Projeto Supervisionado: Análises de medidas de Risco para Portfólios

Orientando: Lucas Peinado Bruscato

Orientador: Roberto Andreani

IMECC - UNICAMP

Agosto de 2013 a Fevereiro de 2014

Sumário

1 Resumo das Atividades

Na primeira parte do programa o aluno dedicou-se principalmente a simulações baseadas em acontecimentos reais usando os dados das cotações fornecidos no site da Bovespa. Também foi estudado o modelo de Markowitz, VAR(Value At Risk) e CVAR(Conditional Value At Risk), suas aplicações e relação com a função OVO. Na segunda parte do programa o aluno irá estudar métodos de otimização de primeira ordem para resolver problemas fazendo testes numéricos e comparações numéricas com VaR e CVaR.

2 Produção Científica

2.1 Introdução

A simulação de portfólios é usada em diversos investimentos, sejam estes ações de empresas, mercadorias, entre outros. Entretanto, estas são baseadas em minimizar os riscos de perdas e/ou maximizar os ganhos, porém é impossível conseguir ambos, assim sendo, temos que atribuir pesos para o risco e para os ganhos. A maneira de calcular o resultado esperado em geral são pelos acontecimentos passados e/ou por especulações futuras e com estes dados podemos tentar medir a incerteza do resultado esperado. Para isso precisamos montar um modelo matemático o qual deve associar o ganho médio e a incerteza sujeito a diversas restrições.

2.2 Ativos

Chamaremos de *ativo* a qualquer coisa que possa ser comprada ou vendida, neste caso serão em geral ações de empresas, títulos de empresa. Todo ativo tem um preço em dinheiro o qual pode variar.

2.3 Portfólio

No ramo da Economia e Finanças, o portfólio abrange um conjunto de investimentos ou aplicações financeiras como ações de empresas, títulos de renda, etc.(ativos) mantidas por determinada empresa ou indivíduo, fazendo parte de sua estratégia diminuir a perda ou aumentar o lucro.

2.4 Calculando a Incerteza

Calculamos o fator de crescimento(θ) como:

$$\theta = \frac{Valor final do ativo}{Valor inicial do ativo}$$

Suponhamos que temos um histórico de preços de 2 ativos como na Tabela 1.

	Ativo 1	Ativo 2
Período 1	0.9	1.2
Período 2	0.7	1.1
Período 3	1.3	0.6

Tabela 1: Tabela de preços dos ativos(p_{ij}) nos últimos 3 períodos

Temos que θ_{ij} é o fator de crescimento do ativo j no período i, assim, temos:

$$\theta_{11} = \frac{p_{21}}{p_{11}} \quad \theta_{21} = \frac{p_{31}}{p_{21}}$$

$$\theta_{12} = \frac{p_{22}}{p_{12}} \quad \theta_{22} = \frac{p_{32}}{p_{22}}$$

Daí, tiramos a matriz de θ e os valores de θ_1 e θ_2:

$$\theta = \begin{pmatrix} \theta_{11} & \theta_{12} \\ \theta_{21} & \theta_{22} \end{pmatrix}$$

$$\theta_1 = \frac{\theta_{11} + \theta_{21}}{2} \quad \theta_2 = \frac{\theta_{12} + \theta_{22}}{2}$$

Com isso conseguimos calcular o valor da incerteza(vamos considerar a incerteza igual ao desvio padrão), ou seja, a incerteza do ativo j é dada por:

$$\sigma_j^2 = \frac{\sum_{i=1}^{m} (\theta_j - \theta_{ij})^2}{m}$$

Assim,

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{(\theta_1 - \theta_{11})^2 + (\theta_1 - \theta_{21})^2}{2}} = 0.4$$

$$\sigma_2 = \sqrt{\frac{(\theta_2 - \theta_{12})^2 + (\theta_2 - \theta_{22})^2}{2}} = 0.2$$

2.5 Simulações

Utilizando dados reais da Bovespa em um período de 30 dias(21/10/2013 - 3/12/2013) obtidos através da planilha no Google Docs(usando a função GoogleFinance) obtive os dados da Figura 1.

