UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

O PROBLEMA DA DESIGNAÇÃO

MS777 - Projeto Supervisionado I

Autora: Jéssica Moia de Oliveira - RA: 140692

Orientadora: Profa. Dra. Kelly Cristina Poldi

Campinas/SP

Novembro de 2015

Resumo

Nesse projeto é apresentado o Problema da Designação, um problema de Programação Linear Inteira que tem como objetivo alocar agentes a tarefas de maneira ótima, considerando que cada agente só pode executar uma tarefa e vice-versa. É analisada a modelagem para o problema, bem como algumas características e um método de solução bastante eficiente, conhecido como método húngaro. Com o algoritmo para esse método, é possível estudar alguns exemplos e seus resultados obtidos computacionalmente.
Palavras-chave: Problema da Designação; Programação Inteira; Método Húngaro.

Abstract

In this project we present the Assignment Problem, an Integer Linear Programming problem which aims to assign agents to certain tasks in the best way possible, considering that each agent can only perform one task and vice versa. The modeling to the problem is analyzed, along with some characteristics and a very efficient solution method, known as the Hungarian method. With the algorithm for this method, it is possible to study some examples and its computationally obtained results.
Keywords: Assignment Problem; Integer Programming; Hungarian Method.

1 Introdução

O Problema da Designação, também chamado de Problema de Alocação ou Atribuição, é um problema de Programação Linear Inteira, que se caracteriza por alocar uma quantidade de agentes a uma mesma quantidade de tarefas.

Cada agente tem a capacidade de executar todas as tarefas e se associa com cada uma por um custo determinado, entretanto ele deve executar exclusivamente uma. Dessa forma cada agente executa uma tarefa e cada tarefa é executada por um agente. O objetivo final é, então, determinar como todas as designações devem ser realizadas de maneira a minimizar o custo total.

Alguns exemplos deste tipo de problema são: designar pessoas a tarefas (escalar vendedores para certas regiões, enfermeiros para postos de atendimento etc), máquinas para localizações e produtos para fábricas. Outras aplicações serão comentadas na seção 2.4.

2 O problema

Aqui será apresentada a definição do Problema da Designação *(Assignment Problem)* e serão feitas algumas considerações sobre o mesmo.

2.1 Definição

O Problema da Designação pode ser entendido como o problema de alocar n agentes a n tarefas, onde cada agente i é associado à tarefa j segundo um custo c_{ij}. A variável binária $x_{ij} = 1$ significa que o agente i recebeu a tarefa j como designação no esquema de trabalho, e 0 em caso contrário (GOLDBARG; LUNA, 2005). A solução do problema é a que minimiza a soma dos custos associados.

Assim, o modelo matemático para o Problema da Designação pode ser escrito como:

$$\text{minimizar} \qquad \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \tag{1}$$

$$\text{sujeito a:} \qquad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad i = 1, ..., n \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad j = 1, ..., n \tag{3}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad i = 1, ..., n; \; j = 1, ..., n \tag{4}$$

A função objetivo (1) minimiza o custo total das tarefas atribuídas aos agentes. O conjunto de restrições (2) garante que cada agente executará uma única tarefa e o conjunto de restrições (3) assegura que cada tarefa será executada exatamente uma vez.

2.2 O caso generalizado

Um caso que não será estudado aqui mas que vale ser apresentado é o chamado Problema da Designação Generalizado *(Generalized Assignment Problem)*. Nele, existem m agentes e n tarefas (com $m < n$) onde cada tarefa deve ser executada por um único agente e cada agente pode executar mais de uma tarefa.

Cada agente i gasta a_{ij} de um dado recurso (por exemplo: tempo) para executar a tarefa j, e cada agente dispõe de b_i unidades do recurso. Novamente, a variável de decisão x_{ij} é binária e vale 1 se a tarefa j é designada ao agente i e 0 caso contrário.

A modelagem desse caso é apresentada a seguir.

$$\text{minimizar} \quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \tag{5}$$

$$\text{sujeito a:} \quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1 \quad j = 1, ..., n \tag{6}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{ij} \leqslant b_i \quad i = 1, ..., n \tag{7}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad i = 1, ..., m;\ j = 1, ..., n \tag{8}$$

A função objetivo (5) minimiza o custo total das tarefas atribuídas aos agentes. O conjunto de restrições (6) garante que cada tarefa será executada exatamente uma vez. O conjunto de restrições (7) assegura que a capacidade de cada agente não é excedida.

