IMECC - UNICAMP
MS877 - Projeto Supervisionado
Um Estudo da Equação de Black-Scholes

Autora: Stefânia Jarosz
Orientador: Prof. Jayme Vaz Jr

3 de julho de 2013

1 Introdução

O modelo de Black-Scholes (ou modelo de Black-Scholes-Merton) é um modelo matemático do mercado de uma ação, que fornece uma estimativa teórica do preço de opções do tipo européia, que confere o direito de compra apenas na data de vencimento do contrato. Em economia, uma opção é um instrumento financeiro que confere ao seu titular o direito de comprar um determinado ativo, isto é, uma ação, um título ou um bem qualquer, por um valor determinado, estando o vendedor obrigado a concluir a transação. Este modelo foi apresentado inicialmente por Fischer Black e Myron Scholes em um artigo intitulado "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", publicado em 1973 no *Journal of Political Economy*, e tem como conceito fundamental que uma opção é implicitamente precificada se a ação é negociada. Robert C. Merton foi o primeiro a publicar um artigo expandindo a compreensão matemática do modelo de precificação de opções e cunhou o termo *modelo de precificação de Black-Scholes*. Este trabalho rendeu a Merton e Scholes o prêmio Nobel de Economia de 1997, sendo Black mencionando como contribuinte, uma vez que já era falecido desde 1995 e não poderia ser indicado ao prêmio.

A equação de Black-Scholes é uma equação diferencial parcial linear do tipo parabólica, dada por

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \tag{1}$$

de modo que:

- S é uma variável que representa o preço da ação, logo $S \geq 0$;
- $t \in [0, T]$ é a variável que representa o instante de tempo considerado, e T é um parâmetro que representa a data de vencimento;
- $V(S, t)$ é o preço de um derivativo como função do preço da ação e do tempo;
- r é um parâmetro que representa a taxa de juros livre de risco;

- σ é um parâmetro que representa a volatilidade da ação.

Para encontrarmos a solução da equação e interpretarmos corretamente o problema, precisamos definir uma condição inicial. Como a equação (1) modela uma situação de opção do tipo européia, a condição inicial corresponde ao pagamento na data de vencimento do contrato, que é dada por:

$$V(S,T) = \max\{\, S-K, 0\} \tag{2}$$

Esta condição de contorno deve ser interpretada da seguinte maneira: caso, na data de vencimento do contrato, o preço esteja acima do valor de cotação K, a compra da ação na data T é interessante para o comprador e, deste modo, $V(S,T) = S-K$. Entretanto, caso o preço se encontre abaixo da cotação na data T, a compra não é efetivada pois poderia resultar em prejuízo, e assim, $V(S,T) = 0$. Esta condição de contorno é contínua em $S = K$.

2 Redução da Equação de Black-Scholes a Uma Equação de Difusão

Mostraremos que a equação (1) pode ser reduzida a uma equação de difusão:

$$\frac{\partial h}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \tag{3}$$

E assim poderemos encontrar a solução da equação (3), com alguma condição inicial que seja conveniente ao problema.

Supondo que r e σ são constantes, através da mudança de variáveis:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} S & = & Ke^x \\ V(S,t) & = & Kv(x,\tau) \\ \tau & = & \dfrac{(T-t)\sigma^2}{2} \end{array} \right.$$

Obtemos, pela regra da cadeia, as derivadas:

$$\left\{ \begin{array}{rcccl} \dfrac{\partial V}{\partial t} & = & K\dfrac{\partial v}{\partial \tau}\dfrac{\partial \tau}{\partial t} & = & -K^2\dfrac{\sigma^2}{2}\dfrac{\partial v}{\partial \tau} \\ \dfrac{\partial V}{\partial S} & = & K\dfrac{\partial v}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial S} & = & K\dfrac{\partial v}{\partial x}\dfrac{\partial}{\partial S}\ln(\dfrac{S}{K}) = \dfrac{K}{S}\dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial S^2} & = & \dfrac{\partial}{\partial S}\left(\dfrac{K}{S}\dfrac{\partial v}{\partial x}\right) & = & -\dfrac{K}{S^2}\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{K}{S}\dfrac{\partial}{\partial S}\dfrac{\partial v}{\partial x} \\ & = & -\dfrac{K}{S^2}\dfrac{\partial v}{\partial x} & + & \dfrac{K}{S}\left(\dfrac{\partial x}{\partial S}\dfrac{\partial}{\partial x}\right)\dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{K}{S^2}\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{K}{S^2}\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} \end{array} \right.$$

