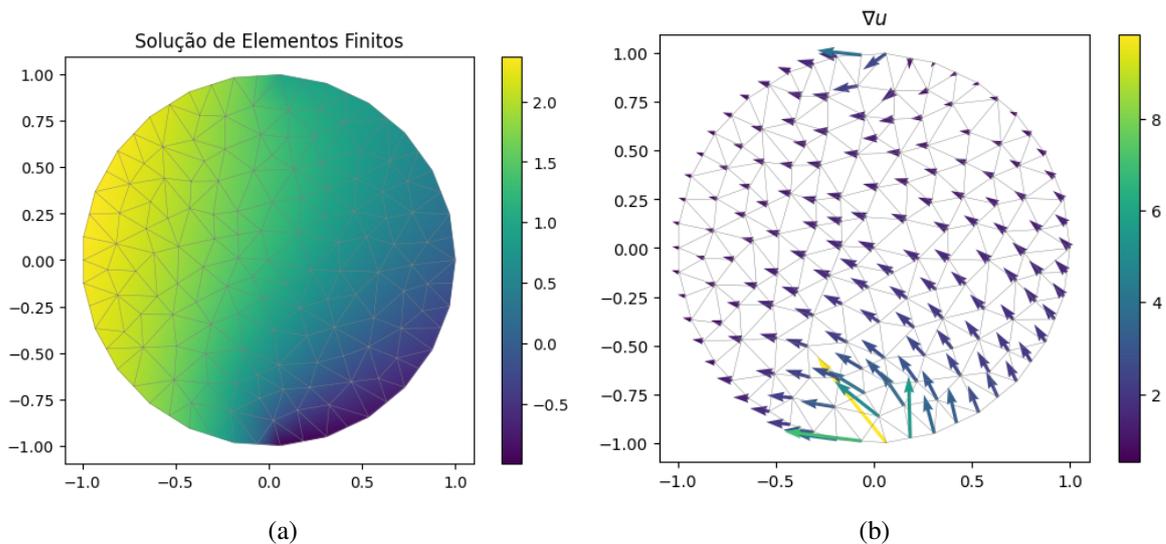


Figura 15: Malha com  $h_{max} = 0.25$

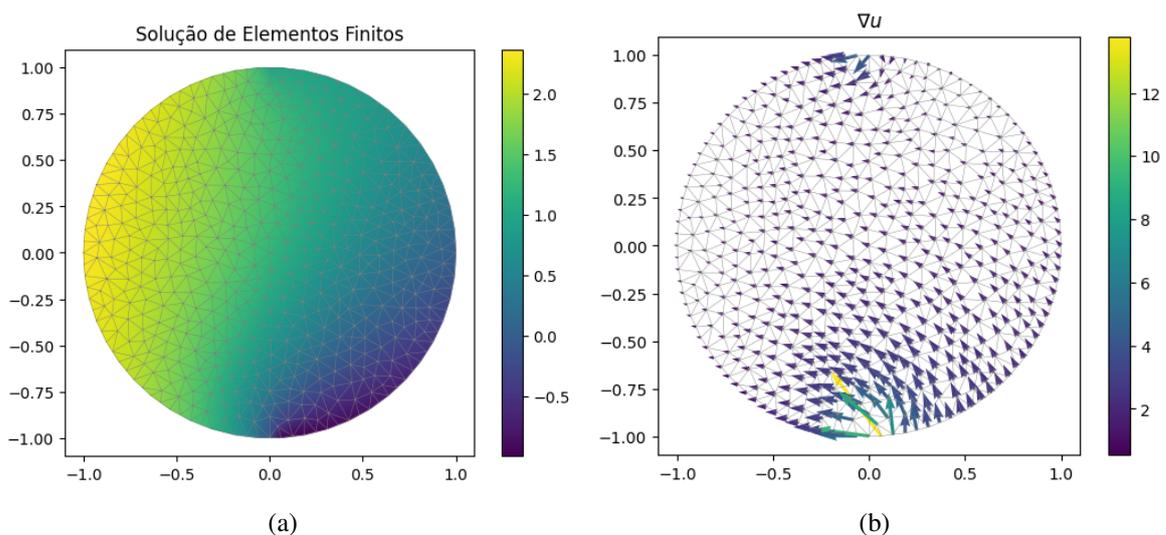


Figura 16: Malha com  $h_{max} = 0.125$

## 8 Conclusão

O emprego do Método dos Elementos Finitos teve um início relativamente recente, na metade do século 20. Por conseguinte, sua formalização rigorosa na literatura está em constante expansão, abrangendo vários resultados da análise funcional e da álgebra linear. O propósito desse trabalho foi destacar os pilares que permitam essa formalização, com foco em problemas de natureza elíptica, e apresentar aproximações conformes para formulações em um campo

utilizando elementos de Lagrange. Do ponto de vista numérico, os problemas computacionais propostos ilustraram satisfatoriamente a aplicação do Método de Galerkin ao problema de Poisson.

A análise de Elementos Finitos aqui discutida pode também ser aplicada em EDPS parabólicas e hiperbólicas, levando em conta suas respectivas modelagens e condições de estabilidade. Os resultados que garantem a existência e unicidade das soluções nessas equações são de certa forma uma generalização do teorema de Lax-Milgram[1, 2].

## Referências

- [1] Maicon Ribeiro Correa. “Métodos de Elementos Finitos Estabilizados para Escoamentos de Darcy e de Stokes-Darcy Acoplados”. Em: (2006).
- [2] Gabriel N. Gatica. *A simple introduction to the Mixed Finite Element Method - Theory and Applications*. Vol. 1. Springer Briefs in Mathematics, 2014.
- [3] Alexandro Marinho Oliveira Aldo Trajano Lourêdo. *Um Primeiro Curso de Álgebra Linear*. Vol. 1. Livraria da Física, 2015.
- [4] Claes Johnson. *Numerical solutions of Partial Differential Equations by the Finite Element Method*. Vol. 1. Cambridge University Press, 1981.
- [5] Pascal Frey. “On Hilbert and Sobolev Spaces”. Em: (2017).
- [6] Mats G. Larson e Fredrik Bengzon. *The Finite Element Method: Theory, Implementation and Applications*. Springer, 1981. URL: [https://www2.math.uconn.edu/~leykekhman/courses/MATH\\_5520/fa\\_2017/Mats%20Larson,%20Bengzon,%20Theory,%20Implementation%20and%20Applications.pdf](https://www2.math.uconn.edu/~leykekhman/courses/MATH_5520/fa_2017/Mats%20Larson,%20Bengzon,%20Theory,%20Implementation%20and%20Applications.pdf).
- [7] Eric B. Becker, Graham F. Carey e J.Tinsley Oden. *Finite Elements: An Introduction*. Vol. 1. Prentice Hall, INC, 1981.
- [8] Anders Logg, Kent-Andre Mardal e Garth N Wells. *Automated Solution of Differential Equations by the Finite Element Method - The FEniCS book*. 2011. URL: <https://launchpadlibrarian.net/83776282/fenics-book-2011-10-27-final.pdf>.
- [9] Petronio Pulino. *Métodos dos Elementos Finitos: Aspectos Teóricos, Computacionais e Aplicações*. 2014.
- [10] Patrick E. Ferrel. “Finite Element Method for PDEs”. Em: (2021). URL: <https://people.maths.ox.ac.uk/farrellp/femvideos/notes.pdf>.