2.3 O problema da designação como um problema de transporte

O Problema da Designação é um caso particular do chamado Problema de Transporte Balanceado, que pode ser descrito como o problema de determinar o menor custo (ou maior lucro) em transportar produtos de m origens para n destinos. Existe também o custo c_{ij} associado ao transporte de um produto da origem i para o destino j.

Esse problema é modelado da seguinte forma:

$$\text{minimizar} \quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \tag{9}$$

$$\text{sujeito a:} \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = s_{ij} \quad i = 1, ..., n \tag{10}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_{ij} \quad j = 1, ..., n \tag{11}$$

$$x_{ij} \geqslant 0 \quad i = 1, ..., m;\ j = 1, ..., n \tag{12}$$

No modelo (9)-(12), s_{ij} e d_{ij} estão relacionadas com a disponibilidade e demanda de cada produto, respectivamente. É válido apontar também que aqui a variável de decisão x_{ij} não é binária.

Portanto, para reduzir o Problema do Transporte a um Problema de Designação basta fazer $s_{ij} = 1$, $d_{ij} = 1$ e definir x_{ij} como variável binária.

O Problema de Transporte é um caso específico de um Problema de Programação Linear, portanto o Problema da Designação também é. Mais que isso, se um problema possui variáveis que só assumem valores no conjunto dos inteiros, como o da Designação, este pertence à uma subclasse da Programação Linear, chamada de Programação Linear Inteira ou simplesmente Programação

Inteira.

2.4 Aplicações

A seguir estão listadas algumas aplicações do Problema da Designação, encontradas em Ahuja, Magnanti e Orlin (1993).

- Uma firma contratou n graduados para preencher n empregos vagos. Baseando-se em testes de aptidão, notas e cartas de recomendação a firma atribuiu um índice de proficiência u_{ij} que se refere a colocar o candidato i na ocupação j. O objetivo é identificar uma designação que maximiza a pontuação de proficiência total sobre todos os empregos.
- Um técnico de natação deve selecionar de seus oito melhores nadadores um time de revezamento de quatro pessoas, onde cada um deve nadar uma de quatro modalidades (costas, peito, borboleta e estilo livre). O técnico sabe o tempo de cada nadador em cada modalidade. O problema é identificar o time de quatro melhores nadadores dos oito disponíveis. Claramente, a soma dos tempos obtidos combinando de maneira ótima quatro dos oito nadadores às quatro modalidades fornece o menor tempo factível e o time correspondente é o melhor time.
- Nas forças armadas, muitos homens e mulheres são qualificados para realizar trabalhos específicos. As forças armadas gostariam de designar o seu pessoal em serviço aos trabalhos de maneira a minimizar custos com a mudança. Normas gerais especificam as qualificações necessárias do pessoal para as tarefas e identificar ocupações que precisam ser preenchidas. Normas políticas determinam atribuições admissíveis que refletem qualificações de trabalho e necessidades de pessoal. Para uma atribuição admissível, o custo é o custo de mover a pessoa, sua família e seus pertences à nova residência. Nesse caso o problema de designação é encontrar uma atribuição admissível que minimiza esse custo.

3 Um método de solução

Como já foi dito anteriormente, o Problema da Designação é um caso particular do Problema do Transporte, no qual os agentes representam as origens e as tarefas representam os destinos. Pelo fato das disponibilidades e demandas serem iguais a 1, desenvolveu-se um algoritmo de solução simples denomidado método húngaro, descrito a seguir.

3.1 O método húngaro

O método húngaro é um método de solução bastante eficiente que segue os seguintes passos:

1. Primeiro, representar os custos c_{ij} que relacionam o agente i à tarefa j em uma matriz $n \times n$. Encontrar o mínimo de cada linha na matriz e construir uma nova matriz subtraindo o valor mínimo da linha. Nesta nova matriz, encontrar o mínimo de cada coluna e construir uma nova matriz (matriz de custos reduzidos) subtraindo o mínimo da coluna.

2. Desenhar o número mínimo de linhas (horizontais e verticais) para que todos os zeros sejam cobertos. Se n linhas são necessárias, então a solução é ótima (são os n zeros cobertos). Se um número menor que n linhas são necessárias, ir para o passo 3.
3. Identificar o menor valor não zero, k, na matriz de custos reduzidos que não esteja coberto pelas linhas desenhadas no Passo 2. Subtrair k de cada elemento não coberto e somar k em cada elemento coberto por duas linhas. Voltar para o Passo 2.

