UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA

Mariana Aiko Ichicawa Ogido

Exercícios de Matemática Elementar

Monografia apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos para obtenção de créditos na disciplina Projeto de Extensão Supervisionado, sob a orientação do(a) Prof. Marcelo Firer.

Campinas
2023

Sequências, Limites e Séries

Sumário

Enunciados

1. Um quadrado mágico é uma tabela 3×3, preenchida com números $a_1, a_2, \cdots, a_9$ tais que a soma das entradas em cada linha, em cada coluna e nas duas diagonais é sempre a mesma. Mostre que, se $a_1, a_2, \cdots, a_9$ for uma PA, então é possível construir um quadrado mágico com estes números.

2. Prove que se $\frac{1}{x+y}, \frac{1}{y+z}, \frac{1}{z+x}$ é uma progressão aritmética então z^2, x^2, y^2 também é progressão aritmética.

3. Determine no quadro abaixo:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & & & & \\ 3 & 5 & & & \\ 7 & 9 & 11 & & \\ 13 & 15 & 17 & 19 & \\ 21 & 23 & 25 & 27 & 29 \end{array}$$

   (a) o primeiro elemento da 31ª linha.

   (b) a soma dos elementos da 31ª linha.

4. Considere uma progressão aritmética, tal que o primeiro termo é -11 e a razão é 7. Calcule S_{23} (soma dos 23 primeiros termos da progressão).

5. Considere uma progressão aritmética, tal que o sétimo termo é 31 e o vigésimo termo é 122. Calcule S_{22} (soma dos 22 primeiros termos da progressão).

6. Determine o segundo termo da P.A. em que $a_1 = 2$ e $a_3 = 7$.

7. Determine a razão da P.A. **crescente** $(y + 5, y^2, 3y + 1, ...)$.

8. Determine a tal que a^2, $(a + 1)^2$ e $(a + 5)^2$ sejam três termos consecutivos de uma P.A.

9. Considerando $x \geq 0$ simplifique a expressão $A = \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{\sqrt[3]{x}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{x}}} \cdot \ldots$.

10. Calcule o valor da soma de n parcelas $1 + 11 + 111 + \cdots + 111\ldots1$.

11. A soma de três números em progressão geométrica é $1/4$. Subtraindo-se 1 ao primeiro, eles passam a formar uma progressão aritmética. Calcule-os.

12. Qual o valor de a para que

$$\frac{a}{3} - \frac{1}{4} + \frac{a}{9} - \frac{1}{8} + \frac{a}{27} - \frac{1}{16} + \ldots = 32$$

13. Considere uma progressão geométrica finita, tal que o primeiro termo é 3, a razão é -2 e o último termo vale -6144. Quantos termos tem essa progressão?

14. Qual a quantidade de termos da progressão geométrica $1, 3, 9, 27, \ldots, a_n$ sabendo-se que a soma dos termos é 3280?

15. Sejam x e y números reais, $x \neq 0$, de forma que a sequência $(x, xy, 3x)$ seja uma progressão geométrica alternada. Calcule a razão desta sequência.

16. Qual é o resultado da raiz $\sqrt[3]{2 \cdot \sqrt[3]{2 \cdot \sqrt[3]{2 \cdot \sqrt[3]{2 \cdot \sqrt[3]{2 \cdot \sqrt[3]{2 \cdot \ldots}}}}}}$?

17. Determine e demonstre os seguintes limites, usando apenas a definição de limites e eventualmente limites que já tenhamos demonstrado:

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha n + \beta}{n}$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ constantes.

(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha}{n^3}$, com $\alpha \in \mathbb{R}$ constante.

(c) $\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha}{n^{p/q}}$, com $0 < p/q \in \mathbb{Q}$.

18. Demonstre, a partir da definição, que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

19. Para cada um dos itens a seguir, determine o limite L da sequência em questão. Tendo um candidato para o limite L, demonstre que este é de fato o limite, a partir da definição de limite.

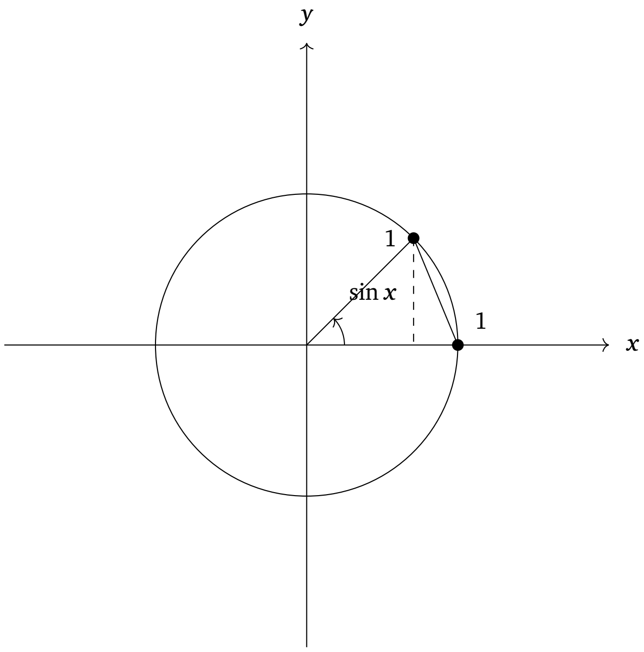
(a) $a_n = 2\frac{1}{n}$;

(b) $b_n = 3 + \frac{1}{n}$;

(c) $c_n = \alpha\frac{1}{n}$, com $\alpha \in \mathbb{R}$ constante;

(d) $d_n = \beta + \frac{1}{n}$, com $\beta \in \mathbb{R}$ constante;

20. (a) Observando a figura a seguir, mostre que, para $0 \le x < \pi/2$, temos que $0 \le \sin(x) < x$. Conclua que $\lim_{n\to\infty} \sin(1/n) = 0$.



(b) Mostre que $\lim_{n\to\infty} \cos(\frac{1}{n}) = 1$. Dica: Utilize o resultado do item (a) da questão.

(c) (**Difícil**) Mostre que $\lim_{n\to\infty} n\sin(\frac{1}{n}) = 1$. Dica: Pense geometricamente e mostre antes que, para $0 < x < \pi/2$, temos que

$$0 < \cos(x) < \frac{\sin(x)}{x} < \frac{1}{\cos(x)}.$$

21. (a) Mostre que, se

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sin(x + a_n) = \sin(x)$$

(b) Mostre que

$$\frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \frac{\sin(\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}} \cos(x + \frac{h}{2})$$

(c) Utilize os itens anteriores para demonstrar que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(x + \frac{1}{n}) - \sin(x)}{\frac{1}{n}} = \cos(x).$$

22. Utilizando as propriedades de limites, demonstre que

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n+2}{2n+5} = \dfrac{3}{2}$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n^2+1} = 0$

23. Seja (b_n) uma sequência com $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. Mostre que, se existe constante $0 < D \in \mathbb{R}$ tais que $-D \leq a_n \leq D$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (ou seja, se a_n é uma sequência limitada), então $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

24. Dê um exemplo de sequências (a_n) e (b_n) que não sejam convergentes (ou seja, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ e $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ não existem) e para as quais existam os limites $\lim\limits_{n\to\infty} a_n + b_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n$ e $\lim\limits_{n\to\infty} a_n/b_n$.

25. Sejam (a_n) e (b_n) sequências **positivas**. Mostre que se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge e $a_n \leq b_n$ então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge (você deve assumir que toda sequência monótona limitada é convergente).

26. Seja (a_n) sequência **positiva**. Mostre que, se existe $0 \leq r < 1$ tal que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r$$

então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. Dica: Utilize o item anterior.

27. (**Não unicidade da representação decimal**) Seja $x \in \mathbb{Q}$ e suponha que

$$b, a_1 a_2 \ldots a_n$$

é representação decimal de x, onde $b \in \mathbb{Z}$ é a parte inteira, $a_i \in \{0, 1, 2, \cdots, 9\}$ e $a_n \neq 0$. Mostre que $b, a_1 a_2 \ldots (a_n - 1)\overline{9}$ também é representação decimal de x.

28. Determine se as séries abaixo são convergentes ou divergentes. Caso seja convergente, determine o limite.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} 3(\frac{2}{5})^{n-1}$;

(b) $\sum_{n=3}^{\infty} 3(\frac{2}{5})^{n}$;

29. Determine duas progressões geométricas (a_n) e (b_n) com razão não nula tais que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \pi$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{1}{\pi}$.

30. Represente na forma de fração os racionais $x = 140,\overline{4}$ e $y = 1,00\overline{3456}$.

Resoluções

1. **Resposta:**

Pelo enunciado, sabemos que o quadrado mágico é uma tabela 3×3, preenchida com números $a_1, a_2, ..., a_9$ tais que a soma das entradas em cada linha, em cada coluna e nas diagonais é sempre a mesma. E que nem sempre é possível montar um quadrado mágico de ordem 3 a partir de qualquer sequência numérica. Isto é fácil de ver, pois se considerarmos a sequência

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11$$

Não é possível organizar os números de modo que a soma de linhas, colunas e diagonais seja sempre a mesma

Mas, se considerarmos os elementos da sequência

$$1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11$$

Conseguimos preencher a tabela 3×3 para formar um quadrado mágico.