Substituindo estes resultados na equação (1) e considerando $K \neq 0$, obtemos:

$$-K^2 \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial v}{\partial \tau} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \left(-\frac{K}{S^2} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{K}{S^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + rS \frac{K}{S} \frac{\partial v}{\partial x} - rV = 0$$

$$-K \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial v}{\partial \tau} + K \frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + rK \frac{\partial v}{\partial x} - rKv = 0$$

$$-\frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial v}{\partial \tau} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial x} \left(-\frac{\sigma^2}{2} + r \right) - rv = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{2}{\sigma^2} \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{2r}{\sigma^2} v$$

Por fim, obtemos a equação:

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1 \right) \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{2r}{\sigma^2} v \tag{4}$$

A fim de facilitar os cálculos, definiremos:

$$\begin{aligned} a &= \frac{2r}{\sigma^2} - 1 \\ b &= -\frac{2r}{\sigma^2} = -(1+a) \end{aligned}$$

E assim a equação (3) fica:

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + a \frac{\partial v}{\partial x} + bv \tag{5}$$

Agora, faremos mais uma mudança de variáveis a fim de obter a equação de difusão:

$$v(x, \tau) = \exp \left[-\left(\frac{a}{2} + 1 \right)^2 \tau \right] \exp \left[-\frac{a}{2} x \right] h(x, \tau)$$

obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial \tau} &= \exp \left[-\frac{a}{2} x \right] \left[-\left(\frac{a}{2} + 1 \right)^2 \exp \left(-\left(\frac{a}{2} + 1 \right)^2 \tau \right) h(x, \tau) + \exp \left(-\left(\frac{a}{2} + 1 \right)^2 \tau \right) \frac{\partial h}{\partial \tau} \right] \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \exp \left(-\left(\frac{a}{2} + 1 \right)^2 \tau \right) \left[-\frac{a}{2} \exp \left(-\frac{a}{2} x \right) h(x, \tau) + \exp \left(-\frac{a}{2} x \right) \frac{\partial h}{\partial x} \right] \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= \exp \left(-\left(\frac{a}{2} + 1 \right)^2 \tau \right) \left[-\frac{a}{2} \exp \left(-\frac{a}{2} x \right) \left(\frac{a}{2} h(x, \tau) + \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \exp \left(-\frac{a}{2} x \right) \left(-\frac{a}{2} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right) \right] \\ &= \exp \left(-\left(\frac{a}{2} + 1 \right)^2 \tau \right) \exp \left(-\frac{a}{2} x \right) \left(\frac{a^2}{4} h(x, \tau) - 2 \frac{a}{2} \frac{\partial h}{\partial x}(x, \tau) + \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, \tau) \right) \end{aligned}$$

E substituindo na equação (5):

$$
\begin{aligned}
& \exp\left(-\left(\frac{a}{2}+1\right)^2\tau\right)\exp\left(-\frac{a}{2}x\right)\left[\left(-\frac{a^2}{4}-a-1\right)h+\frac{\partial h}{\partial \tau}\right]= \\
= & \exp\left(-\left(\frac{a}{2}+1\right)^2\tau\right)\exp\left(-\frac{a}{2}x\right)\left[\frac{a^2h}{4}-a\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+a\left(-\frac{a}{2}h+\frac{\partial h}{\partial x}\right)+bh\right]
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \quad (b+1-1)h+\frac{\partial h}{\partial x} \quad = \quad \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+bh
$$

