UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA

MS777 - Projeto Supervisionado

HENRIQUE REIS CAMPOS
MARIANA AIKO ICHICAWA OGIDO

Professor Orientador: LÚCIO SANTOS

Análise da Equação de Black-Scholes

Campinas
Junho/2023

RESUMO

CONTEÚDOS

1. Introdução

Um problema recorrente ao utilizar modelos matemáticos no mercado financeiro é o não correto entendimento dos mesmos. O cálculo da volatilidade implícita de uma opção é um procedimento rotineiro em muitas instituições financeiras, e a utilização correta ou incorreta de modelos para seu cálculo pode gerar lucros ou perdas significativas para essas entidades. Dessa forma, o trabalho tem como objetivo o entendimento da equação de Black-Scholes, com ênfase em seu resultado analítico. Ao longo do trabalho será realizada a dedução da equação, o estudo dos seus parâmetros, o entendimento de conceitos para chegar nos resultados obtidos, bem como a apresentação de uma aplicação prática da equação para o cálculo de volatilidade implícita.

2. Fundamentos

2.1. Opções

O termo *opção* é o nome dado ao instrumento financeiro que tem como base o valor de um ativo subjacente, como ações. Um contrato de opção oferece ao comprador o direito de comprar ou vender - dependendo do tipo de contrato que possui - o ativo subjacente.

Existem dois tipos de opção, a de posição comprada (*call*) e a de posição vendida (*put*). Partindo do pressuposto que, no momento, estamos somente comprando uma das opções, a primeira fornece ao comprador da opção o direito de comprar o ativo subjacente até uma data determinada por um certo preço. Enquanto a segunda fornece o direito de vender o ativo subjacente até determinada data por um preço específico. Essa data é chamada de data de expiração ou maturidade. Já o preço acordado é conhecido como preço de exercício ou *strike price*.

Além disso, existem estilos diferentes de contratos de opções, as opções europeias, as opções americanas e as opções exóticas. As opções europeias são exercidas apenas na data de vencimento. Já as opções americanas podem ser exercidas em qualquer momento anterior ao vencimento. E por fim, as opções exóticas são uma mescla entre as opções europeias e americanas. Em nosso estudo trataremos apenas das opções europeias e americanas.

Para entender melhor o funcionamento desse derivativo financeiro, considere a seguinte situação hipotética: um investidor compra uma opção de *call* com preço de exercício de R$100,00 para comprar 10 ações de uma determinada empresa. A data de vencimento do contrato é em 2 meses, o preço atual do ativo subjacente é de R$95,00, e o preço da opção sobre uma ação é de R$5,00. Assim o investimento inicial é de R$50,00. Caso o preço da ação na data de expiração seja menor que R$100,00 a opção não será exercida, dado que para o investidor não faz sentido pagar um preço superior ao preço oferecido pelo mercado e o investidor sai no prejuízo de R$50,00 referente ao preço pago para adquirir as opções. Por outro lado, se o preço da ação estiver acima do preço de exercício, por exemplo, a ação está a um preço de R$120,00, a opção é exercida. Neste caso, o investidor compra 10 ações, cada uma por R$100,00. Obtendo assim, um lucro de R$15,00 por ação. A seguir são exemplificadas graficamente as 4 operações possíveis de opções:

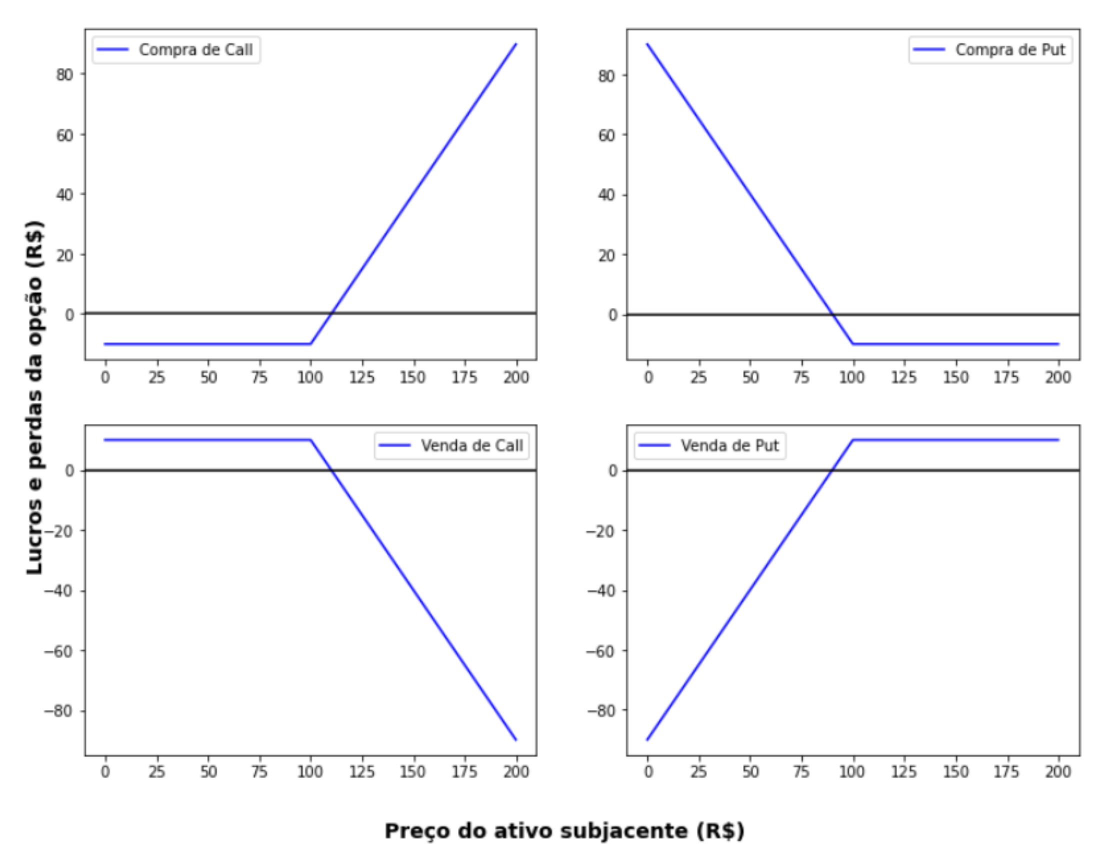

Figura 1: Exemplo de lucros e perdas em relação ao preço do ativo subjacente para compra de call, venda de call, compra de put e venda de put. Sendo o R$100,00 o preço de exercício e R$10,00 o preço da opção.

De uma forma mais técnica, caracterizamos o preço do ativo subjacente com relação ao preço de exercício de três formas. Considerando uma opção de compra de *call*, ela estará "*In The Money*" (ITM), ou em português, dentro do dinheiro, se o preço do ativo subjacente estiver acima de seu preço de exercício. "*At The Money*" (ATM), ou no dinheiro, se o preço do ativo subjacente for o mesmo que o preço de exercício. E, "*Out of The Money*" (OTM), fora do dinheiro, se o preço do ativo subjacente for menor que o preço de exercício.

Simetricamente, temos que a compra de uma opção de *put* estará ITM quando o preço do ativo subjacente estiver abaixo do preço de exercício, ATM quando o preço do ativo subjacente for igual o de exercício for igual, e OTM quando o preço do ativo subjacente for maior que o de exercício.

2.2. Fórmula de Black-Scholes

O preço da opção é o preço para se ter o direito de comprar ou vender um ativo por um preço $u(S,t)$ no tempo futuro, sendo u dependente do preço atual S do ativo X e do tempo t até o vencimento do contrato.

Partimos do princípio de que 'o preço de um derivativo no tempo $t+1$ deve ser "na média" igual ao preço "real" no dia t.' (MARTINEZ).