10	1	7
3	6	9
5	11	2

Quadrado mágico

Agora, se esta sequência numérica de nove elementos for uma P.A.,temos, sendo r a razão da P.A,

$$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad \boxed{a_5} \quad a_6 \quad a_7 \quad a_8 \quad a_9$$

$$a_{5-r} \qquad a_{5+r}$$

$$a_{5-2r} \qquad a_{5+2r}$$

$$a_{5-3r} \qquad a_{5+3r}$$

$$a_{5-4r} \qquad a_{5+4r}$$

O termo médio a_5 deverá preencher a posição central do quadrado, os termos pares os vértices e os ímpares as posições vagas das linhas e colunas, de acordo com a representação abaixo:

a_2	a_7	a_6
a_9	a_5	a_1
a_4	a_3	a_8

Assim, devemos ter

- $a_2+a_7+a_6 = (a_5-3r)+(a_5+2r)+(a_5+r) = 3a_5$
- $a_9 + a_5 + a_1 = (a_5 + 4r) + a_5 + (a_5 - 4r) = 3a_5$
- $a_4+a_3+a_8 = (a_5-r)+(a_5-2r)+(a_5+3r) = 3a_5$

- $a_2 + a_9 + a_4 = (a_5 - 3r) + (a_5 + 4r) + (a_5 - r) = 3a_5$
- $a_7 + a_5 + a_3 = (a_5 + 2r) + a_5 + (a_5 - 2r) = 3a_5$
- $a_6 + a_1 + a_8 = (a_5 + r) + (a_5 - 4r) + (a_5 + 3r) = 3a_5$
- $a_2 + a_5 + a_8 = (a_5 - 3r) + a_5 + (a_5 + 3r) = 3a_5$
- $a_4 + a_5 + a_6 = (a_5 - r) + a_5 + (a_5 + r) = 3a_5$

Ou seja,

$a_2+a_7+a_6 = a_9+a_5+a_1 = a_4+a_3+a_8 = a_2+a_9+a_4 = a_7+a_5+a_3 = a_6+a_1+a_8 = a_2+a_5+a_8 = a_4+a_5+a_6$

Provando que os elementos de **qualquer PA** podem ser usados para construir **quadrados mágicos de ordem 3**.

Então, se considerarmos a PA:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \text{ e } 9$$

Temos:

2	7	6
9	5	1
4	3	8

ou

4	9	2
3	5	7
8	1	6

ou

8	3	4
1	5	9
6	7	2

Possibilidades de Quadrado mágicos

E os demais quadrados mágicos são obtidos pela rotação de 90^o no sentido horário ou anti-horário.

2. Se

$$\frac{1}{x+y}, \frac{1}{y+z}, \frac{1}{z+x}$$

é uma progressão aritmética, então, o termo central é média aritmética dos termos extremos. Assim,

$$\frac{1}{y+z} = \frac{\frac{1}{x+y} + \frac{1}{z+x}}{2} = \frac{(z+x)+(x+y)}{2(x+y)(z+x)}$$

Portanto,

$$2(x+y)(z+x) = (y+z)[(z+x)+(x+y)]$$

Desenvolvendo os produtos, temos

$$2xz + 2x^2 + 2yz + 2xy = yz + 2xy + y^2 + z^2 + 2xz + yz$$

Note que alguns termos se cancelam, assim

$$\cancel{2xz} + 2x^2 + \cancel{2yz} + \cancel{2xy} = \cancel{2yz} + \cancel{2xy} + y^2 + z^2 + \cancel{2xz}$$

Portanto, temos que

$$2x^2 = y^2 + z^2 \Rightarrow x^2 = \frac{y^2+z^2}{2}$$

Portanto x^2 é o termo médio da PA $= \{z^2, x^2, y^2\}$, como queríamos provar.

3.(a) Antes de tudo, observe que cada uma das linhas é uma progressão aritmética de passo 2.

$$
\begin{array}{lllll}
1 & & & & \\
3 & 5 & & & \\
7 & 9 & 11 & & \\
13 & 15 & 17 & 19 & \\
21 & 23 & 25 & 27 & 29 \\
\vdots & & & & \\
a_{31,1} & a_{31,2} & & \cdots & & a_{31,31}
\end{array}
$$

Para entendermos o comportamento de cada linha, precisamos determinar o termo inicial de cada uma destas linhas.

Vamos considerar o primeiro termo de cada linha, ou seja:

$$
\begin{array}{l}
a_{11} = 1, \quad a_{21} = 3, \quad a_{31} = 7, \\
a_{41} = 13, \quad a_{51} = 21, \quad \cdots
\end{array}
$$

Se considerarmos a sequência temos que

$$
\begin{aligned}
&a_{1,1} = 1, \\
&a_{2,1} = 3 = a_{1,1} + 2 = 1 + 2 \\
&a_{3,1} = 7 = a_{2,1} + 4 = 1 + 2 + 4 \\
&a_{4,1} = 13 = a_{3,1} + 6 = 1 + 2 + 4 + 6 \\
&a_{5,1} = 21 = a_{4,1} + 8 = 1 + \underbrace{(2 + 4 + 6 + 8)}_{\text{P.A. de 4 termos}}.
\end{aligned}
$$

Agora sim sabemos como proceder: a soma de n termos de uma P.A. de passo r começando em a_1 é dada por

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

e no nosso caso, com $a_1 = 2$ e $a_n = a_1 + r \cdot (n-1) = 2 + 2(n-1) = 2n$ obtemos que

$$S_n = \frac{(2+2n)n}{2} = (n+1)n.$$

Em particular, obtemos

$$\begin{aligned}
a_{1,1} &= 1 + \frac{(2 \cdot 0 + 2) \cdot 0}{2} = 1 \\
a_{2,1} &= 1 + \frac{(2 \cdot 1 + 2) \cdot 1}{2} = 3 \\
a_{3,1} &= 1 + \frac{(2 \cdot 2 + 2) \cdot 2}{2} = 7 \\
a_{4,1} &= 1 + \frac{(2 \cdot 3 + 2) \cdot 3}{2} = 13 \\
&\vdots \\
a_{31,1} &= 1 + \frac{(2 \cdot 30 + 2) \cdot 30}{2} = 931
\end{aligned}$$

Portanto, o primeiro termo da 31ª linha é 931.

(b) Para calcularmos S_{31}, que é a soma dos elementos da 31ª linha, precisamos do 1º elemento desta linha ($a_{31,1} = 931$), calculado anteriormente, e de $a_{31,31}$.

Como cada linha é uma P.A. de passo 2, podemos obter o valor de $a_{31,31}$ pela fórmula do termo geral de uma P.A..

$$\begin{aligned}
a_n &= a_1 + (n-1) \cdot r \\
a_{31,31} &= a_{31,1} + (31-1) \cdot 2 \\
a_{31,31} &= 991
\end{aligned}$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
S_n &= \frac{(a_{n,1} + a_{n,n}) \cdot n}{2} \\
S_{31} &= \frac{(931 + 991) \cdot 31}{2} \\
S_{31} &= 29.791
\end{aligned}
$$

4. Para obter a soma S_n dos n primeiros termos de uma P.A. utilizamos a seguinte equação.

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot r}{2}$$

A soma de uma Progressão Aritmética
Muitas vezes é difícil memorizar algumas equações. Assim, é possível deduzir a equação da "*soma dos n primeiros termos de uma P.A.* ", ou seja, S_n.
Seja $a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n$ uma P.A. Somando esses termos, e adicionando-se a ela a soma dos S_n termos da P.A com os termos invertidos,

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + a_n$$
$$S_n = a_n + a_{n-1} + ... + a_3 + a_2 + a_1$$

Note que $a_2 = a_1 + 2, a_3 = a_1 + 2r$, e $a_{n-1} = a_n - r, a_{n-2} = a_n - 2r$. Onde, somando termo a termo as duas equações anteriores obtemos

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + ... + (a_1 + a_n).$$

Assim,
$$2S_n = n(a_1 + a_n)$$

Portanto, a equação da soma dos n termos de uma P.A é

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

Do enunciado, temos que $a_1 = -11$ e $r = 7$. Para calcular S_{23} precisamos primeiro obter o valor de a_{23}. Utilizando a equação geral dos termos de uma P.A. temos:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$
$$a_{23} = -11 + (23-1) \cdot 7 = 143$$

Por fim, podemos calcular S_{23},

$$S_{23} = \frac{(-11 + 143) \cdot 23}{2} = 1.518$$

5. Para descobrir a soma dos primeiros 22 termos de uma P.A. utilizaremos a equação da soma de termos de uma P.A. com $n = 22$.

$$S_{22} = \frac{(a_{22} + a_1) \cdot 22}{2}$$

Assim, temos que descobrir os valores de a_1 e a_{22}.

Primeiramente, para obter a_1 utilizaremos a equação do termo geral da P.A.