Data	PETR3	EMBR3	USIM3	GFSA3	SUZB5	VALE5
21/10/2013	17,69	17,59	11,10	3,42	8,92	35,38
22/10/2013	17,40	17,74	11,35	3,42	9,12	35,89
23/10/2013	17,09	18,29	11,21	3,31	9,04	35,05
24/10/2013	17,06	18,10	11,13	3,11	9,12	35,05
25/10/2013	17,30	17,64	10,95	3,11	8,91	35,07
28/10/2013	19,00	17,80	11,11	3,18	9,01	35,31
29/10/2013	18,87	16,65	11,01	3,12	9,10	35,14
30/10/2013	18,96	16,49	11,33	3,14	9,01	35,02
31/10/2013	19,54	16,35	11,43	3,03	9,08	35,75
1/11/2013	19,04	16,75	11,40	2,96	8,95	36,9
4/11/2013	19,50	16,53	11,40	2,97	8,82	37,9
5/11/2013	19,40	17,20	11,24	2,89	8,84	37,83
6/11/2013	19,60	16,70	11,15	2,90	8,83	38,47
7/11/2013	19,15	17,29	11,22	2,82	8,88	37,23
8/11/2013	18,75	17,60	11,45	2,90	8,92	36,75
11/11/2013	19,30	17,76	11,30	2,85	8,86	36,95
12/11/2013	18,61	18,10	11,42	2,80	8,83	35,79
13/11/2013	19,09	18,18	11,55	2,91	8,79	35,53
14/11/2013	19,60	17,92	12,00	3,16	8,93	35,88
18/11/2013	20,34	18,16	12,33	3,28	8,99	36,25
19/11/2013	20,04	17,68	11,87	3,06	8,75	35,6
21/11/2013	20,01	17,80	11,50	3,05	8,78	35,02
22/11/2013	19,82	17,65	11,56	3,17	8,80	35,33
25/11/2013	19,45	17,73	11,55	3,28	8,72	34,65
26/11/2013	18,20	17,34	11,23	3,21	8,64	33,54
27/11/2013	18,23	17,97	11,35	3,28	8,54	34,24
28/11/2013	17,73	18,18	11,32	3,26	8,47	35,2
29/11/2013	18,32	18,14	11,40	3,39	8,50	35,87
2/12/2013	16,42	17,93	11,08	3,29	8,54	35,41
3/12/2013	16,57	17,86	11,05	3,15	8,37	35,08

Figura 1: Histórico de 30 dias das ações PETR3, EMBR3, USIM3, GFSA3, SUZB5 e VALE5

Considerei os valores das ações(Figura 1) como uma matriz P e através dela obtive uma matriz P'(dividindo cada elemento de P pelo anterior), utilizando o método de Geração de Cenários e utilizando a função RANDBETWEEN do Excel gerei 40 números aleatórios de 1 a 29(correspondentes a cada linha de P'), com esses valores criei uma matriz θ dos fatores de crescimento simulados, como segue:

$$\theta = \begin{pmatrix}
1,0103 & 0,9709 & 0,9919 & 1,0034 & 0,9988 & 1,0169 \\
1,0257 & 1,0044 & 1,0113 & 1,0392 & 0,9954 & 0,9927 \\
1,0332 & 0,9977 & 1,007 & 1,0398 & 1,0035 & 1,019 \\
0,9821 & 1,031 & 0,9876 & 0,9678 & 0,9912 & 0,9765 \\
0,9948 & 1,0405 & 0,9859 & 0,973 & 1,0022 & 0,9981 \\
1,0091 & 0,996 & 0,9972 & 0,9574 & 0,98 & 0,9906 \\
0,977 & 1,0353 & 1,0062 & 0,9724 & 1,0056 & 0,9677 \\
1,0016 & 1,0363 & 1,0106 & 1,0218 & 0,9884 & 1,0208 \\
1,0377 & 1,0133 & 1,0275 & 1,0379 & 1,0067 & 1,0103 \\
0,9948 & 1,0405 & 0,9859 & 0,973 & 1,0022 & 0,9981 \\
1,0091 & 0,996 & 0,9972 & 0,9574 & 0,98 & 0,9906 \\
0,9931 & 0,9353 & 0,9909 & 0,9811 & 1,0099 & 0,9951 \\
0,8962 & 0,9884 & 0,9719 & 0,9705 & 1,0047 & 0,9871 \\
0,9836 & 1,0085 & 1,0225 & 1 & 1,0224 & 1,0144 \\
0,9357 & 0,978 & 0,9722 & 0,9786 & 0,9908 & 0,9679 \\
1,014 & 0,9745 & 0,9838 & 1 & 0,9769 & 1,0005 \\
0,9948 & 1,0405 & 0,9859 & 0,973 & 1,0022 & 0,9981 \\
1,0377 & 1,0133 & 1,0275 & 1,0379 & 1,0067 & 1,0103 \\
1,0332 & 0,9977 & 1,007 & 1,0398 & 1,0035 & 1,019 \\
0,9982 & 0,9896 & 0,9928 & 0,9395 & 1,0088 & 1 \\
0,9948 & 1,0405 & 0,9859 & 0,973 & 1,0022 & 0,9981 \\
1,0267 & 0,9856 & 1,0389 & 1,0859 & 1,0159 & 1,0098 \\
0,9813 & 1,0045 & 0,9991 & 1,0347 & 0,9909 & 0,9807 \\
1,014 & 0,9745 & 0,9838 & 1 & 0,9769 & 1,0005 \\
1,0257 & 1,0044 & 1,0113 & 1,0392 & 0,9954 & 0,9927 \\
0,9852 & 0,9735 & 0,9626 & 0,9329 & 0,9733 & 0,982 \\
0,9985 & 1,0067 & 0,9688 & 0,9967 & 1,0034 & 0,9837 \\
0,9852 & 0,9735 & 0,9626 & 0,9329 & 0,9733 & 0,982 \\
0,9642 & 1,0191 & 1,0106 & 0,9824 & 0,9966 & 0,9686 \\
0,9357 & 0,978 & 0,9722 & 0,9786 & 0,9908 & 0,9679 \\
0,9791 & 1,0179 & 1,0204 & 1,0283 & 1,0045 & 0,9871 \\
0,9642 & 1,0191 & 1,0106 & 0,9824 & 0,9966 & 0,9686 \\
0,9985 & 1,0067 & 0,9688 & 0,9967 & 1,0034 & 0,9837 \\
0,9982 & 0,9896 & 0,9928 & 0,9395 & 1,0088 & 1 \\
1,0377 & 1,0133 & 1,0275 & 1,0379 & 1,0067 & 1,0103 \\
1,0016 & 1,0363 & 1,0106 & 1,0218 & 0,9884 & 1,0208 \\
0,9982 & 0,9896 & 0,9928 & 0,9395 & 1,0088 & 1 \\
0,9852 & 0,9735 & 0,9626 & 0,9329 & 0,9733 & 0,982 \\
1,0241 & 0,9868 & 1 & 1,0033 & 0,9854 & 1,0271 \\
0,9791 & 1,0179 & 1,0204 & 1,0283 & 1,0045 & 0,9871
\end{pmatrix}$$

A partir de θ realizei a simulação dos futuros valores das ações pegando como valor inicial da ação o valor do último dia presente na matriz P e aplicando seus fatores de crescimento.