O preço do derivativo na média é a média no tempo $t+1$ considerando uma variação percentual σ no preço do ativo para cima e para baixo, dado pela seguinte expressão,

$$\frac{u(S-\sigma S,t+1)+u(S+\sigma S,t+1)}{2}.$$

Do ponto de vista de finanças, o valor que ainda não foi gasto na efetivação do contrato, entra em um investimento de risco zero e rende a taxa básica de juros real, denotada por r. E em contrapartida, trazemos o preço do ativo S ao valor presente. Assim, podemos inferir que o preço do derivativo pode ser escrito da seguinte forma

$$(1 + r) \cdot u(\frac{S}{1+r}, t).$$

Do "princípio" de que o preço na média deve ser igual ao preço real no tempo t para o mesmo valor de S, obtemos a seguinte equação

$$\frac{u(S - \sigma S, t + 1) + u(S + \sigma S, t + 1)}{2} = (1 + r) \cdot u(\frac{S}{1+r}, t).$$

Iremos assumir algumas ideias gerais. Primeiramente, consideramos que r é pequeno e, portanto, vamos utilizar a aproximação $\frac{1}{1+r} \approx 1 - r$. Logo,

$$\frac{u(S - \sigma S, t + 1) + u(S + \sigma S, t + 1) - 2u(S, t+1)}{2} = (1 + r)u(S - rS, t) - u(S, t + 1).$$

Além disso, temos que σS e rS são pequenos e substituímos $u(S - \sigma S, t + 1) + u(S + \sigma S, t + 1) - 2u(S, t + 1)$ por $\frac{\partial^2 u}{\partial S^2}(S, t + 1)\sigma^2 S^2$, e $u(S - rS, t)$ por $u(S, t) - \frac{\partial u}{\partial S}(S, t)rS$. Assim,

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial S^2}(S, t + 1)\sigma^2 S^2 = (1 + r)[u(S, t) - \frac{\partial u}{\partial S}(S, t)rS] - u(S, t + 1).$$

Sabemos que r é pequeno, podemos então desprezar r^2,

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial S^2}(S, t + 1)\sigma^2 S^2 = u(S, t) = u(S, t + 1) + ru(S, t) - \frac{\partial u}{\partial S}(S, t)rS$$

ou,

$$u(S, t + 1) - u(S, t) + \frac{\partial u}{\partial S}(S, t)rS + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial S^2}(S, t + 1)\sigma^2 S^2 = ru(S, t).$$

Durante toda a manipulação matemática feita até agora, utilizamos um $\Delta t = 1$ para facilitar o entendimento. Agora, fazendo $\Delta t \to 0$, obtemos

$$\frac{\partial u}{\partial t}(S, t) + \frac{\partial u}{\partial S}(S, t)rS + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial S^2}(S, t)\sigma^2 S^2 = ru(S, t),$$

que é amplamente conhecida como a equação diferencial de Black-Scholes (BLACK and SCHOLES).

De maneira geral, a Equação Diferencial Parcial (EDP) apresentada acima não possui solução analítica. Porém, para o caso particular das opções *call/put* europeias é possível encontrar uma solução analítica para a equação diferencial de Black-Scholes.

Assim, para iniciarmos o cálculo da precificação de opções europeias, introduzimos as seguintes variáveis independentes:

- S: Preço atual da ação;
- K: preço de exercício (*strike price*);
- t: tempo até expiração;
- σ: volatilidade do preço da ação;
- r: taxa de juros livre de risco.

Obs.: Não consideramos o pagamento de dividendos pelo fato de que utilizaremos como base somente opções negociadas na Bolsa de Valores do Brasil. Dessa forma, como a própria Bolsa já realiza o ajuste do preço de exercício de acordo com o pagamento de dividendos, não será necessário considerar o pagamento de dividendos no modelo.

Na tabela a seguir encontramos o comportamento no preço da opção de compra europeia, opção de venda europeia e opção de compra americana quando ocorre uma variação positiva em cada uma das variáveis apresentadas acima.

Variável	Opção de compra europeia	Opção de venda europeia	Opção de compra americana
Preço da ação atual	+	-	+
Preço de exercício	-	+	-
Tempo até expiração	?	?	+
Volatilidade	+	+	+
Taxa de juros livre de risco	+	-	+
Quantia dos dividendos futuros	-	+	-

+ indica que um aumento na variável faz com que o preço da ação auente ou permaneça o mesmo;
- indica que um aumento na variável faz com que o preço da opção diminua ou permaneça o mesmo;
? indica que a relação é incerta.