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

Partindo então das informações dadas pelo problema, temos que $a_7 = 31$ e $a_{20} = 122$, substituindo essas informações na equação do termo geral, temos que,

$$\begin{aligned} a_7 = a_1 + (7-1) \cdot r &\iff \quad 31 = a_1 + 6r \\ a_{20} = a_1 + (20-1) \cdot r &\iff 122 = a_1 + 19r \end{aligned}$$

Com as duas equações encontradas podemos descobrir os valores de a_1 e r resolvendo o seguinte sistema.

$$\begin{cases} a_1 + 6r = 31 \\ a_1 + 19r = 122 \end{cases}$$

Isolando a_1 na primeira equação, temos que $a_1 = 31 - 6r$. Ao substituirmos a_1 na segunda equação, temos então,

$$31 - 6r + 19r = 122$$

Logo, $r = 7$.

Com essa informação, podemos agora calcular quem é o primeiro termo da sequência substituindo a razão encontrada na equação $a_1 = 31 - 6r$. Assim

$$a_1 = 31 - 6 \cdot 7$$

Logo, $a_1 = -11$.

Temos então os dados necessários para encontrarmos o vigésimo segundo termo da P.A.. Utilizando novamente a equação do termo geral de uma P.A.,

$$a_{22} = -11 + (22 - 1) \cdot 7,$$

temos que, $a_{22} = 136$.

Agora, com todas as informações obtidas podemos finalmente realizar a soma dos 22 primeiros termos da P.A.:

$$S_{22} = \frac{(-11 + 136) \cdot 22}{2} = 1375$$

6. Sejam os termos $a_1 = 2$ e $a_3 = 7$. Então

I) $a_1 = 2$

II) $a_2 = a_1 + r$

III) $a_3 = a_2 + r = (a_1 + r) + r = a_1 + 2r$

Substituindo I e II em III e sabendo que $a_3 = 7$, temos

$$7 = 2 + 2r$$

Logo,

$$r = \frac{5}{2}$$

Assim, de II, temos que

$$a_2 = 2 + \frac{5}{2} = \frac{9}{2}.$$

7. Vamos considerar o n-ésimo termo a_n de uma P.A.. O termo seguinte é obtido somando-se a a_n a razão r e o termo anterior subtraindo r, ou seja:

$$a_{n-1} = a_n - r \textbf{ e } a_{n+1} = a_n + r.$$

Somando estes dois termos obtemos que

$$a_{n-1} + a_{n+1} = (a_n - r) + (a_n + r) = 2a_n,$$

o que equivale a dizermos que

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2},$$

ou seja:

"Um termo qualquer de uma progressão aritmética pode ser obtido através da média aritmética dos seus dois termos vizinhos."

Não é difícil verificar que o mesmo raciocínio vale se considerarmos a_{n-k} e a_{n+k}.

Assim, dada a P.A. $(y + 5, y^2, 3y + 1, ...)$, e considerando a propriedade citada acima, temos que

$$y^2 = \frac{(y + 5) + (3y + 1)}{2} = \frac{4y + 6}{2}$$

Simplificando numerador e denominador

$$y^2 = 2y + 3$$

Logo, temos a seguinte equação de segundo grau

$$y^2 - 2y - 3 = 0$$

Cuja soluções são $y = 3$ ou $y = -1$. Com isso temos duas possibilidades para nossa sequência, uma para cada valor de y encontrado.

- Se $y = -1$, a sequência $(y + 5, y^2, 3y + 1, ...)$ será $(4, 1, -2)$, que é uma sequência que não nos convém, pois ela é **decrescente**, e segundo o enunciado, a sequencia em questão é crescente;
- Se $y = 3$ a sequência $(y + 5, y^2, 3y + 1, ...)$ será $(8, 9, 10)$ que é uma sequência **crescente** como buscamos.

Portanto, $r = 3$.

8. Em uma P.A qualquer, dados três termos sequenciais, temos

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + r = a^2 + r \\ a_{n+1} &= a_n + r = a_{n-1} + 2r = a^2 + 2r \end{aligned}$$

Segundo o enunciado, temos que $a_{n-1} = a^2$ logo

$$a_n = (a + 1)^2 = a^2 + 2a + 1$$

$$a_{n+1} = (a + 5)^2 = a^2 + 10a + 25$$

Assim, igualando as duas expressões para a_n e a_{n+a} obtemos o sistema

$$a^2 + 2a + 1 = a^2 + r \tag{2.1}$$
$$a^2 + 10a + 25 = a^2 + 2r \tag{2.2}$$

Então, substituindo 2.1 em 2.2 e isolando r, obtemos

$$a^2 + 10a + 25 = a^2 + 2a + 1 + r \Rightarrow 8a + 24 = r$$

Como as diferenças entre os termos a_n e a_{n-1} e também entre a_{n+1} e a_n devem ser iguais, podemos igualá-las

$$2a + 1 = 8a + 24$$

e temos que

$$a = -\frac{23}{6}.$$

9. Recordando algumas propriedades da radiciação e potenciação:

- **Multiplicação de potências de mesma base:**
  Quando se multiplica potências de mesma base, é possível manter a base e somar os expoentes.
  $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$
- **Raiz em forma de potência:**
  Como a radiciação é a operação inversa da potenciação, todo radical pode ser escrito na forma de potência.
  $\sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}}$
- **Raiz de uma raiz:**
  Quando temos uma raiz de outra raiz, podemos manter o radicando e multiplicar os índices.
  $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[m \cdot n]{x}$

Com isso, note que

$$A = \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[9]{x} \cdot \sqrt[27]{x} \cdot \ldots$$

E,

$$A = x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{1}{9}} \cdot x^{\frac{1}{27}} \cdot \ldots$$

Por fim, perceba que os expoentes formam a soma de uma P.G infinita com razão $q = 1/3$.

$$A = x^{\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\dots}.$$

Então, temos que

$$A = x^{\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}}.$$

Simplificando o expoente, temos

$$A = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow A = \sqrt{x}.$$

10. Seja S a soma dos elementos de uma sequência de $1, 11, 111, \dots$. Observe que os termos dessa sequência podem ser escritos da seguinte forma

$$\begin{aligned}
a_1 &= 1 \\
a_2 &= 11 = 1 + 10 \\
a_3 &= 111 = 1 + 10 + 10^2 \\
&\vdots \\
a_n &= 111\dots1 = 1 + 10 + 10^2 + \dots + 10^{n-1}
\end{aligned}$$

onde cada termo é a soma de uma P.G. de razão 10 e termo inicial $a_1 = 1$.

$$a_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1} = \frac{10^n - 1}{10 - 1} = \frac{10^n - 1}{9}$$

Então,

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{(10-1)}{9} + \frac{10^2-1}{9} + \cdots + \frac{10^n-1}{9} \\
&= \frac{(10+10^2+\cdots+10^n)-n}{9} \\
&= \frac{10(10^n-1)/(10-1)-n}{9} \\
&= \frac{10(10^n-1)-n}{9^2}.
\end{aligned}
$$

11. Do enunciado, considerando uma P.G = {a, b, c}, temos:

$$a+b+c = \frac{1}{4} \qquad (1)$$

E, subtraindo 1 do primeiro termo, obtemos a P.A = {(a-1), b, c}

Então, considerando a P.A, temos:

$$b = \frac{(a-1)+c}{2}$$

Portanto,

$$a+c-2b = 1 \qquad (2)$$

Considerando (1) e (2), temos:

$$\begin{cases} a+b+c = \frac{1}{4} \\ a-2b+c = 1 \end{cases}$$

E, obtemos o valor de b.

$$3b = -\frac{3}{4} \Rightarrow b = -\frac{1}{4}$$

Considerando que o termo central da P.G pode ser obtido por $b^2 = ac$, temos

$$b^2 = ac \Rightarrow ac = \frac{1}{16} \tag{3}$$

Substituindo o valor de b em (1), temos:

$$a - \frac{1}{4} + c = \frac{1}{4} \longrightarrow a + c = \frac{2}{4}$$

Portanto,

$$a = \frac{1}{2} - c \tag{4}$$

Assim, considerando (3) e (4), temos

$$\left(\frac{1}{2} - c\right)c = \frac{1}{16} \qquad -c^2 + \frac{c}{2} - \frac{1}{16} = 0$$

Portanto, $c = \frac{1}{4}$ e $a = \frac{1}{4}$

Logo,

P.G$= \{\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\}$, com razão $q = -1$,
P.A$= \{-\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\}$, com razão $r = \frac{2}{4}$.

12. Podemos reorganizar a igualdade dada da seguinte forma:

$$\frac{a}{3} + \frac{a}{9} + \frac{a}{27} + \cdots - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \cdots = 32$$

Ou seja, a igualdade é igual à soma de duas P.G.'s infinitas S_{∞_1} e S_{∞_2}.