Data	PETR3	EMBR3	USIM3	GFSA3	SUZB5	VALE5
04/12/2013	16,74	17,34	10,96	3,16	8,36	35,67
05/12/2013	17,17	17,42	11,09	3,29	8,32	35,41
06/12/2013	17,74	17,38	11,16	3,42	8,35	36,09
09/12/2013	17,43	17,92	11,03	3,31	8,28	35,24
10/12/2013	17,34	18,64	10,87	3,22	8,30	35,18
11/12/2013	17,50	18,57	10,84	3,08	8,13	34,85
12/12/2013	17,10	19,23	10,91	3,00	8,18	33,73
13/12/2013	17,12	19,93	11,03	3,06	8,08	34,43
16/12/2013	17,77	20,19	11,33	3,18	8,14	34,79
17/12/2013	17,68	21,01	11,17	3,09	8,16	34,72
18/12/2013	17,84	20,93	11,14	2,96	7,99	34,40
19/12/2013	17,72	19,58	11,04	2,90	8,07	34,23
20/12/2013	15,88	19,35	10,73	2,82	8,11	33,79
23/12/2013	15,62	19,52	10,97	2,82	8,29	34,28
24/12/2013	14,62	19,09	10,67	2,76	8,22	33,18
25/12/2013	14,82	18,60	10,50	2,76	8,03	33,20
26/12/2013	14,75	19,36	10,35	2,68	8,05	33,14
27/12/2013	15,30	19,61	10,63	2,79	8,10	33,48
30/12/2013	15,81	19,57	10,71	2,90	8,13	34,12
31/12/2013	15,78	19,37	10,63	2,72	8,20	34,12
01/01/2014	15,70	20,15	10,48	2,65	8,22	34,06
02/01/2014	16,12	19,86	10,89	2,88	8,35	34,39
03/01/2014	15,82	19,95	10,88	2,98	8,28	33,73
06/01/2014	16,04	19,45	10,71	2,98	8,08	33,75
07/01/2014	16,46	19,53	10,83	3,09	8,05	33,50
08/01/2014	16,22	19,02	10,42	2,89	7,83	32,90
09/01/2014	16,19	19,15	10,10	2,88	7,86	32,37
10/01/2014	15,95	18,64	9,72	2,68	7,65	31,79
13/01/2014	15,38	19,00	9,83	2,64	7,62	30,79
14/01/2014	14,39	18,58	9,55	2,58	7,55	29,80
15/01/2014	14,09	18,91	9,75	2,65	7,59	29,42
16/01/2014	13,59	19,27	9,85	2,61	7,56	28,49
17/01/2014	13,57	19,41	9,55	2,60	7,59	28,03
20/01/2014	13,54	19,20	9,48	2,44	7,66	28,03
21/01/2014	14,06	19,46	9,74	2,53	7,71	28,32
22/01/2014	14,08	20,17	9,84	2,59	7,62	28,91
23/01/2014	14,05	19,96	9,77	2,43	7,69	28,91
24/01/2014	13,85	19,43	9,41	2,27	7,48	28,39
27/01/2014	14,18	19,18	9,41	2,28	7,37	29,16
28/01/2014	13,89	19,52	9,60	2,34	7,40	28,79

Figura 2: Simulação de 40 dias das ações PETR3, EMBR3, USIM3, GFSA3, SUZB5 e VALE5

Fazendo uma breve análise dos resultados obtidos com o período visto podemos dizer que o preço de alguns ativos ficou próximo(ou simulou a descida/subida) com os observados na Bovespa. Evidentemente, este método não é um dos mais recomendados para minimização já que utiliza um sorteio(com base no passado) para as previsões.

2.6 Modelo de Markowitz

Os problemas do tipo Markowitz são aqueles onde se otimiza alguma combinação de média e desvio padrão. No exemplo que mostrarei vou minimizar a incerteza ao quadrado(variância, ou seja, desvio padrão ao quadrado) com uma restrição de que a média final seja maior ou igual que um valor dado(q) pelo usuário.

$$\begin{cases} & min \quad \sigma^2(x) \\ s.a: & \sum_{i=1}^{n} \theta_i x_i \geq q \\ & \sum_{i=1}^{n} x_i = M \\ & x_i \geq 0, i = 1, ..., n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} & min \quad x^T C x \\ s.a: & \sum_{i=1}^{n} \theta_i x_i \geq q \\ & \sum_{i=1}^{n} x_i = M \\ & x_i \geq 0, i = 1, ..., n \end{cases}$$

E x é o vetor com os valores de cada investimento definido por x_1,...,x_n.