Tabela 1: Impacto no preço da opção dado um aumento na variável

Tomemos como objeto de estudo as opções europeias, ou seja, as opções que podem ser exercidas apenas na data de expiração (diferentemente das opções americanas que podem ser exercidas em qualquer momento até sua maturidade), os ativos não pagam dividendos, a taxa de juros e a volatilidade são constantes. Definiremos $u_{call}(S, 0) = max\{0, S - K\}$ e, simetricamente, $u_{put}(S, 0) = max\{0, K - S\}$ como sendo as condições necessárias para ser possível a precificação de um opção europeia *call* e *put*, respectivamente.

As soluções mais conhecidas para a equação diferencial de Black-Scholes são as fórmulas de precificação de compra e venda de opções europeias de Black-Scholes, apresentadas a seguir, seja S o preço da ação no momento de compra da opção.

$$u_{call}(S, t) = S \cdot N(d_1) - Ke^{-rt}N(d_2) \text{ e } \quad u_{put}(S, t) = Ke^{-rt}N(-d_2) - S \cdot N(-d_1),$$

onde

$$d_1 = \frac{ln(\frac{S}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})t}{\sigma\sqrt{t}},$$

$$d_2 = \frac{ln(\frac{S}{K}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})t}{\sigma\sqrt{t}} = d_1 - \sigma\sqrt{t}$$

e N é a função de distribuição normal padrão acumulada, definida por

$$N(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\tau^2/2} d\tau.$$

2.3. Gregas

Chamadas comumente de gregas, as derivadas da função $u(S,\ K,\ t,\ \sigma,\ r)$ em relação aos seus parâmetros são utilizadas nos investimentos como medida de risco. O nome "gregas" é originado do fato que são utilizadas letras gregas para definir essas variáveis, como veremos adiante. Cada letra grega mensura uma dimensão diferente do risco em uma posição em opções. São muitas vezes utilizadas como norteadoras para estratégias de investimentos e composição de portfólios. A seguir, estudaremos algumas delas: Delta, Gama, Vega e Teta.

2.3.1. Delta

O Delta é a primeira derivada parcial em relação ao preço do ativo subjacente da fórmula de Black-Scholes. E estima a variação no preço da opção quando o preço do ativo subjacente varia em 1 unidade de medida utilizada, escrito matematicamente temos que o Delta é $\Delta = \frac{\partial u}{\partial S}$.

Na prática, o Delta, passa uma visão geral da probabilidade de uma opção ser exercida. Visto que, opções com Delta mais próximo de 1 estão mais dentro do dinheiro, opções de Delta menores estão mais fora do dinheiro, e opções de Delta igual a 0,5 estão no dinheiro.

Para entender melhor o funcionamento dessa grega, suponha que o delta de uma opção de compra de uma ação é 0,6. Quando o preço da ação anda uma pequena quantidade, o preço da opção move aproximadamente 60% dessa quantidade. Matematicamente, podemos ver que o Delta é a taxa de variação do preço da opção em relação ao preço da ação.

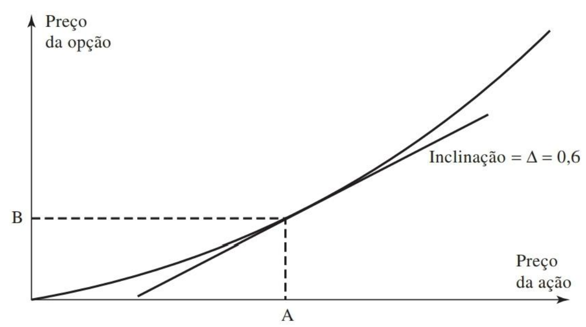

Figura 2: Representação gráfica da grega "Delta".

A seguir, temos uma representação do comportamento do Delta em relação ao preço da ação de uma opção.

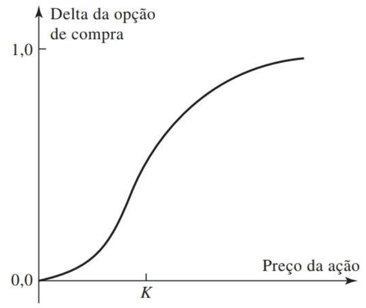

Figura 3: Representação gráfica do comportamento da grega "Delta" em relação ao preço da ação subjacente para o caso de uma opção de compra.