E assim, obtemos a equação de difusão:

$$
\frac{\partial h}{\partial x}(x,\tau)=\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,\tau), \quad x\in(-\infty,\infty), \quad \tau\in\left[0,T\frac{\sigma^2}{2}\right] \tag{6}
$$

Agora precisamos adaptar a condição de contorno ao novo problema. De (2) e da mudança de veriáveis que realizamos, obtemos:

$$
Kv(x,\tau)=\max\left\{Ke^x-K,0\right\} \tag{7}
$$

Como $e^x>1$ para $x>0$, segue que $Ke^x-K>0$; e $e^x<1$ para $x<0$, temos que $Ke^x-K<0$ e, deste modo,

$$
Kv(x,0)=\begin{cases} K\left(e^x-1\right) & , \quad x>0 \\ 0 & , \quad x<0 \end{cases}
$$

Portanto:

$$
\begin{aligned}
v(x,0) &= H(x)\left(e^x-1\right) \\
v(x,\tau) &= \exp\left[-\left(\frac{a}{2}+1\right)^2\tau\right]h(x,\tau)
\end{aligned}
$$

onde $H(x)$ é a função de Heaviside.
Assim, temos de resolver o seguinte problema:

$$
\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial \tau}(x,\tau) &= \frac{\partial^2 h}{\partial \tau^2}(x,\tau) \qquad -\infty<x<\infty, \quad 0<\tau<T\frac{\sigma^2}{2} \\
h(x,0) &= H(x)\exp\left(\frac{ax}{2}\right)\left(e^x-1\right)
\end{aligned}\right. \tag{8}
$$

3 Solução da Equação de Difusão por Transformada de Fourier

A equação de difusão (3), com condição inicial $h(x,0)$ pode ser resolvida de um maneira muito simples, utilizando transformadas de Fourier. Denotando $\tilde{h}(k) = \mathcal{F}[h](k)$ como a transformada de Fourier de h, com respeito à variável x, de acordo com a definição utilizada em [2], e aplicando à equação de difusão:

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial h}{\partial \tau}\right](k,\tau) = \frac{\partial}{\partial \tau}\mathcal{F}[h](k,\tau) = \frac{\partial}{\partial \tau}\tilde{h}(k,\tau)$$

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right](k,\tau) = -k^2\tilde{h}(k,\tau)$$

Obtemos a equação:

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial t}(x,\tau) = -k^2\tilde{h}(k,\tau) \tag{9}$$

cuja solução é dada por:

$$\tilde{h}(k,\tau) = \tilde{h}(k,0)e^{-k^2\tau} \tag{10}$$

e $\tilde{h}(k,0)$ é a transformada de Fourier da condição inicial.

Para encontrarmos a solução de $h(x,\tau)$, devemos aplicar a transformada de Fourier inversa a (10). Definamos então:

$$\mathcal{F}(h_1) = \tilde{h_1} = e^{-k^2\tau}$$
$$\mathcal{F}(h_2) = \tilde{h_2} = \tilde{h}(k,0)$$

Podemos reescrever (10) como

$$\tilde{h}(k,\tau) = \tilde{h_1}(k,\tau)\tilde{h_2}(k,\tau) \tag{11}$$

Aplicando o teorema de convolução da transformada de Fourier [2], obtemos:

$$h(x,\tau) = (h_1 \star h_2)(x,\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} h_1(x-\xi,\tau)h_2(\xi,\tau)d\xi \tag{12}$$

As transformadas de Fourier inversas são dadas por [2]:

$$\mathcal{F}^{-1}(\tilde{h_1}) = h_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{4\tau}} \tag{13}$$

$$\mathcal{F}^{-1}(\tilde{h_2}) = h_2 = h(x,0) \tag{14}$$

Deste modo, obtemos a solução geral:

$$h(x,\tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\int_{\mathbb{R}} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4\tau}\right]h(\xi,0)d\xi \tag{15}$$