Os valores θ_i referenciados acima são as médias de cada coluna da matriz θ, ou seja, a média do fator de crescimento de cada ativo. Esta matriz θ será representada pelos valores da matriz P' do exemplo anterior, assim teremos os mesmos ativos e, portanto, $n = 6$(número de ativos da carteira), $M = 500$(montante inicial aplicado no portfólio) e $q = 550$(montante final desejado, neste caso queremos um crescimento de 10%). Temos que C é a matriz de covariância:

$$C = \frac{A^T A}{29}, \quad A = \begin{pmatrix} \theta_{11} - \theta_1 & \theta_{12} - \theta_2 & \theta_{13} - \theta_3 & \theta_{14} - \theta_4 & \theta_{15} - \theta_5 & \theta_{16} - \theta_6 \\ \theta_{21} - \theta_1 & \theta_{22} - \theta_2 & \theta_{23} - \theta_3 & \theta_{24} - \theta_4 & \theta_{25} - \theta_5 & \theta_{26} - \theta_6 \\ \theta_{31} - \theta_1 & \theta_{32} - \theta_2 & \theta_{33} - \theta_3 & \theta_{34} - \theta_4 & \theta_{35} - \theta_5 & \theta_{36} - \theta_6 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ \theta_{29,1} - \theta_1 & \theta_{29,2} - \theta_2 & \theta_{29,3} - \theta_3 & \theta_{29,4} - \theta_4 & \theta_{29,5} - \theta_5 & \theta_{29,6} - \theta_6 \end{pmatrix}$$

Daí, teremos que:

$$\begin{cases} & min \quad x^T C x \\ s.a: & \sum_{i=1}^{6} \theta_i x_i \geq 550 \\ & \sum_{i=1}^{6} x_i = 500 \\ & x_i \geq 0, i = 1, ..., 6 \end{cases}$$

E x é o vetor com os valores de cada investimento definido por x_1,...,x_6. Computando C e os valores dos θ_i teremos:

$$C = \begin{pmatrix} 0,0012 & 0 & 0,0003 & 0,0005 & 0,0001 & 0,0003 \\ 0 & 0,0005 & 0,0001 & 0 & 0 & 0 \\ 0,0003 & 0,0001 & 0,0003 & 0,0004 & 0,0001 & 0,0001 \\ 0,0005 & 0 & 0,0004 & 0,0011 & 0,0001 & 0,0002 \\ 0,0001 & 0 & 0,0001 & 0,0001 & 0,0001 & 0 \\ 0,0003 & 0 & 0,0001 & 0,0002 & 0 & 0,0003 \end{pmatrix}, \begin{cases} \theta_1 = 0,9984 \\ \theta_2 = 1,0008 \\ \theta_3 = 1,0000 \\ \theta_4 = 0,9977 \\ \theta_5 = 0,9979 \\ \theta_6 = 0,9999 \end{cases}$$

Utilizando estes valores no MatLab e a função fmincon não obtive nenhuma solução factível para o problema já que a maior média do fator de crescimento dos ativos foi de 1.0008 e assim nunca respeitará a primeira restrição(ter um lucro de 10%). Suponhamos que o fator de crescimento médio do segundo ativo(θ_2) é de 1.1000 e do terceiro ativo(θ_3) é de 1.2000, utilizando esses novos valores no MatLab encontramos que o minimizador x^* e o menor valor para o desvio padrão são:

$$x^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 251.6885 \\ 100.2506 \\ 46.1633 \\ 101.8975 \end{pmatrix}, \sigma(x) = 1.0000$$

Assim, os valores possíveis($\mu(x) + \sigma(x)$ e $\mu(x) - \sigma(x)$) são 551 e 549.