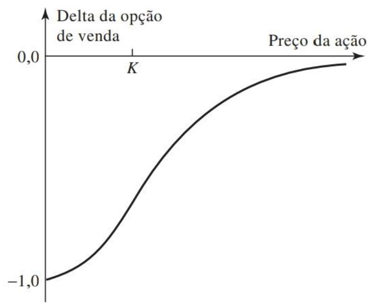

Figura 4: Representação gráfica do comportamento da grega "Delta" em relação ao preço da ação subjacente para o caso de uma opção de venda..

Por esses gráficos, pode-se notar que quanto mais fora do dinheiro, menor o delta, no dinheiro temos que o delta é de 0,5, e o Delta é maior quanto mais dentro do dinheiro.

2.3.2. Gama

O Gama é a segunda derivada parcial do preço da opção com relação ao preço do ativo subjacente, $\Gamma = \frac{\partial^2 u}{\partial S^2}$. Assim, para um Gama pequeno, o Delta varia mais lentamente. Em outras palavras, se o Gama é grande, seja negativamente ou positivamente, então, Δ é muito sensível ao preço do ativo subjacente.

A seguir, pode-se ver o comportamento do valor de um portfólio Π em relação a variação de preços para diferentes valores de Gama.

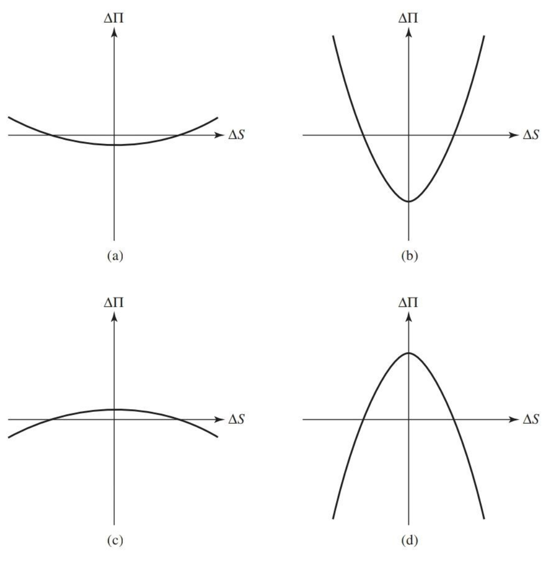

Figura 5: Relação entre $\Delta\Pi$ e ΔS no tempo Δt para um portfólio com (a) Gama ligeiramente positivo, (b) Gama positivo grande, (c) Gama ligeiramente negativo e (d) Gama negativo grande.

2.3.3. Vega

Curiosamente, o nome Vega não é oriundo de uma letra grega, apesar de possuir tal sonoridade, mas sim nome dado a uma constelação. Vega é a primeira derivada parcial em em relação a volatilidade, $\vartheta = \frac{\partial u}{\partial \sigma}$. O Vega apresenta o comportamento do preço da opção dado um aumento de 1% na volatilidade do ativo subjacente.

2.3.4. Teta

Teta é a primeira derivada parcial em relação ao tempo, sendo representado por $\Theta = \frac{\partial u}{\partial t}$. É utilizado comumente como a taxa de decaimento do valor de uma opção em relação à passagem do tempo. Então, Θ representa o risco da passagem de tempo e a perda de valor de uma opção.

3. Estudo de caso

Até o momento, apresentamos a fórmula de Black-Scholes como um modelo matemático de precificação de opções. Entretanto, podemos utilizar tal fórmula de maneira a extrair algumas informações interessantes e essenciais para análises de mercado. Ao utilizar a fórmula de maneira inversa - os preços das opções como *input* - podemos extrair a volatilidade implícita daquela opção em questão como *output*. A seguir, falaremos das diferenças conceituais, no mundo do mercado financeiro, quando utilizamos o sigma (σ) como *input* e como *output*, ou seja, ao calcular a volatilidade por meio de uma série histórica ou pela fórmula invertida de Black-Scholes.