Sabendo que a razão da $P.G_1$ é $q_1 = \dfrac{1}{3}$, temos que:

$$S_{\infty_1} = \frac{\frac{a}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{a}{2}$$

E que a razão da $P.G_2$ é $q_2 = \frac{1}{2}$ temos que:

$$S_{\infty_2} = \frac{-\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}$$

Como

$$\frac{a}{3} - \frac{1}{4} + \frac{a}{9} - \frac{1}{8} + \frac{a}{27} - \frac{1}{16} + \cdots = S_{\infty_1} + S_{\infty_2} = 32,$$

substituindo os valores encontrados, temos

$$\frac{a}{2} - \frac{1}{2} = 32 \Rightarrow a = 65.$$

13. Considerando as informações do problema, temos que:

$$\begin{aligned} a_1 &= 3 \\ q &= -2 \\ a_n &= -6144 \end{aligned}$$

Sabendo que o termo geral da P.G. é:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Substituindo pelos valores acima, temos

$$-6144 = 3(-2)^{n-1} \Rightarrow -2048 = (-2)^{n-1}$$

Note que $-2048 = (-2)^{11}$. Substituindo, temos

$$(-2)^{11} = (-2)^{n-1}$$

Agora resta comparar os expoentes, pois se ambos os lados da igualdade possuem a mesma base, os expoentes devem ser iguais. Sendo assim,

$$11 = n - 1$$

Portanto, há 12 termos.

14. Relembremos da teoria a expressão para a soma dos termos de uma P.G finita:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

Temos as seguintes informações dadas pelo enunciado do problema:

$$S_n = 3280$$
$$a_1 = 1$$
$$q = 3$$

Com isso, temos que:

$$3280 = \frac{1(3^n - 1)}{3 - 1} = \frac{3^n - 1}{2}$$

Ou seja,

$$3^n = 6560 + 1$$

Note que $6561 = 3^8$. Substituindo, temos

$$3^n = 3^8$$

Como ambos os lados da igualdade possuem a mesma base, os expoentes devem ser iguais. Sendo assim, $n = 8$.

15. Para calcular a razão q de uma P.G basta dividir dois termos consecutivos, $q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Desse modo,

$$q = \frac{xy}{x} = y$$

Usando a propriedade que o produto dos extremos é igual ao quadrado do elemento central, temos

$$(xy)^2 = x \cdot 3x$$

Logo,

$$x^2y^2 = 3x^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{3}$$

Como o enunciado diz que a P.G. é alternada, então a razão deve ser negativa, assim, podemos descartar o valor positivo. Portanto,

$$q = -\sqrt{3}.$$

16. Temos que:

$$\sqrt[3]{2 \cdot \sqrt[3]{2 \cdot \sqrt[3]{2 \cdot \sqrt[3]{2 \cdot \sqrt[3]{2 \cdot \sqrt[3]{2 \ldots}}}}}} = 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\left(\frac{1}{3}\right)^2} \ldots 2^{\left(\frac{1}{3}\right)^n} \ldots$$

Ou seja,

$$\sqrt[3]{2 \cdot \sqrt[3]{2 \cdot \sqrt[3]{2 \cdot \sqrt[3]{2 \cdot \sqrt[3]{2 \cdot \sqrt[3]{2 \ldots}}}}}} = 2^{\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{3^n}+\cdots}$$

Note que as parcelas da soma do expoente formam uma P.G. de infinitos termos. Utilizando a equação da soma infinita de uma P.G.

$$S = \frac{a_1}{1-q}$$

onde $q = \frac{1}{3}$ é a razão da P.G (q pode ser obtido através da divisão de dois termos consecutivos da P.G), temos

$$S = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

Assim, temos que

$$\sqrt[3]{2 \cdot \sqrt[3]{2 \cdot \sqrt[3]{2 \cdot \sqrt[3]{2 \cdot \sqrt[3]{2 \cdot \sqrt[3]{2 \cdot \ldots}}}}}} = 2^{\frac{1}{2}}$$

Portanto,

$$\sqrt[3]{2 \cdot \sqrt[3]{2 \cdot \sqrt[3]{2 \cdot \sqrt[3]{2 \cdot \sqrt[3]{2 \cdot \sqrt[3]{2 \cdot \ldots}}}}}} = \sqrt{2}$$

17.(a) Queremos analisar $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\alpha n + \beta}{n}$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Temos uma sequência $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, onde $a_n = \frac{\alpha n + b}{n}$.

Podemos escrever

$$\frac{\alpha n + \beta}{n} = \frac{\alpha n}{n} + \frac{\beta}{n} = \alpha + \frac{\beta}{n}$$

Perceba que para n suficientemente grande, o termo $\frac{\beta}{n}$ se aproxima de 0 tanto quanto a gente queira. Neste caso, a_n tenderá ao valor α. Temos então $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \alpha$. Demonstremos agora este resultado matematicamente.

Seja $\varepsilon > 0$ arbitrário. Queremos determinar N de modo que, para todo $n > N$ tenhamos $|a_n - \alpha| < \varepsilon$.

Note que

$$|a_n - \alpha| = \left|\alpha + \frac{\beta}{n} - \alpha\right| = \left|\frac{\beta}{n}\right| = \frac{|\beta|}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{|\beta|}{\varepsilon}$$

Então, basta que tomemos $N > \frac{|\beta|}{\varepsilon}$ e o resultado está demonstrado.

(b) Queremos determinar $\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha}{n^3}$, com $\alpha \in \mathbb{R}$. A sequência neste caso é

$$(b_n)_n = \left(\frac{\alpha}{n^3}\right)_n$$

Note que, à medida em que n se torna grande, o termo geral $\frac{\alpha}{n^3}$ tende a zero, afinal o denominador está ficando grande. Demonstremos então que $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

Seja $\varepsilon > 0$ arbitrário. Queremos determinar N tal que, para todo $n > N$, tenhamos $|b_n - 0| < \varepsilon$. Note que

$$\begin{aligned} |b_n - 0| &= \left|\frac{\alpha}{n^3} - 0\right| \\ &= \left|\frac{\alpha}{n^3}\right| = \frac{|\alpha|}{n^3} < \varepsilon \\ &\iff n^3 > \frac{|\alpha|}{\varepsilon} \\ &\iff n > \sqrt[3]{\frac{|\alpha|}{\varepsilon}} \end{aligned}$$

$S_n = 3280$
$a_1 = 1$
$q = 3$

Tomando $N > \sqrt[3]{\frac{|\alpha|}{\varepsilon}}$ o resultado está demonstrado.

(c) Queremos determinar que $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\alpha}{n^{\frac{p}{q}}}$, com $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}_{>0}$.

A sequência é

$$(c_n)_n = \left(\frac{\alpha}{n^{\frac{p}{q}}}\right)_n$$

Primeiro, analisemos a expressão $n^{\frac{p}{q}}$, com $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}_{>0}$ e $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. É bastante simples ver que, neste caso, $n^{\frac{p}{q}}$ é estritamente crescente e estritamente positiva. Portanto, à medida em que n se torna grande, temos que c_n tende a zero, qualquer que seja a constante α. Portanto, mostremos que $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\alpha}{n^{\frac{p}{q}}} = 0$.

Seja $\varepsilon > 0$ arbitrário. Queremos determinar N tal que, para todo $n > N$, vale $|c_n - 0| < \varepsilon$. Note que

$$\begin{aligned} |c_n - 0| = \left|\frac{\alpha}{n^{\frac{p}{q}}}\right| = \frac{|\alpha|}{|n^{\frac{p}{q}}|} = \frac{|\alpha|}{n^{\frac{p}{q}}} < \varepsilon \\ \iff n^{\frac{p}{q}} > \frac{|\alpha|}{\varepsilon} \iff n > \left(\frac{|\alpha|}{\varepsilon}\right)^{\frac{q}{p}} \end{aligned}$$

Note que o expoente $\frac{q}{p}$ está bem definido, isto é, $p \neq 0$. De fato, afinal $\frac{p}{q} \neq 0 \iff p \neq 0$. Portanto, tomando $N > (\frac{|\alpha|}{\varepsilon})^{\frac{q}{p}}$, o resultado fica demonstrado.

18. Queremos mostrar, de acordo com a definição, que

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. A sequência em questão é

$$(a_n)_{n\in\mathbb{Z}>0} = \left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{Z}>0}$$

Com $L = 0$, conforme discutido acima. Consideremos ε um valor positivo arbitrário. Se conseguirmos encontrar N em função desse ε tal que $|a_n - L| < \varepsilon$ para todo $n > N$, a demonstração estará finalizada. Note que

$$|a_n - L| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \underbrace{\left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}}_{n \text{ é positivo!}} < \varepsilon$$

Note que a condição $\frac{1}{n} < \varepsilon$ é equivalente a $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Então, para todo $n > \frac{1}{\varepsilon}$ temos que

$$\frac{1}{n} = |a_n - L| < \varepsilon$$

Então, podemos definir N como o menor inteiro maior que $\frac{1}{\varepsilon}$ e a demonstração está finalizada. Em geral, representamos apenas $N > \frac{1}{\varepsilon}$.