Para ilustrar esse método, serão considerados dois exemplos encontrados em Taha (2008).

3.1.1 Exemplo do método

Os três filhos de Joe Klyne - John, Karen e Terri - querem ganhar algum dinheiro para gastar durante uma excursão da escola até o zoológico local. O Sr. Klyne escolheu três tarefas para seus filhos: 1) cortar a grama; 2) pintar a porta da garagem; e 3) lavar os carros da família. Para evitar a concorrência prevista entre os irmãos, ele pediu que seus filhos apresentassem propostas (fechadas) do que eles consideravam que fosse um pagamento justo para cada uma das três tarefas. Ficou combinado que os três concordariam com a decisão do pai sobre quem executaria qual tarefa. A Tabela 1 resume as propostas recebidas. Com base nessas informações, como o Sr. Klyne deve designar as tarefas?

Tabela 1: Problema de Designação do Sr. Klyne

	Cortar	Pintar	Lavar
John	\$15	\$10	\$9
Karen	\$9	\$15	\$10
Terri	\$10	\$12	\$8

Podemos escrever este problema como o seguinte problema de programação linear inteira:

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimizar} & 15x_{11} + 10x_{12} + 9x_{13} + 9x_{21} + 15x_{22} + 10x_{23} + 10x_{31} + 12x_{32} + 8x_{33} \\
\text{sujeito a:} & \sum_{j=1}^{3} x_{ij} = 1 \quad i = 1,2,3 \\
& \sum_{i=1}^{3} x_{ij} = 1 \quad j = 1,2,3 \\
& x_{ij} \in \{0,1\} \quad i = 1,2,3;\ j = 1,2,3
\end{array}
$$

Nesse caso, a variável de decisão x_{ij} relaciona o filho i à tarefa j, onde $i = 1$ representa o filho John, $i = 2$ representa Karen e $i = 3$ representa Terri; $j = 1$ representa a tarefa de cortar a grama, $j = 2$ representa pintar a porta da garagem e $j = 3$ representa lavar os carros da família.

A solução será determinada seguindo os passos do método húngaro.

Tabela 2: Fazendo o Passo 1, reduzindo as linhas

	Cortar	Pintar	Lavar	Menor
John	15	10	**9**	9
Karen	**9**	15	10	9
Terri	10	12	**8**	8

Identificado o menor elemento de cada linha, basta subtraí-lo e então analisar as colunas:

Tabela 3: Fazendo o Passo 1, reduzindo as colunas

	Cortar	Pintar	Lavar
John	6	**1**	**0**
Karen	**0**	6	1
Terri	2	4	**0**
Menor	0	1	0

Identificado o menor elemento de cada coluna, é necessário subtraí-lo e daí realiza-se o Passo 2, conforme ilustrado na Tabela 4:

Tabela 4: Fazendo o Passo 2

	Cortar	Pintar	Lavar
John	6	**0**	0
Karen	**0**	5	1
Terri	2	3	**0**

Portanto, como são necessárias três linhas para que os zeros fiquem cobertos, não é necessário fazer o Passo 3 e a solução ótima para esse Problema da Designação é: $x_{12} = 1$, ou seja, John irá pintar a porta da garagem; $x_{21} = 1$, ou seja, Karen irá cortar a grama e $x_{33} = 1$, ou seja, Terri ficará resposável por lavar os carros da família.

Dessa forma o custo total ótimo é, de acordo com a Tabela 1, $C^* = 9 + 10 + 8 = \$27$.

O segundo exemplo, também de Taha (2008), ilustra um caso no qual é necessário utilizar o Passo 3 do algoritmo.

3.1.2 Outro exemplo

Suponha que a situação discutida no Exemplo 3.1.1 seja estendida para quatro filhos e quatro tarefas. A Tabela 5 resume os elementos de custo do problema.