3.1. Volatilidade Histórica vs. Volatilidade Implícita

A volatilidade histórica é uma medida estatística da performance passada. Em outras palavras, é o desvio padrão de retornos de um ativo dentro de um período no tempo. Geralmente, a volatilidade histórica é calculada com base nos retornos diários do ativo analisado.

Por outro lado, a volatilidade implícita é uma projeção da volatilidade futura, esperada pelo mercado, em relação ao preço do ativo analisado. No mercado, a volatilidade implícita é afetada pelas expectativas de cada um dos participantes do mercado, em relação ao ativo. Segue abaixo a implementação computacional para o cálculo da volatilidade implícita dados $S,\ K,\ r,\ u,\ t$ e utilizando o método de Newton-Raphson.

3.2. Implementação prática

No exemplo abaixo, iremos considerar como *input* a opção europeia de compra da ação PETR4, PETRL411, no dia 14/11/2022, com vencimento em 16/12/2022, com as seguintes características:

- $S = R\$\,27,70$ (considerando preço de fechamento a ação PETR4 no dia 14/11/2022)
- $K = R\$\ 28,02$
- $r = 13,696\%$
- $u = R\$\,1,39$
- $t = \frac{22}{252}$

Opções.Net.Br   Ações   Calculadoras   Educacional   Opções   Simulador   Vol implícita   Entrar   Cadastrar-se

Lista: PETR e VALE   Ativo: PETR4   Cotações: Último pregão
Tipo: CALLs / PUTs / TODAS
Vencimentos: 18/11/2022 - 2 d.u.   16/12/2022 - 22 d.u.   20/01/2023 - 46 d.u.   17/02/2023 -

Mínima: R$ 27,09
Máxima: R$ 28,18
R$ 27,70   +2,63%   14/11/2022

Faixa de strikes: 26,52 28,77

10 opções filtradas de um total de 137

Copiar tabela   Exportar para Excel

Ticker	FM	Mod.	Strike	A/I/OTM	Último	Var. (%)	Data/Hora	Núm. de Neg.	Volume Financeiro	Vol. Impl. (%)	Delta	Gamma	Theta ($)	Theta (%)	Vega
PETRL304		E	26,52	ITM	2,33	+40,40	14/11/2022	82	792.658,00	39,3	0,7190	0,1019	-0,0339	-1,46	2,8381
PETRL396		A	26,77	ITM	2,09	+30,60	14/11/2022	127	703.962,00	39,6	0,6908	0,1057	-0,0349	-1,67	2,9661
PETRL331		E	27,02	ITM	1,93	+39,90	14/11/2022	294	775.861,00	39,5	0,6632	0,1098	-0,0354	-1,83	3,0726
PETRL321		A	27,27	ATM	1,80	+44,00	14/11/2022	3201	1.792.868,00	39,3	0,6350	0,1136	-0,0357	-1,98	3,1635
PETRL291		E	27,52	ATM	1,64	+35,50	14/11/2022	890	3.967.593,00	39,4	0,6045	0,1162	-0,0360	-2,20	3,2407
PETRL38		A	27,77	ATM	1,51	+43,80	14/11/2022	897	4.064.905,00	39,4	0,5762	0,1182	-0,0361	-2,39	3,2963
PETRL411		E	28,02	ATM	1,39	+35,00	14/11/2022	743	3.804.385,00	39,3	0,5465	0,1199	-0,0360	-2,59	3,3350
PETRL159		A	28,27	OTM	1,29	+44,90	14/11/2022	508	1.735.967,00	39,2	0,5167	0,1207	-0,0358	-2,77	3,3549
PETRL339		E	28,52	OTM	1,16	+45,00	14/11/2022	1740	13.107.701,00	39,3	0,4860	0,1205	-0,0354	-3,05	3,3545
PETRL165		A	28,77	OTM	1,10	+39,20	14/11/2022	765	674.539,00	39,2	0,4576	0,1203	-0,0348	-3,16	3,3389

Copyright: Opções.Net.Br   contato@opcoes.net.br   Termos de uso - Política de privacidade

Figura 6: Tabela com dados de várias opções da ação PETR4 no dia 14/11/2022 com vencimento em 16/12/2022.