19.(a) Consideremos a sequência

$$(a_n)_{n\in\mathbb{Z}\geq 0} = \left(\frac{2}{n}\right)_{n\in\mathbb{Z}\geq 0}$$

Nosso primeiro objetivo é investigar seu limite, isto é, para qual número a sequência tende quando n cresce arbitrariamente.

$$\begin{aligned}&(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{100}, \dots, a_{1000}, \dots)\\&= \left(2, 1, \frac{2}{3}, \dots, \frac{2}{100}, \dots, \frac{2}{1000}\right)\\&= (2, 1, 0.67, \dots, 0.02, \dots, 0.002, \dots)\end{aligned}$$

Note que a sequencia está tendendo a zero, ou seja, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Façamos a demonstração desse fato. Como sempre, fixemos ε um número positivo arbitrário. O objetivo agora é encontrar $N \in \mathbb{Z}_{>0}$ tal que

$$\forall\ n > N \text{ vale que } |a_n - L| = \left|\frac{2}{n} - 0\right| = \frac{2}{n} < \varepsilon$$

Note que a expressão $\frac{2}{n} < \varepsilon$ é equivalente a $n > \frac{2}{\varepsilon}$. Então, para todo $n > \frac{2}{\varepsilon}$ temos $|a_n - L| = \frac{2}{n} < \varepsilon$. Portanto, basta que definamos $N > \frac{2}{\varepsilon}$ e a demonstração está finalizada.

(b) Consideremos a sequência

$$(b_n)_{n\in\mathbb{Z}\geq 0} = \left(3 + \frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{Z}\geq 0}$$

Primeiro, investiguemos o limite de $(b_n)_n$ quando n cresce indefinidamente. Note que, quando n se torna *suficientemente grande*, o termo $\frac{1}{n}$ tende a 0, restando apenas o 3. (Para se convencer, faça uma lista dos valores $b_1, b_2, \dots, b_{1000}, \dots$ igual feito no item anterior). Sendo assim, nosso candidato à limite é 3. Agora, demonstrando matematicamente, fixemos $\varepsilon > 0$ arbitrário. Para este valor, queremos encontrar $N \in \mathbb{Z}_{>0}$ tal que

$$|b_n - L| = \left|\left(3 + \frac{1}{n}\right) - 3\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

para todo $n > N$. Notando a equivalência $\frac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{e}$ temos que

$$n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow |b_n - L| = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

Então, definimos $N > \frac{1}{\varepsilon}$ e a demonstração está finalizada.

(c) Consideremos a sequência

$$(c_n)_n = \left(\alpha\frac{1}{n}\right)_n$$

Com $\alpha \in \mathbb{R}$. Investiguemos o limite de (c_n). Note que, independente do valor de α, quando n se tornar suficientemente grande, o termo c_n tenderá a zero. Portanto, $L = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$. Mostremos esse fato matematicamente. Seja $\varepsilon > 0$ arbitrário. Precisamos encontrar N tal que, para todo $n > N$ temos $|c_n - L| < \varepsilon$. Note que

$$|c_n - L| = \left|\frac{\alpha}{n} - 0\right| = \left|\frac{\alpha}{n}\right| = \frac{|\alpha|}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{|\alpha|}{\varepsilon}$$

Portanto, basta que tomemos $N > \frac{|\alpha|}{\varepsilon}$ e a demonstração está finalizada.

(d) Consideremos

$$(d_n)_{n\in\mathbb{Z}>0} = \left(\beta + \frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{Z}>0}$$

Com $\beta \in \mathbb{R}$. Usaremos a mesma ideia do item (b).

Note que, à medida que n se torna grande, $\frac{1}{n}$ tende a 0, concluímos então que $\lim_{n\to\infty} d_n = \beta$. Precisamos agora mostrar matematicamente esse fato, de acordo com a definição.

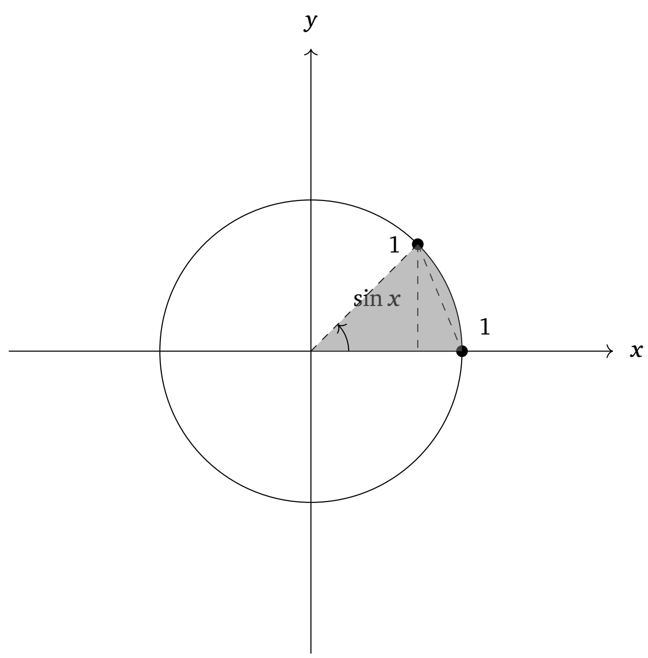
Fixando $\varepsilon > 0$ arbitrário, nosso objetivo é encontrar $N \in \mathbb{Z}_{>0}$ tal que, para todo $n > N$, tenhamos

$$|d_n - \beta| = \left|\beta + \frac{1}{n} - \beta\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

Conforme os casos anteriores, basta que tomemos $N > \frac{1}{\varepsilon}$.

20.(a) A partir da figura, queremos mostrar que $0 \leq \operatorname{sen}(x) \leq x$, para todo $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

Note que a figura representa um círculo de raio 1, afinal o cateto oposto ao ângulo x do triângulo retângulo vale $\operatorname{sen}(x)$:



Agora, note que a área do setor circular de ângulo central x (A_s) é igual a soma da área do triângulo hachurado (A_t) com a área restante hachurada

(A_r), isto é,

$$A_s = A_t + A_r$$

Temos que, para todo $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $A_r \geq 0$. Portanto, é fácil perceber que para todo $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$,

$$A_s = A_t + A_r \geq A_t \geq 0$$

Note que podemos calcular A_t facilmente, afinal é área de um triângulo isósceles. Portanto,

$$A_t = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \text{sen}(x) = \frac{\text{sen}(x)}{2}$$

(Esta expressão para a área já foi demonstrada em listas anteriores). Por outro lado, A_s é a área do setor de um círculo, portanto

$$A_s = \frac{x}{2\pi} \cdot \pi \cdot (1)^2 = \frac{x}{2}$$

Finalmente, para todo $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, como $x >$ sen(x), temos

$$A_s \geq A_t \geq 0 \Rightarrow \frac{x}{2} \geq \frac{\text{sen}(x)}{2} \geq 0 \Rightarrow x \geq \text{sen}(x) \geq 0$$

como queríamos demonstrar.

Note que, para todo $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, temos $0 < \dfrac{1}{n} < \dfrac{\pi}{2}$. Portanto, vale a desigualdade mostrada acima para $x = \dfrac{1}{n}$:

$$\text{para todo } n \in \mathbb{Z}_{>0},\ 0 \leq \text{sen}\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$$

Pelo Teorema do Confronto,

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} 0 \le \lim_{n\to\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right) \le \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \\
\Rightarrow \quad & 0 \le \lim_{n\to\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right) \le 0 \\
\Rightarrow \quad & \lim_{n\to\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right) = 0
\end{aligned}$$

(b) Queremos mostrar que $\lim_{n\to\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right) = 1$. Para isso, adotaremos a seguinte estratégia: mostraremos que

i. Para todo $n \in \mathbb{Z}_{>0}$,
$$\cos\left(\frac{1}{n}\right) = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{n}\right)} = \left(1 - \operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{1}{2}};$$

ii. para todo $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, vale
$$1 - \operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{n}\right) \le \left(1 - \operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{1}{2}} \le 1;$$

iii. $\lim_{n\to\infty} 1 - \operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$

Então, por 2 e 3 serem as hipóteses do Teorema do Confronto, concluiremos que

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{1}{2}} = \lim_{n\to\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right) = 1$$

e o resultado estará demonstrado.

Mostremos o que foi prometido.

i. Pela relação fundamental da trigonometria, temos $\cos(x) = \pm\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(x)}$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Para $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, vale $\cos(x) = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(x)}$. Então, notando que, para $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, vale $\frac{1}{n} \in [0, \frac{\pi}{2}]$, podemos fazer $x = \frac{1}{n}$ e obter

$$\cos\left(\frac{1}{n}\right) = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{n}\right)} = \left(1 - \operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{1}{2}}$$

ii. Por $0 \leq \operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{n}\right) \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, temos

$$0 \leq 1 - \operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{n}\right) \leq 1 \qquad (*)$$

Logo $0 \leq \left(1 - \operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{1}{2}} \leq 1$. Por outro lado, para todo $x \in [0, 1]$, vale $\sqrt{x} \geq x$. Então, por $(*)$, temos $1 - \operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{n}\right) \leq \left(1 - \operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{1}{2}}$. Com as duas desigualdades obtidas, temos

$$1 - \operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{n}\right) \leq \left(1 - \operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{1}{2}} \leq 1$$

iii. Sabemos que

$$\lim_{n \to \infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right) = 0.$$

Sendo

$$(x_n)_n = \left(\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)\right)_n,$$

temos

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right) \cdot \lim_{n\to\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{n}\right)$$
$$= 0 \cdot 0 = 0.$$

Disso, segue das propriedades de limite que

$$\lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty} \operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} 1 - \operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{n}\right)$$
$$= 1 - 0 = 1$$