Tabela 5: Exemplo de designação

	Tarefa 1	Tarefa 2	Tarefa 3	Tarefa 4
Filho 1	\$1	\$4	\$6	\$3
Filho 2	\$9	\$7	\$10	\$9
Filho 3	\$4	\$5	\$11	\$7
Filho 4	\$8	\$7	\$8	\$5

O modelo matemático para este exemplo é dado por:

$$\begin{aligned}
\text{minimizar} \quad & 1x_{11} + 4x_{12} + 6x_{13} + 3x_{14} + 9x_{21} + 7x_{22} + 10x_{23} + 9x_{24} \\
& +4x_{31} + 5x_{32} + 11x_{33} + 7x_{34} + 8x_{41} + 7x_{42} + 8x_{43} + 5x_{44} \\
\text{sujeito a:} \quad & \sum_{j=1}^{4} x_{ij} = 1 \quad i = 1, ..., 4 \\
& \sum_{i=1}^{4} x_{ij} = 1 \quad j = 1, ..., 4 \\
& x_{ij} \in \{0, 1\} \quad i = 1, ..., 4; \; j = 1, ..., 4;
\end{aligned}$$

A solução será encontrada seguindo os passos do método húngaro.

Tabela 6: Fazendo o Passo 1, reduzindo as linhas

	Tarefa 1	Tarefa 2	Tarefa 3	Tarefa 4	Menor
Filho 1	**1**	4	6	3	1
Filho 2	9	**7**	10	9	7
Filho 3	**4**	5	11	7	4
Filho 4	8	7	8	**5**	5

Tabela 7: Fazendo o Passo 1, reduzindo as colunas

	Tarefa 1	Tarefa 2	Tarefa 3	Tarefa 4
Filho 1	**0**	3	5	2
Filho 2	2	**0**	**3**	2
Filho 3	**0**	1	7	3
Filho 4	3	2	**3**	**0**
Menor	0	0	3	0

Reduzidas as linhas e colunas da mesma forma que antes, agora é feito o Passo 2, conforme a Tabela 8:

Tabela 8: Fazendo o Passo 2

	Tarefa 1	Tarefa 2	Tarefa 3	Tarefa 4
Filho 1	0	3	2	2
Filho 2	2	0	0	2
Filho 3	0	1	4	3
Filho 4	3	2	0	0

É possível ver que somente três retas abrangem os zeros, quando são necessárias quatro para encontrar a solução ótima. Portanto, é preciso realizar o Passo 3.

Então, observa-se na Tabela 8 que o valor de k, ou seja, o menor valor não nulo que não está coberto pelas linhas, é igual a 1.

Tabela 9: Fazendo o Passo 3 com $k = 1$

	Tarefa 1	Tarefa 2	Tarefa 3	Tarefa 4
Filho 1	0	2	1	1
Filho 2	3	0	0	2
Filho 3	0	0	3	2
Filho 4	4	2	0	0

E voltando ao Passo 2:

Tabela 10: Voltando ao Passo 2

	Tarefa 1	Tarefa 2	Tarefa 3	Tarefa 4
Filho 1	**0**	2	1	1
Filho 2	3	0	**0**	2
Filho 3	0	**0**	3	2
Filho 4	4	2	0	**0**

Como agora são necessárias quatro retas para cobrir os quatro zeros, foi encontrada a solução ótima, que é: $x_{11} = 1$, ou seja, o filho 1 é designado para a tarefa 1; $x_{23} = 1$, ou seja, o filho 2 é designado para a tarefa 3; $x_{32} = 1$, ou seja, o filho 3 é designado para a tarefa 2 e $x_{44} = 1$, ou seja, o filho 4 é designado para a tarefa 4.

Dessa forma o custo total ótimo é, de acordo com a Tabela 5, $C^* = 1 + 10 + 5 + 5 = \$21$.

4 Implementação computacional

Foi utilizado um algoritmo[1] do site da MathWorks®, implementado em MATLAB. Para testar o algoritmo, primeiro serão considerados os exemplos vistos anteriormente em 3.1.1 e 3.1.2. Então, será utilizado um exemplo maior e consequentemente mais trabalhoso.

4.1 Testando o algoritmo

Para encontrar computacionalmente a solução ótima do exemplo 3.1.1 é necessário adicionar a seguinte linha no código:

$$costMat = [15\ 10\ 9;\ 9\ 15\ 10;\ 10\ 12\ 8];$$

Então a resposta que aparece na tela de comando é a seguinte:

$$ans = \ 2 \quad 1 \quad 3$$

O que significa que a tarefa 2 deve ser executada pelo agente 1, a tarefa 1 pelo agente 2 e a tarefa 3 pelo agente 3. Essa solução é a mesma encontrada anteriormente em 3.1.1.