Para o cálculo da taxa de juros livre de risco, r, utilizamos como referência o contrato DI1F23, com vencimento em 01/01/2023 e que no dia 14/11/2022 estava com valor de fechamento igual a 13.696%.

CÓDIGO	VENCIMENTO	TAXA DE JUROS	VARIAÇÃO	DATA/HORA DO ÚLT. NEGÓCIO	VOLUME NEGOCIADO	ESTIMATIVA PARA CDI	DECISÃO COPOM
DI1Z22	01/12/2022	13.658	0	14/11/2022 05:29	166.138,05	13.65	
DI1F23	01/01/2023	13.696	-0.028	14/11/2022 05:44	1.632.139,72	13.65	
DI1G23	01/02/2023	13.736	-0.012	14/11/2022 04:59	33.305,86		
DI1H23	01/03/2023	13.765	-0.045	14/11/2022 05:22	18.897,04		
DI1J23	01/04/2023	13.79	-0.08	14/11/2022 05:35	1.914.657,39		
DI1K23	01/05/2023	13.82	-0.14	14/11/2022 04:52	12.957,50		
DI1M23	01/06/2023	13.875	-0.135	14/11/2022 05:28	4.448,82		
DI1N23	01/07/2023	13.895	-0.15	14/11/2022 05:44	4.259.840,79		

Figura 7: Tabela com a cotação de contratos futuros de DI.

Definidos os parâmetros, segue abaixo a implementação, usando a linguagem de programação *Python* e o método de Newton-Raphson, do cálculo da volatilidade implícita. Na figura abaixo, foram importadas as bibliotecas que serão utilizadas ao longo do código e foi criada uma função que precifica opções de call por meio de Black-Scholes.

```
[ ] import numpy as np
    from scipy.stats import norm

    N_prime = norm.pdf
    N = norm.cdf


    def black_scholes_call(S, K, T, r, sigma):
        '''

        :param S: Asset price
        :param K: Strike price
        :param T: Time to maturity
        :param r: risk-free rate (treasury bills)
        :param sigma: volatility
        :return: call price
        '''

        ###standard black-scholes formula
        d1 = (np.log(S / K) + (r + sigma ** 2 / 2) * T) / (sigma * np.sqrt(T))
        d2 = d1 - sigma * np.sqrt(T)

        call = S * N(d1) - N(d2) * K * np.exp(-r * T)
        return call
```

Figura 8: Início da implementação do algoritmo da Volatilidade Implícita.

O método Newton Raphson é um algoritmo amplamente utilizado para calcular a volatilidade implícita de uma opção. As etapas para o algoritmo genérico são as seguintes:

1) Defina a função como $f(x)$, para qual queremos resolver para $f(x) = 0$;
2) Faça um estimativa inicial para o valor da volatilidade implícita;
3) Faça as seguintes iterações: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
4) Interrompa o código se: $|f(x_n)| < \epsilon$, onde ϵ é a tolerância definida para o problema.

Aplicando os passos acima para o problema da volatilidade implícita, temos que:

1) $u(\sigma) = V_{BS\sigma} - V_{market}$ (onde $V_{BS\sigma}$ é a volatilidade calculada pela equação de Black-Scholes, V_{market} é a volatilidade precificada pelo mercado);
2) Estimativa inicial: $\sigma_0 = 0.30$ (escolhido por conveniência);
3) Iterações: $\sigma_{n+1} = \sigma_n - \frac{V_{BS\sigma} - V_{market}}{\frac{\partial V_{BS\sigma}}{\partial u(\sigma)}}$;
4) Se $|V_{BS\sigma} - V_{market}| < \epsilon$, retorno σ_n

Para implementar esse pseudo-código em *Python*, primeiro é necessário criar uma função que calcule a derivada parcial do valor de uma opção *call* em relação à volatilidade. Esta derivada parcial é comumente referida como Vega, como explicado na parte 2.3.3.

$$\vartheta = S\sqrt{T}N'(d1)$$

A variável $d1$ em ϑ é a mesma $d1 = \frac{ln(\frac{S}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}$ calculada pela fórmula de Black-Scholes e N' é a função densidade de probabilidade para uma normal padrão.

```python
def vega(S, K, T, r, sigma):
    '''

    :param S: Asset price
    :param K: Strike price
    :param T: Time to Maturity
    :param r: risk-free rate (treasury bills)
    :param sigma: volatility
    :return: partial derivative w.r.t volatility
    '''

    ### calculating d1 from black scholes
    d1 = (np.log(S / K) + (r + sigma ** 2 / 2) * T) / sigma * np.sqrt(T)

    # see hull derivatives chapter on greeks for reference
    vega = S * N_prime(d1) * np.sqrt(T)
    return vega
```

Figura 9: Implementação da função que realiza o cálculo do Vega.