Neste outro exemplo de Markowitz vou maximizar a média do montante final menos a variância com um peso(ρ) atribuído.

$$\begin{cases} max \quad \mu(x) - \rho\sigma^2(x) \\ s.a: \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = M \\ \quad x_i \geq 0, i = 1, ..., n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} min \quad \rho\sigma^2(x) - \mu(x) \\ s.a: \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = M \\ \quad x_i \geq 0, i = 1, ..., n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} min \quad \rho(x^T Cx) - \sum_{i=1}^{6} \theta_i x_i \\ s.a: \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = M \\ \quad x_i \geq 0, i = 1, ..., n \end{cases}$$

Assim podemos encontrar a solução ótima do investimento ponderando a constante ρ, por exemplo, colocando um valor alto para ρ seremos mais conservadores e colocando um valor baixo para ρ seremos mais arrojados. No exemplo que segue usaremos novamente os dados passados e $\rho = 600$, logo:

$$\begin{cases} min \quad 600(x^T Cx) - \sum_{i=1}^{6} \theta_i x_i \\ s.a: \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = 500 \\ \quad x_i \geq 0, i = 1, ..., n \end{cases}$$

Utilizando o MatLab obtive:

$$x^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 70,2213 \\ 0 \\ 0 \\ 331,0842 \\ 114,4997 \end{pmatrix}$$

O que representa um lucro de 3.12%.

Agora, se tomarmos $\rho = 100000$, um ρ maior e assim mais conservador, teremos menor risco de perda e também um menor lucro. Aplicando no MatLab obtive:

$$x^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 65,1364 \\ 0 \\ 0 \\ 326,0021 \\ 114,2111 \end{pmatrix}$$

O que representa um lucro de 1.06%.

2.7 VaR

VaR vem do termo em inglês Value at Risk, cuja tradução é Valor em Risco, se trata de um método para avaliar o risco em operações financeiras. O VaR resume o risco de um instrumento financeiro ou o risco de uma carteira de investimentos em um número, um montante financeiro, que representa a pior perda esperada em um dado intervalo de tempo(por exemplo, um dia). Como o universo de incertezas é ilimitado, a técnica do VaR é associada a um nível de confiança desta informação.

Normalmente o VaR é calculado com 95%, 97,5% ou 99% de confiança(α). Este nível de confiança nos indica que podemos ter uma perda estimada em $\alpha\%$ dos casos e que em $100-\alpha\%$ dos casos teremos uma perda maior do que a estimada. Assim, ao utilizar 99% de confiança, espera-se que a cada 100 observações do VaR, em pelo menos 1 vez a perda do investimento financeiro seja superior à perda estimada no cálculo do VaR.

Dado um nível de confiança $\alpha \in$ (0,1), o VaR do portfólio de nível de confiança α é dado pelo menor número l tal que a probabilidade que a perda L exceda l é no máximo (1-α). Matematicamente, se L é a perda do portfólio então VaR$_\alpha$(L) é dado por:

$$\text{VaR}_\alpha(L) = \inf\{l \in \mathbb{R} : P(L > l) \leq 1 - \alpha\} = \inf\{l \in \mathbb{R} : F_L(l) \geq \alpha\}$$

2.8 CVaR

Consideremos duas decisões possíveis, x e y. A decisão $x \wedge y$ será definida como a decisão conjunta e simultânea de x e y. Assim, temos que o pior resultado possível de $x \wedge y$ deve ser melhor ou igual que a soma do pior resultado possível relacionado com x mais o pior resultado possível relacionado com y. Entretanto para níveis de confiança muito pequenos vemos que esta relação não é satisfeita, como no exemplo que segue:

Cenário 1: $r_x = 2, r_y = 5, r_x + r_y = 7$

Cenário 2: $r_x = 7, r_y = 3, r_x + r_y = 10$

Cenário 3: $r_x = 11, r_y = 4, r_x + r_y = 15$

Com $\alpha = 0$ teriamos que o VaR associado a x seria 2 e o VaR associado a y seria 3, sua soma é 5. Mas o VaR associado a $x \wedge y$ é 7, ou seja, não satisfaz $VaR(x \wedge y) \leq VaR(x) + VaR(y)$.