(c) Nosso objetivo é demonstrar que

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right) = 1.$$

Empregaremos a seguinte estratégia:

i. Mostraremos que, para todo $0 < x < \frac{\pi}{2}$, vale

$$0 < \cos(x) < \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} < \frac{1}{\cos(x)}$$

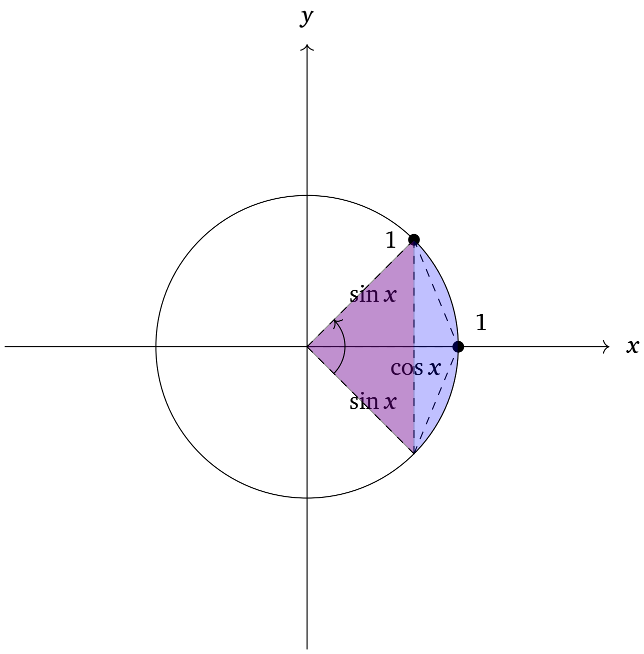
ii. Notando que, para todo $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ temos $0 < \frac{1}{n} < \frac{\pi}{2}$, então podemos fazer $x = \frac{1}{n}$ na expressão do item acima, obtendo, para todo $n \in \mathbb{Z}_{>0}$:

$$0 < \cos\left(\frac{1}{n}\right) < n \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}$$

iii. Lembrando que em b mostramos que $\lim\limits_{n\to\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right) = 1$, segue facilmente pelas propriedades já discutidas que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\cos\left(\frac{1}{n}\right)} = 1$. Estes resultados, juntamente com a desigualdade do item 2, são as hipóteses do Teorema do Confronto. Podemos então concluir que $\lim_{n\to\infty} n \cdot \text{sen}\left(\frac{1}{n}\right) = 1$.

Note que só precisamos demonstrar o item 1: os itens 2 e 3 são consequências do resultado de 1.

Observe a seguinte construção



Note que a área do setor circular (A_s) é igual a soma da área do triângulo hachurado (A_t) com a área hachurada restante (A_r), isto é, $A_s = A_r + A_t$. Então, para $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $A_r > 0$. Portanto,

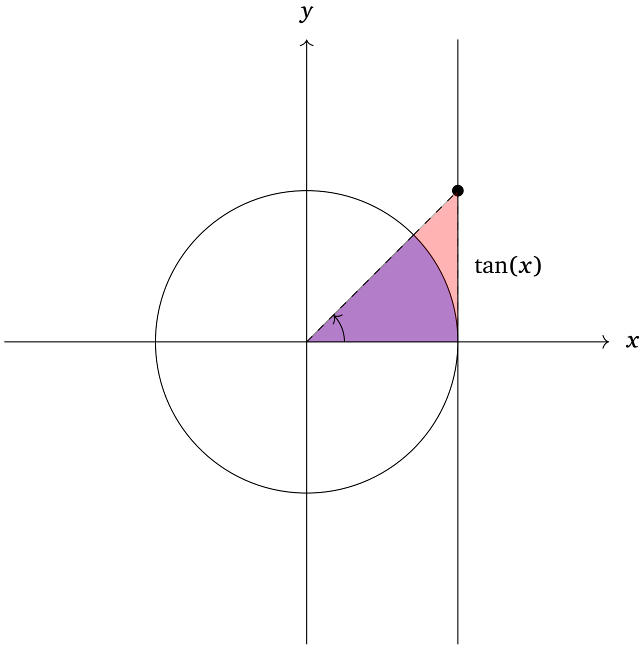
$$A_s > A_t \Rightarrow \frac{2x}{2\pi}\pi(1)^2 > \frac{2\text{sen}(x)\cos(x)}{2}$$

$$\Rightarrow x > \text{sen}(x)\cos(x)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos(x)} > \frac{\text{sen}(x)}{x}$$

para todo $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Por fim, observe a próxima construção



Neste caso notando que a área roxa (A_a) é menor que a área do triângulo (A_t), temos

$$\frac{x}{2\pi}\pi(1)^2 < \frac{\operatorname{tg}(x)}{2} \Rightarrow x < \operatorname{tg}(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$$

$$\Rightarrow \cos(x) < \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$$

$$\Rightarrow \cos(x) < \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} < \frac{1}{\cos(x)}$$

para todo $0 < x < \frac{\pi}{2}$. O resultado está então demonstrado.

21.(a) Dado que $(a_n)_n$ é uma sequência de números reais tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, queremos mostrar que $\lim_{n\to\infty} \operatorname{sen}(x + a_n) = \operatorname{sen}(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Primeiro, convém trocarmos a expressão $\operatorname{sen}(x + a_n)$ por $\operatorname{sen}(x)\cos(a_n) + \operatorname{sen}(a_n)\cos(x)$.

Neste caso, usaremos um resultado bastante intuitivo, mas que provavelmente ainda não foi demonstrado: como as funções seno e cosseno são contínuas (isto é, basicamente funções cujos gráficos é possível desenhar sem tirar o lápis do papel), vale que

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{sen}(a_n) = \operatorname{sen}\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) = \operatorname{sen}(0) = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \cos(a_n) = \cos\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) = \cos(0) = 1$$

Costumamos dizer que "o limite passa para dentro da função".

Sendo assim, como

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}(x)$$

e

$$\lim_{n\to\infty} \cos(x) = \cos(x)$$

(afinal, x não depende de n, então é uma sequência constante), segue que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \operatorname{sen}(x) \lim_{n\to\infty} \cos(a_n) &= \lim_{n\to\infty} \operatorname{sen}(x)\cos(a_n)\\ &= \operatorname{sen}(x)\cdot 1 = \operatorname{sen}(x),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \cos(x) \lim_{n\to\infty} \operatorname{sen}(a_n) &= \lim_{n\to\infty} \cos(x)\operatorname{sen}(a_n)\\ &= \cos(x)\cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty} \big(\operatorname{sen}(x)\cos(a_n) + \operatorname{sen}(a_n)\cos(x)\big)\\ &= \lim_{n\to\infty} \operatorname{sen}(x + a_n)\\ &= \operatorname{sen}(x)\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

(b) Queremos mostrar que

$$\frac{\text{sen}(x+h)-\text{sen}(x)}{h} = \frac{\text{sen}(\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}} \cdot \cos(x+\frac{h}{2}).$$

Note que a equação acima é equivalente a

$$\frac{\text{sen}(x+h)-\text{sen}(x)}{h} = \frac{2\text{sen}(\frac{h}{2})\cos(x+\frac{h}{2})}{h}.$$

Logo, devemos ter

$$\text{sen}(x+h)-\text{sen}(x) = 2\text{sen}\left(\frac{h}{2}\right)\cos\left(x+\frac{h}{2}\right),$$

basta que lembremos da seguinte transformação trigonométrica de soma em produto (uma das chamadas fórmulas de Werner):

$$\text{sen}(p)-\text{sen}(q) = 2\text{sen}\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos(\frac{p+q}{2})$$

Fazendo $p := x+h$ e $q := x$, temos $\dfrac{p-q}{2} = \dfrac{h}{2}$ e $\dfrac{p+q}{2} = x+\dfrac{h}{2}$.

(c) Queremos mostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\text{sen}(x+\frac{1}{n})-\text{sen}(x)}{\frac{1}{n}} = \cos(x),$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Pelo resultado do item b, fazendo $h := \frac{1}{n}$, temos que

$$\frac{\operatorname{sen}(x+\frac{1}{n})-\operatorname{sen}(x)}{\frac{1}{n}} = \frac{\operatorname{sen}(\frac{1}{2n})}{\frac{1}{2n}} \cdot \cos\left(x+\frac{1}{2n}\right).$$

Pelo resultado do item a, temos que

$$\lim_{m\to\infty} \operatorname{sen}\left(x+\frac{1}{m}\right) = \operatorname{sen}(x).$$

Fazendo $m = 2n$, e pelas propriedades de limite, segue

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \cos\left(x+\frac{1}{2n}\right) &= \lim_{n\to\infty} \pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\left(x+\frac{1}{2n}\right)} \\ &= \pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(x)} = \cos(x).\end{aligned}$$

Analisemos agora $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}(\frac{1}{2n})}{\frac{1}{2n}}$. Note que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}(\frac{1}{2n})}{\frac{1}{2n}} = \lim_{n\to\infty} 2n \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2n}\right).$$

Fazendo $m = 2n$, temos, pelo exercício 1c.