Aplicando a condição inicial da opção do tipo européia, (8) em (15):

$$h(x,\tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}}\int_{\mathbb{R}} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4\tau}\max\left\{e^{(\frac{\alpha}{2}+1)\xi} - e^{\frac{\alpha}{2}\xi}, 0\right\}\right]d\xi \tag{16}$$

Como $e^{(\frac{a}{2}+1)x} - e^{\frac{a}{2}x}$ se e somente se $x > 0$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, o domínio de integração de (16) pode ser reescrito como $[0, \infty)$. E assim, obtemos

$$h(x,\tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_0^\infty e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\tau}} \left[e^{(\frac{a}{2}+1)\xi} - e^{\frac{a}{2}\xi} \right] d\xi \ = \tag{17}$$

Agora resta calcularmos a integral. Considere a integral dada por

$$I_a = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_0^\infty e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\tau}} e^{a\xi} d\xi \tag{18}$$

Fazendo a mudança de variável $\eta = (c_2 - \xi)\sqrt{2c_1}$, $d\eta = -\sqrt{2c_1}d\xi$, obtemos:

$$I_a = \frac{e^{c_3}}{\sqrt{2c_1}} \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_{-\infty}^{c_2\sqrt{2c_1}} e^{-\frac{\eta^2}{2}} d\eta = e^{c_3} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{c_2\sqrt{2c_1}} e^{-\frac{\eta^2}{2}} d\eta = e^{c_3} \phi \left(c_2 \sqrt{2c_1} \right)$$

onde:

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_z^\infty e^{-\frac{\eta^2}{2}} d\eta \tag{19}$$

e

$$\begin{aligned} c_1 &= \tfrac{1}{4\tau} \\ c_2 &= x + 2\tau a \\ c_3 &= a(x + a\tau) \end{aligned}$$

E assim:

$$I_a = e^{a(x+a\tau)} \phi \left(\frac{x + 2\tau a}{\sqrt{2\tau}} \right) \tag{20}$$

E assim, podemos escrever a solução geral da equação de difusão como:

$$\begin{aligned} h(x,\tau) = I_{\frac{a}{2}+1} \frac{a}{2} &= \exp\left[\left(\frac{a}{2} + 1 \right) \left(x + \frac{a\tau}{2} + \tau \right) \right] \phi \left(\frac{x + 2\tau(\frac{a}{2}+1)}{\sqrt{2\tau}} \right) \\ &- \exp\left[\left(\frac{a}{2} \right) \left(x + \frac{a\tau}{2} \right) \right] \phi \left(\frac{x + a\tau}{\sqrt{2\tau}} \right) \end{aligned} \tag{21}$$

Retornando ao problema original:

$$V(S,t) = S\phi \left(\frac{\ln(\frac{S}{K}) + (T-t)\left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right) - Ke^{-r(T-t)} \phi \left(\frac{\ln(\frac{S}{K}) + (T-t)\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right) \tag{22}$$

4 Solução da Equação de Difusão por Função de Green

A função de Green para a equação (8) é dada pela solução da equação:

$$\frac{\partial h}{\partial \tau}(x,\tau) - \frac{\partial^2 h}{\partial \tau^2}(x,\tau) = \delta(x-\xi) \tag{23}$$

sob as mesmas condições de contorno do problema, e δ é a distribuição Delta de Dirac.

Neste caso, verificamos que a função de Green é dada por

$$G(x-\xi;\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4\tau}\right] \tag{24}$$

Observação: Na seção **3**, aplicamos a transformada de Fourier à equação (3). Aproveitando estes resultados e lembrando que $\mathcal{F}[\delta] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ [3], obtemos (24).