Devido a essa possível falta de coerência de VaR foi sugerida outra medida de risco chamada "Valor de Risco Condicional". O CVaR com confiança $\alpha\%$ é a média das perdas maiores que o percentil α, ou seja, CVaR nada mais é do que a média das perdas maiores que VaR. Em conseguência, o CVaR com confiança α é sempre maior ou igual que o VaR com confiança α. Por outro lado, resultados "exageradamente ruins", que são descartados por VaR, têm influência em CVaR. No mundo financeiro, VaR é a medida favorita de risco e o impacto da introdução de CVaR é limitado, entretanto, CVaR é uma medida muito bem conceituada no ambiente matemático.

2.9 Relação com a função OVO

O VaR supera as combinações de média e variância para a avaliação de investimentos porque sua manipulação e interpretação não pressupõe um tipo de distribuição particular para perdas e retornos. O tomador de decisões, grande ou pequeno, deseja sempre saber quanto pode vir perder e com que probabilidade. A sentença "Sua probabilidade de perder mais que x reais é de 0.1 por cento"pode ser escrita como "Seu VaR com confiança de 99.9 por cento é igual a x". A linguagem mais intuitiva e adequada para lidar com problemas de otimização com VaR é dada pelo conceito de "Valor Ordenado". Suponhamos que o vetor de perdas relacionado com uma decisão $x \in \mathbb{R}^n$ se vincula a m cenários e vem dado por

$$f_1(x), ..., f_m(x)$$

Ou seja, a decisão x provocará a perda $f_1(x)$ sob o cenário 1, provocará a perda $f_2(x)$ no cenário 2 e assim por diante. Ordenando as perdas de menor a maior, teremos:

$$f_{i_1(x)}(x) \leq f_{i_2(x)}(x) \leq ... \leq f_{i_m(x)}(x)$$

Se m é suficientemente grande, podemos identificar qualquer número entre 0 e 100 com um inteiro $p(\alpha)$ entre 1 e m, por exemplo, definindo $p(\alpha)$ como a parte inteira de $\alpha m/100 + 1$. Adotando essa identificação, o VaR com confiança α pode ser escrito:

$$VaR_\alpha(x) = f_{i_p(x)}(x)$$

Os cenários 1,...,m estão geralmente definidos por diferentes n-uplas de preços de ativos, caso no qual as funções de perda correspondentes são lineares. O problema de otimização de portfólios que mais se adequa ao emprego de VaR é aquele no qual o objetivo é maximizar a média do retorno sujeito a que o VaR correspondente não exceda uma tolerância dada. Assim, teremos:

$$\left\{ \begin{array}{rr} & max \quad \sum_{j=1}^{n} \theta_j x_j \\ s.a: & \sum_{j=1}^{n} \theta_{ij} x_j \geq M_{tol} \\ & \sum_{j=1}^{n} x_j = M \\ & x_i \geq 0, i = 1, ..., n \end{array} \right.$$

A primeira restrição estabelece que para pelo menos p cenários o capital final será maior ou igual que M_{tol}. Portanto, para pelo menos p cenários, a perda será menor ou igual que $M - M_{tol}$. Isto é equivalente a dizer que, ordenando as perdas possíveis de menor a maior, a perda que aparece no lugar p deve ser menor ou igual que $M - M_{tol}$. Portanto, se trata de uma restrição sobre o VaR vinculado à decisão x.

3 Agradecimentos

Agradeço a oportunidade dada pelo orientador Prof. Doutor Roberto Andreani e pelo apoio e orientação, me auxiliando e acompanhando no projeto. Agradeço também o suporte financeiro fornecido pelo CNPQ.

Referências

[1] R. Andreani, C. Dunder and J. M. Martínez. Order Value Optimization: formulation and solution by means of a primal Cauchy method. Mathematical Methods of Operations research 58, pp. 387-399 (2003).

[2] R. Andreani, C. Dunder and J. M. Martínez. Nonlinear Programming Reformulation of the Order Value Optimization Problem. Mathematical Methods of Operations Research 61, pp. 365-384 (2005).

[3] Medidas de risco em otimização de portfólios. Luis Felipe Cesar da Rocha Bueno. Tese de Mestrado. 2008.

[4] Medidas de risco e seleção de portfólios. Rogério Correa Magro. Tese de Mestrado. 2008.