Feita a implementação da função que realiza o cálculo de ϑ, criamos uma função que realiza a implementação do algoritmo de Newton-Raphson.

```python
def implied_volatility_call(C, S, K, T, r, tol=0.0001,
                            max_iterations=100):
    '''

    :param C: Observed call price
    :param S: Asset price
    :param K: Strike Price
    :param T: Time to Maturity
    :param r: riskfree rate
    :param tol: error tolerance in result
    :param max_iterations: max iterations to update vol
    :return: implied volatility in percent
    '''

    ### assigning initial volatility estimate for input in Newton_rap procedure
    sigma = 0.3

    for i in range(max_iterations):

        ### calculate difference between blackscholes price and market price with
        ### iteratively updated volality estimate
        diff = black_scholes_call(S, K, T, r, sigma) - C

        ###break if difference is less than specified tolerance level
        if abs(diff) < tol:
            print(f'Found on {i}th iteration')
            print(f'Difference is equal to {diff}')
            break

        ### use newton rapshon to update the estimate
        sigma = sigma - diff / vega(S, K, T, r, sigma)

    return sigma
```

Figura 10: Função que realiza a implementação do método de Newton-Raphson.

4. Resultados e Conclusões

Como *output* da implementação, temos o valor de volatilidade implícita de 42.41%, valor próximo da volatilidade implícita, considerada pelo site de onde foram tiradas as informações para o cálculo de tal parâmetro, de 39.30%.

```
observed_price = 2.33
S = 31.12
K = 31.52
T = 25/252
r = 0.13734

imp_vol = implied_volatility_call(observed_price, S, K, T, r)
print('Implied volatility using Newton Rapshon is: %.2f%%' % (imp_vol * 100))
```

```
Found on 2th iteration
Difference is equal to -1.6202672840748278e-05
Implied volatility using Newton Rapshon is: 59.36%
```

Figura 11: Resultados obtidos ao implementar o algoritmo de Newton-Raphson para cálculo da Volatilidade Implícita. A variável "observed_price" é análoga a variável "C" definida na implementação da função "implied_volatility".

Apesar de no mercado financeiro os preços das opções serem calculados de diferentes maneiras por cada uma das partes que o compoẽm, o modelo de precificação de Black-Scholes se mostra como uma ferramenta simples e eficiente para se ter uma ideia do sentimento do mercado em relação a volatilidade de preços de um ativo.

O fato do modelo de precificação se mostrar uma ferramenta confiável é de extrema importância. No exemplo prático que implementamos, o cálculo equivocado da volatilidade implícita (tanto para cima quanto para baixo), pode distorcer o valor do tempo na precificação da opção, o que pode afetar no sucesso de uma negociação, gerando, assim, prejuízos e lucros para diferentes integrantes do mercado devido às imprecisões nos modelos de precificação adotados.

5. Referências

HULL, John C. **Opções, futuros e outros derivativos**. Bookman Editora, 2016.

BLACK, Fischer and SCHOLES, Myron. **The Pricing of Options and Corporate Liabilities**. The Journal of Political Economy, Vol. 81, No. 3 (May - Jun., 1973), pp. 637-654

MARTINEZ, J. M., Black-Scholes. Relatório de pesquisa IMECC.

Opções.Net.Br. Disponível em: https://opcoes.net.br/opcoes/bovespa/PETR4. Acesso em 14/11/2022.

Cotações - Juros Futuros. InfoMoney. Disponível em: https://www.infomoney.com.br/ferramentas/juros-futuros-di/. Acesso em 14/11/2022.