Além disso, (24) satisfaz à equação, se comportando como uma "função" delta em $\tau = 0$:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} G(x-\xi;\tau) = -\frac{1}{2\tau} G(x-\xi;\tau) + \frac{(x-\xi)^2}{4\tau^2} G(x-\xi;\tau) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} G(x-\xi;\tau)$$

Para $t \to 0$ e $x \neq \xi$, o argumento da tende a $-\infty$, e $G(x-\xi;\tau) \to 0$, e para $x = \xi$, tende a infinito para $\tau \to \infty$. Assim, a integral em x pode ser determinada pela substituição $q = \frac{x-\xi}{\sqrt{2\tau}}$ e obtemos:

$$\int G(x-\xi;\tau)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{q^2}{2}} dq = 1$$

Podemos utilizar a função de Green para escrever a solução para $h(x,\tau)$ em termos de suas condições iniciais nos pontos ξ na fronteira, no instante inicial $\tau = 0$:

$$h(x,\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi h(\xi,0) \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4\tau}\right] \tag{25}$$

Aplicando a condição inicial em $\tau = 0$, obtemos:

$$h(x,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi H(\xi) \exp\left[\frac{a\xi}{2}\right] \frac{(e^{\xi}-1)}{2\sqrt{\pi\tau}} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4\tau}\right] \tag{26}$$

E assim:

$$h(x,\tau) = \frac{\exp\left[x\left(\frac{a}{2}+1\right) + \tau\left(\frac{a}{2}+1\right)^2\right]}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\exp\left[-\frac{-(x+2\tau(\frac{a}{1}+1)-\xi)^2}{4\tau}\right]}{\sqrt{2\tau}} d\xi \tag{27}$$

$$-\frac{\exp\left[\frac{ax}{2} + \frac{a^2\tau}{4}\right]}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\exp\left[-\frac{-(x+a\tau-\xi)^2}{4\tau}\right]}{\sqrt{2\tau}} d\xi$$

Através da mudança de variáveis $u = \frac{x+2\tau(\frac{a}{2}+1)-\xi}{\sqrt{2\tau}}$ na primeira integral e $u = \frac{x+a\tau-\xi}{\sqrt{2\tau}}$ na segunda, obtemos:

$$\begin{aligned}
h(x,\tau) &= \frac{\exp\left[x\left(\frac{a}{2}+1\right)+\tau\left(\frac{a}{2}+1\right)^2\right]}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x+2\tau(\frac{a}{2}+1)-\xi}{\sqrt{2\tau}}} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du \\
&\quad - \frac{\exp\left[\frac{ax}{2}+\frac{a^2\tau}{4}\right]}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x+a\tau-\xi}{\sqrt{2\tau}}} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du \\
&= \exp\left[x\left(\frac{a}{2}+1\right)+\tau\left(\frac{a}{2}+1\right)^2\right]\phi\left(\frac{x+2\tau(\frac{a}{2}+1)-\xi}{\sqrt{2\tau}}\right) \\
&\quad - \exp\left[\frac{ax}{2}+\frac{a^2\tau}{4}\right]\phi\left(\frac{x+a\tau-\xi}{\sqrt{2\tau}}\right)
\end{aligned} \tag{28}$$

Retornando o problema à forma da equação (3), obtemos:

$$v(x,\tau) = e^x\phi\left(\frac{x+2\tau(\frac{a}{2}+1)}{\sqrt{2\tau}}\right) - e^b\phi\left(\frac{x+a\tau}{\sqrt{2\tau}}\right) \tag{29}$$

Note que para $\phi(z)$, dada por (19), vale:

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_z^{\infty} e^{-\frac{\eta^2}{2}}\,d\eta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{\eta^2}{2}}\,d\eta$$

pela simetria da função $e^{-\frac{\eta^2}{2}}$, que é par. Retornando, por fim, ao problema original:

$$V(S,t) = S\phi\left(\frac{\ln(\frac{S}{K})+(T-t)\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) - Ke^{-r(T-t)}\phi\left(\frac{\ln(\frac{S}{K})+(T-t)\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) \tag{30}$$

Note que, tanto método da transformada de Fourier quanto pelo da função de Green, obtivemos o mesmo resultado. No método da transformada de Fourier, transferimos a equação a outro espaço, a fim de obtermos uma equação cuja solução é mais simples, e após obtê-la, voltamos para o espaço original e encontramos a solução desejada. Já no método da função de Green, introduzimos uma distribuição delta de Dirac ao problema de valor de contorno, a fim de obtermos sua solução fundamental, que fornece a solução desejada através de integração. Note ainda que, neste caso, encontramos a função de Green do problema através de uma transformada de Fourier.