Agora, para o exemplo 3.1.2, adiciona-se a seguinte linha no código:

$$costMat = [1\ 4\ 6\ 3;\ 9\ 7\ 10\ 9;\ 4\ 5\ 11\ 7;\ 8\ 7\ 8\ 5];$$

Então a resposta que aparece na tela de comando é a seguinte:

$$ans = \ 1 \quad 3 \quad 2 \quad 4$$

O que significa que a tarefa 1 deve ser executada pelo agente 1, a tarefa 3 pelo agente 2, a tarefa 2 pelo agente 3 e a tarefa 4 pelo agente 4. Novamente, a solução condiz com a encontrada em 3.1.2.

4.2 Exemplo 8×8

Foi criado um exemplo para designar 8 agentes a 8 tarefas, com valores de custos definidos aleatoriamente, mostrados na tabela abaixo.

[1] `http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/20652`

Tabela 11: Problema de Designação 8×8

	Tarefa 1	Tarefa 2	Tarefa 3	Tarefa 4	Tarefa 5	Tarefa 6	Tarefa 7	Tarefa 8
Agente 1	5	2	12	7	8	5	10	3
Agente 2	4	3	14	1	2	9	12	6
Agente 3	6	5	7	7	9	12	4	3
Agente 4	2	8	15	6	9	5	9	8
Agente 5	8	5	7	14	11	9	4	10
Agente 6	5	5	7	9	10	9	8	8
Agente 7	6	10	13	4	7	13	2	5
Agente 8	10	4	8	5	7	9	6	4

Claramente, esse problema é trabalhoso para ser resolvido à mão, porém com o algoritmo implementado computacionalmente o resultado é encontrado em segundos.

Para obter este resultado, adiciona-se a seguinte linha ao código:

$$\begin{aligned} \text{costMat} = \quad & [5\ 2\ 12\ 7\ 8\ 5\ 10\ 3;\ 4\ 3\ 14\ 1\ 2\ 9\ 12\ 6;\ 6\ 5\ 7\ 7\ 9\ 12\ 4\ 3; 2\ 8\ 15\ 6\ 9\ 5\ 9\ 8; \\ & 8\ 5\ 7\ 14\ 11\ 9\ 4\ 10; 5\ 5\ 7\ 9\ 10\ 9\ 8\ 8;\ 6\ 10\ 13\ 4\ 7\ 13\ 2\ 5;\ 10\ 4\ 8\ 5\ 7\ 9\ 6\ 4]; \end{aligned}$$

E a resposta que aparece na tela de comando é a seguinte:

$$ans = \ 6 \quad 5 \quad 8 \quad 1 \quad 7 \quad 3 \quad 4 \quad 2$$

Ou seja, a solução ótima desse problema é alocar a tarefa 6 ao agente 1, a tarefa 5 ao agente 2, a tarefa 8 ao agente 3, a tarefa 1 ao agente 4, a tarefa 7 ao agente 5, a tarefa 3 ao agente 6, a tarefa 4 ao agente 7 e por fim a tarefa 2 ao agente 8.

Dessa maneira, o valor do custo ótimo é $C^* = 5 + 2 + 3 + 2 + 4 + 7 + 4 + 4 = 31$.

5 Conclusão

Nesse projeto foi apresentado o Problema da Designação, que é um problema de Programação Linear Inteira de grande importância no estudo de Pesquisa Operacional, visto que pode ser aplicado a diversas situações na vida real - várias dessas exemplificadas no decorrer do texto. Suas principais características e modelagem foram analisadas de maneira a compreender a finalidade do problema.

O Problema da Designação é um caso particular do Problema do Transporte e pode ser resolvido por um algoritmo simples e eficiente chamado método húngaro. Para problemas com um número de agentes e tarefas pequeno é fácil encontrar uma solução ótima utilizando esse método, entretanto para problemas maiores foi necessário utilizar uma implementação computacional do mesmo, o que possibilitou encontrar a melhor alocação em poucos segundos.

Referências Bibliográficas

- Ahuja, R. K.; Magnanti, T. L.; Orlin, J. B. *Network Flows: Theory, Algorithms and Applications*. New Jersey: Prentice Hall, 1993.
- Goldbarg, M. C.; Luna, H. P. L. *Otimização combinatória e programação linear: modelos e algoritmos*. Elsevier Editora LTDA., 2005.
- Taha, H. A. *Pesquisa Operacional*. Pearson Prentice Hall, 2008.