$$\lim_{\to\infty} m\operatorname{sen}\left(\frac{1}{m}\right) = 1.$$

Logo,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}(\frac{1}{2n})}{\frac{1}{2n}} \lim_{n\to\infty} \cos\left(x + \frac{1}{2n}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}(\frac{1}{2n})}{\frac{1}{2n}} \cos\left(x + \frac{1}{2n}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}(x + \frac{1}{n}) - \operatorname{sen}(x)}{\frac{1}{n}} =$$

$$= 1 \cdot \cos(x) =$$

$$= \cos(x).$$

22.(a) Queremos mostrar que $\lim_{n\to\infty} \frac{3n+2}{2n+5} = \frac{3}{2}$. A sequência em questão é

$$(a_n)_n = \left(\frac{3n+2}{2n+5}\right)_n$$

Tipicamente, quando queremos determinar o limite de um quociente polinomial na variável x (como é o caso), dividimos o numerador e o denominador do pelo monômio x^k, em que k é o máximo dos graus dos polinômios. Neste caso, o maior grau é 1 e os polinômios estão na variável n, então dividimos por $n^1 = n$. Logo, o termo geral

a_n pode ser visto como

$$a_n = \frac{3n+2}{2n+5} = \frac{\frac{3n+2}{n}}{\frac{2n+5}{n}} = \frac{3+\frac{2}{n}}{2+\frac{5}{n}}$$
$$\Rightarrow (a_n)_n = \left(\frac{3+\frac{2}{n}}{2+\frac{5}{n}}\right)_n$$

temos $\lim\limits_{n\to\infty} 3 + \dfrac{2}{n} = 3$ e $\lim\limits_{n\to\infty} 2 + \dfrac{5}{n} = 2$.

Sabendo que para $(x_n)_n$ e $(y_n)_n$ sequências de números reais tais que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ e } \lim_{n\to\infty} y_n = y,$$

temos $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{x}{y}$, segue que

$$\frac{\lim\limits_{n\to\infty} 3+\frac{2}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty} 2+\frac{5}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3+\frac{2}{n}}{2+\frac{5}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n+2}{2n+5} = \frac{3}{2}.$$

(b) Queremos mostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n^2+1} = 0$. Note que a sequência em questão é

$$(b_n)_n = \left(\frac{n+1}{n^2+1}\right)_n = \left(\frac{\frac{n+1}{n^2}}{\frac{n^2+1}{n^2}}\right)_n = \left(\frac{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}\right)_n$$

Aqui usamos a estratégia apresentada no item a (dividimos numerador e denominador pelo monômio n^2).

Sabemos que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0 = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2}$.

Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} = 0 + 0 = 0.$$

Como $\lim_{n\to\infty} 1 = 1$ (é a sequência constante!), temos

$$\lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{n^2} = 1 + 0 = 1.$$

Por fim,

$$\frac{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{\lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2+1} = \frac{0}{1} = 0.$$

23. Supondo que $(b_n)_n$ seja uma sequência tal que $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ e $(a_n)_n$ seja tal que $-D \leq a_n \leq D$, queremos mostrar que $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$. Ou seja, pela definição de limite, dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, queremos encontrar N_ε tal que, para todo $n > N_\varepsilon$, tenhamos $|a_n b_n - 0| < \varepsilon$. Note o seguinte:

- Temos que $-D \leq a_n \leq D$ é equivalente a

$$|a_n| \leq D, \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \qquad (2.\text{-}3)$$

- Consideremos o valor real $\lambda := \dfrac{\varepsilon}{D}$. Pela definição de $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, **existe** N_λ tal que,

$$\begin{aligned} &\text{para todo } n > N_\lambda,\ |b_n - 0| < \lambda \\ \iff\ &\text{para todo } n > N_\lambda,\ |b_n| < \frac{\varepsilon}{D}.' \end{aligned}$$

- A expressão $|a_n b_n - 0|$ fica mais conveniente escrita na seguinte forma:

$$|a_n b_n - 0| = |a_n b_n| = |a_n||b_n| \qquad (2.\text{-}3)$$

Então, multiplicando a equação **??** por $|a_n|$, para todo $n > N_\lambda$, temos,

$$|b_n||a_n| < \frac{\varepsilon}{D}|a_n|.$$

E, pela equação 2, temos $\frac{\varepsilon}{D}|a_n| \leq \frac{\varepsilon}{D}D = \varepsilon$. Portanto, para todo $n > N_\lambda$, temos,

$$|b_n||a_n| = |a_n b_n - 0| < \frac{\varepsilon}{D}|a_n| \leq \varepsilon.$$

Definindo $N_\varepsilon := N_\lambda$, cumprimos o objetivo exposto no primeiro parágrafo e a demonstração está finalizada.

24. Considere as sequências $(a_n)_n = ((-1)^n)_n$ e $(b_n)_n = ((-1)^{n+1})_n$, com $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Desse modo, temos:

$$(a_n)_n = (a_1, a_2, a_3, \ldots) = (-1, 1, -1, \ldots)$$
$$(b_n)_n = (b_1, b_2, b_3, \ldots) = (1, -1, 1, \ldots)$$

É claro que os limites $\lim_{n\to\infty} a_n$ e $\lim_{n\to\infty} b_n$ não existem, porém,

- para a sequência $(c_n)_n = (a_n + b_n)_n$

$$\begin{aligned}(c_n)_n &= (c_1, c_2, c_3, \ldots)\\ &= (-1+1, 1-1, -1+1, \ldots)\\ &= (0, 0, 0, \ldots)\end{aligned}$$

temos que $\lim_{n\to\infty} c_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} a_n + b_n$ existe.

- para a sequência $(d_n)_n = (a_n b_n)_n$

$$\begin{aligned}(d_n)_n &= (d_1, d_2, d_3, \ldots)\\ &= ((-1)\times(1), (1)\times(-1), (-1)\times(1), \ldots)\\ &= (-1, -1, -1, \ldots)\end{aligned}$$

temos que $\lim_{n\to\infty} d_n = -1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty} a_n b_n$ existe.

- para a sequência $(e_n)_n = \left(\frac{a_n}{b_n}\right)_n$

$$\begin{aligned}(e_n)_n &= (e_1, e_2, e_3, \ldots)\\ &= \left(\frac{-1}{1}, \frac{1}{-1}, \frac{-1}{1}, \ldots\right)\\ &= (-1, -1, -1, \ldots)\end{aligned}$$

temos que $\lim_{n\to\infty} e_n = -1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} e_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ existe.

25. Definições Importantes:

Serie convergente : Dado (a_n) uma sequencia de números reais, a partir dela formamos uma nova sequencia s_n onde:
$s_1 = a_1$
$s_2 = a_1 + a_2$
$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$
.
.
.
$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$
.
.
.

Os números de s_n denomina-se também como reduzidas ou somas parciais da serie $\sum a_n$. Se existir um número real S tal que $\lim_{n\to\infty} s_n = S$ dizemos que a_n converge.

Sequência Limitada: Uma sequência é limitada superiormente (respectivamente inferiormente) quando existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \leq c$ (respectivamente $x_n \geq c$) para todo $n \in \mathbb{N}$, se existir limite sup. e inf. dizemos que a sequencia é limitada.

Resolução:
Para que $\sum a_n$ seja convergente , $\sum a_n$ precisa ser monótona e limitada. Como $\sum a_n$ é positiva ela é não-descrente ou não-crescente , portanto é monótona, resta saber se $\sum a_n$ é limitada.
Se $\sum b_n$ converge, temos que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = k > 0$. Se $b_n > 0$ $\forall n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = k$ segue que $b_n \leq k$ $\forall n$. Se $a_n \leq b_n$ e $b_n \leq k$, por transitividade $a_n \leq k$, $\forall n$.
Como o enunciado diz que a_n é positiva, $0 < a_n < k$ encaixando-se na definição de sequência limitada.
Concluímos então que a_n é monótona e limitada, portanto $\sum a_n$ converge.

26. Tomando (b_n) uma sequência geométrica positiva de termo inicial b_1 e razão r, temos:

$$b_{n+1} = b_n \cdot r.$$

Então,

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = r. \tag{1}$$

Como $0 \leq r < 1$, temos que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é uma P.G infinita que converge.
Considerando nossa hipótese que (b_n) é uma sequên-

cia geomética positiva e tomando (1), temos:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n} = r.$$

Portanto (a_n) é limitada e positiva e, como $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ também converge pelo item anterior.

27. Subtraindo-se

$$a_n - b, a_1 a_2 (a_n - 1)\overline{9}$$

de

$$b, a_1 a_2 \ldots a_n$$

obtém-se:

$$\begin{aligned}(b, a_1 a_2 \ldots a_n) - (b, a_1 a_2 \ldots (a_n - 1)\overline{9}) \\ &= 0, \underbrace{0 \ldots 0}_{n\times}1 - 0, \underbrace{0 \ldots 0}_{n\times}0999 \ldots \\ &= \frac{1}{10^n}(1 - 0,999 \ldots).\end{aligned}$$

Mas,

$$1 - 0,999 \ldots = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n} = 0$$

demonstrando a não unicidade.