5 Gráficos de $V(S,t)$

A fim de visualizarmos a curva da solução da Equação de Black-Scholes, isto é, a sensibilidade do preço das opções de acordo com os parâmetros, esboçaremos três gráficos. A superfície na cor verde é a mesma nos três gráficos, para servir como referência.

No primeiro gráfico, variamos o parâmetro K e fixamos os seguintes parâmetros:

$$\begin{aligned} T &= 1.5 \\ r &= 0.1 \\ \sigma &= 0.4 \end{aligned}$$

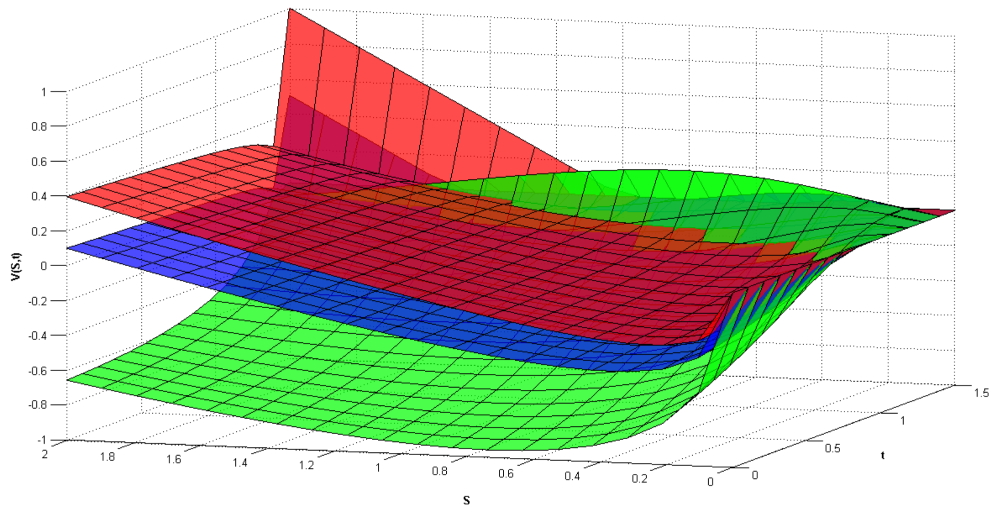

Figura 1: Solução $V(S,t)$ para $K = 1$ (vermelho), $K = 3$ (verde) e $K = 1.5$ (azul)

No segundo gráfico, variamos o parâmetro r e fixamos os demais:

$$\begin{aligned} T &= 1.5 \\ K &= 3 \\ \sigma &= 0.4 \end{aligned}$$

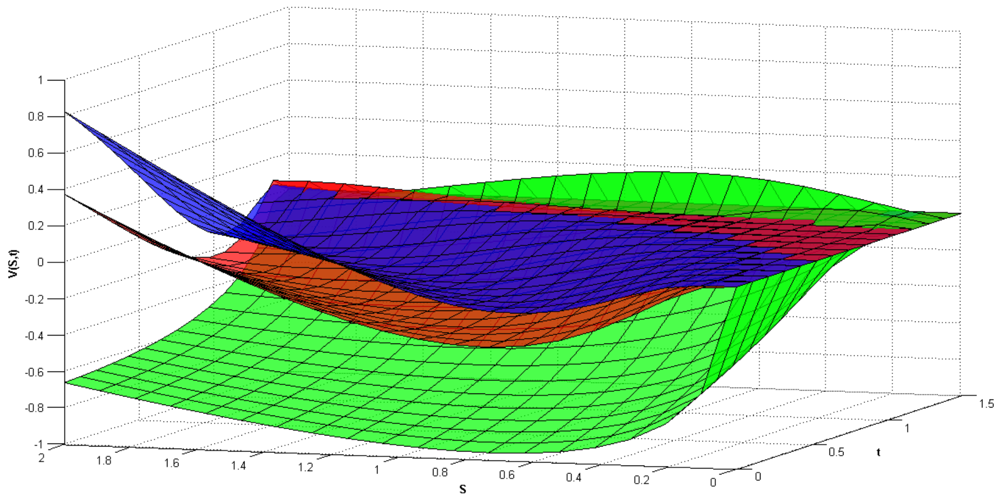

Figura 2: Solução $V(S,t)$ para $r = 0.5$ (vermelho), $r = 0.1$ (verde) e $r = 0.7$ (azul)

Por fim, no terceiro gráfico, variamos o parâmetro σ e fixamos os demais:

$$\begin{aligned} T &= 1.5 \\ K &= 3 \\ r &= 0.1 \end{aligned}$$

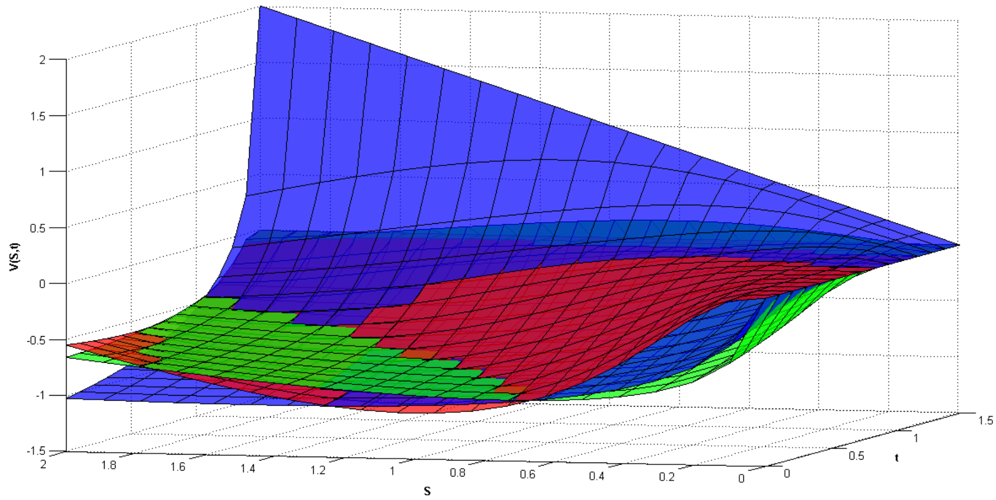

Figura 3: Solução $V(S,t)$ para $r = 0.07$ (vermelho), $r = 0.4$ (verde) e $r = 0.9$ (azul)

Referências

[1] Carmen Lys Ribeiro Braga. *Notas de Física Matemática*. Editora Livraria da Física, 2006.

[2] François Coppex. Solving the black-scholes equation: a demystification. disponível em `http://www.francoiscoppex.com/blackscholes.pdf`.

[3] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, A. Jeffrey, and D. Zwillinger. *Table of Integrals, Series and Products*. Academic Press, 2000.

[4] Allan Holland. Lecture 10: Black-scholes. Notas de aula da disciplina "Stochastic Optimisation and Derivatives". Disponível em `http://www.4c.ucc.ie/~aholland/bordgais/BG_Ch8.pdf`.

[5] Jayme Vaz Jr. Notas de aula. Disciplinas de Métodos da Matemática Aplicada I, II e III, 2011/2012.

[6] Dennis Silverman. Solution of the black scholes equation using the green's function of the diffusion equation. 1999. disponível em `http://www.physics.uci.edu/ silverma/bseqn/bs.pdf`.