28. (a) $\sum_{n=1}^{\infty} 3(\frac{2}{5})^{n-1}$;
Os termos da sequência podem ser expressos como

$$a_1 = 3 \quad a_2 = \frac{6}{5} \quad a_3 = \frac{12}{25} \quad a_4 = \frac{24}{125} \quad \ldots$$

Note que essa sequência é uma P.G. de razão $q = \frac{2}{5}$. Recordemos a equação para o cálculo da soma infinita de P.G. com razão tal que $-1 < q < 1$:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-q}$$

Substituindo os valores $a_1 = 3$ e $q = \frac{2}{5}$:

$$\frac{3}{1-\frac{2}{5}} = \frac{3}{\frac{3}{5}} = \frac{3}{1} \cdot \frac{5}{3} = 5$$

Como essa soma é um número finito, a série converge e seu limite é zero.

(b) $\sum_{n=3}^{\infty} 3(\frac{2}{5})^n$;

Os termos da sequência podem ser expressos como

$$a_1 = \frac{24}{125}, a_2 = \frac{48}{625}, a_3 = \frac{96}{3125}, a_4 = \frac{192}{15625}, \ldots$$

Note que também se trata de uma P.G de razão. Assim, utilizando novamente a fórmula da soma infinita, $q = \frac{2}{5}$

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-q}.$$

Agora substituindo os valores $a_1 = \frac{24}{125}$ e $q = \frac{2}{5}$:

$$\frac{\frac{24}{125}}{1-\frac{2}{5}} = \frac{8}{25}.$$

A soma S_∞ é um valor finito, portanto a série converge e $a_n \to 0$.

29. Para resolver esse exercício, precisamos relembrar de uma coisa importante:

- A soma de uma P.G. infinita quando $0 < \mathbf{Q} < 1$ é: $S_n = \dfrac{a_1}{1-q}$, onde a_1 é o primeiro termo da P.G e $\mathbf{Q}$ é a razão.

Com isso em mente, como queremos que a soma seja π, basta tomarmos a_1 em função de π e manipular a nossa razão $\mathbf{Q}$.
Dois exemplos de solução são:

- $a_1 = \dfrac{\pi}{2}$, $q = \dfrac{1}{2}$ e $b_1 = \dfrac{1}{2\pi}$, $q = \dfrac{1}{2}$,
- $a_1 = \pi - 1$, $q = \dfrac{1}{\pi}$ e $b_1 = \dfrac{\pi-1}{\pi^2}$, $q = \dfrac{1}{\pi}$.

Para conferir a solução, basta usar a fórmula da soma da P.G infinita.

30. Pode-se observar que o número racional $x = 140,\overline{4}$ é uma dízima periódica simples, ou seja, o dígito 4 é uma repetição dentro das casas decimais.Temos que encontrar a geratriz da dízima periódica. A geratriz é o nome dado à fração que deu origem à dízima periódica.

Pode-se então resolver o exercício da seguinte forma para obter a geratriz:

O numerador e o denominador da geratriz devem ser números inteiros. Para se obter o número inteiro do numerador deve-se multiplicar a dízima por um número, até que o segundo dígito do termo periódico fique localizado após a vírgula. Assim, neste caso, o termo repetitivo da dízima é 4 e devemos multiplicar a dízima por 10 para que o segundo 4 do termo repetitivo fique após a vírgula. Deste valor subtraímos a dízima multiplicada por outro número de forma que o termo da dízima após a vírgula fique exatamente igual ao do número anterior. No caso este número é 1. O resultado é então dividido por 9, como apresentado a seguir:

$$9x = 10x - x = 1404,\overline{4} - 140,\overline{4} = 1264$$

Portanto, a geratriz da dízima é dada por

$$\frac{1264}{9}.$$

Para $y = 1,00\overline{3456}$, pode-se observar que os dígitos que se repetem são 3, 4, 5 e 6. Portanto, temos que multiplicar o número por um valor de forma a torná-lo inteiro, até a próxima repetição do termo repetitivo da dízima. Este número é 1000000, pois $1000000 \cdot 1,003456 = 1003456$. Em seguida temos que transformar o termo após a vírgula em um termo cuja dízima fica após a vírgula. Assim, $100y = 100 \cdot 1,003456 = 100,3456$.Agora que os termos da dízima após a vírgula são iguais, podemos subtrair o termo anterior do termo posterior, como mostrado a seguir:

$999900y = 1000000y - 100y = 1003456,\overline{3456} - 100,\overline{3456} = 1003356.$

Pode-se observar que os termos das dízimas após a vírgula são sempre iguais. Realizando-se a divisão por 999900 que é a subtração entre os termos $1000000y - 100y$, obtemos $y = 1,00\overline{3456} = \dfrac{1003356}{999900}$.

Portanto, a geratriz da dízima é dada por

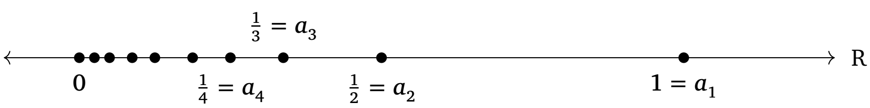
$$\frac{1003356}{999900}.$$

Ideias

As resoluções a seguir são, em geral, aplicações da mesma ideia. Portanto, vamos discutí-la nesta primeira seção e nas próximas vamos apenas aplicá-la nos exercícios.

Estamos estudando sequências convergentes. Intuitivamente, uma sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}\geq 0}$ (denotamos simplesmente $(a_n)_n$ quando o conjunto de índices está claro no contexto) é dita convergente se, à medida que o índice n cresce, seus termos a_n se aproximam *tanto quanto a gente queira* de um valor específico L, o qual chamaremos de o limite da sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}\geq 0}$ e denotaremos $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$. Por exemplo, considere a sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}>0}$ em que n-ésimo termo (isto é, o elemento que está na posição n da sequência) é da forma $\frac{1}{n}$. Representando $(a_n)_n$ em lista ordenada e graficamente, temos

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_{100}, \dots) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{100}, \dots\right)$$



(É comum usarmos a seguinte notação: $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}>0} = \left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{Z}>0}$). Note que esta é uma sequência convergente, afinal, conforme o índice n aumenta, o termo a_n se aproxima de 0. Se quisermos que a_n seja bem próximo de 0, basta que tomemos os índices n bem grandes, concorda?

Não é o caso, por exemplo, da sequência $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}>0} = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{Z}>0}$:

$$(b_1, b_2, b_3, b_4, \dots, b_{99}, b_{100}, \dots) = (-1, 1, -1, 1, \dots, -1, 1, \dots)$$

Perceba que os termos a_n não estão se aproximando de um valor único à medida que n aumenta, portanto $(b_n)_n$ não é convergente.

Apesar de muitas vezes ser claro que uma determinada sequência converge para determinado limite, é **necessário** que demonstremos esse fato de acordo com a definição matemática de convergência. Esta é apresentada a seguir.

Seja $(a_n)_n$ uma sequência de números reais. Então $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ quando, dado $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ um número arbitrário, existe $N \in \mathbb{Z}_{>0}$ tal que

$$n > N \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon.$$

Esta definição pode parecer exageradamente abstrata à primeira vista. Mas, a ideia que ela carrega é simples e inclusive já foi discutida no texto acima.

Suponha que $(a_n)_n$ seja uma sequência e que queiramos mostrar, de acordo com a definição, que seu limite é L. Então, fixando $\varepsilon > 0$ qualquer, deveremos encontrar N tal que, para todo a_n com $n > N$, valha $|a_n - L| < \varepsilon$

[1]. Nosso objetivo agora é entender melhor a expressão $|a_n - L| < \varepsilon$. Existem pelo menos duas interpretações possíveis para ela (claro, ambas equivalentes).

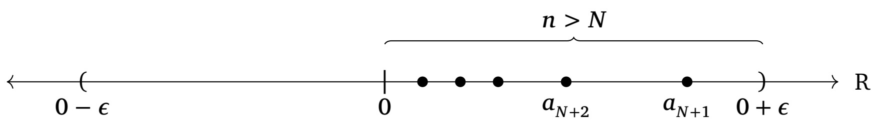
1. Você pode entender que $|x-y|$ representa a *distância* de x à y na reta real (tanto que existem contextos em que essa diferença é chamada de métrica da reta real). Por exemplo, $|14-8| = 6$ e $|14-(-5)| = 19$. Então, no caso em que ε é bem pequeno (lembre-se: este é um número arbitrário, ou seja, pode ser qualquer valor real), dizer que $|a_n - L| < \varepsilon$ quando $n > N$ significa dizer que a distância de a_n à L é bastante pequena quando $n > N$. Ou seja, a sequência $(a_n)_n$ fica tão próxima de L quanto a gente queira.

2. Lembrando que $|x - x_0| < y \iff x_0 - y < x < x_0 + y$ então

$$|a_n - L| < \varepsilon \iff L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$$

   Essa representação nos diz que, quando $n > N$, a_n estará no intervalo aberto $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. Então, se ε for um número pequeno, este intervalo será bem pequeno, "quase"só terá o L. Então, se a_n está nele, só é possível que a_n esteja bem próximo de L, o limite.

Geometricamente a interpretação 2 é a seguinte:



[1]Alguns autores representam esse N como N_ε. Faz sentido, afinal em geral para cada ε que tomamos devemos ter um um N diferente (é como se N estivesse em função de ε)