

Dinâmica Populacional em um Caso de Convívio Interespecífico: Gado, Mosca-dos-Chifres e Besouro Coprófago - Modelagem e Simulação Computacional

Tiago Yuzo Miyaoka¹
Aluno

Prof. Doutor João Frederico C. A. Meyer²
Professor Orientador

DMA, IMECC - UNICAMP, Campinas, SP

Resumo. Uma presença muito nociva à criação de gado é a da mosca-dos-chifres (*Haematobia irritans*) e seu controle com o uso de produtos agroquímicos nem sempre é recomendável. Uma possibilidade para o controle biológico é com a presença de besouros coprófagos. Neste trabalho, as dinâmicas populacionais com relações interespecíficas do gado bovino, da mosca e do besouro são descritas usando um sistema não-linear de equações de evolução a derivadas parciais com um aspecto inovador: o da capacidade de suporte para a população de moscas dependente de modo direto da população relativa ao gado. O modelo é discretizado e aproximado usando diferenças finitas de segunda ordem no espaço e Crank-Nicolson no tempo. São apresentadas simulações em ambiente MATLAB[®] com gráficos evolutivos do comportamento espaço-temporal das espécies.

1. Introdução

A Mosca-dos-chifres (*Haematobia irritans*) é um inseto ectoparasita que se alimenta somente de sangue, preferencialmente bovino, mas não exclusivamente. Sua origem é europeia e chegou ao Brasil por meio da importação bovina, na década de 70. Sua ação provoca sérios prejuízos na pecuária. Em 2004, o Brasil teve uma perda de aproximadamente 2,38 bilhões de reais.

O ciclo biológico da mosca ocorre nas fezes de seu hospedeiro, de onde sai somente para ovopositar. Para seu controle populacional, são utilizados inseticidas nas moscas adultas e produtos injetáveis aplicados no gado, que os elimina nas fezes, fazendo com que os ovos da mosca eclodam, impossibilitando o nascimento de novos insetos.

Outra alternativa é a inclusão de inimigos naturais do parasita, chamados biocontroladores, de modo a manter um controle populacional e um equilíbrio ambiental natural. Esta é uma área de pesquisa em que são desenvolvidos trabalhos e projetos como este.

Os besouros coprófagos são uma das diversas espécies de insetos que se alimentam dos bolos fecais do gado. São da família *Scarabaeidae* e ao agir no bolo fecal impossibilitam a reprodução da mosca, tornando esse besouro um predador indireto da mosca-dos-chifres, pois não se alimenta diretamente da mosca mas sim das fezes onde suas larvas se desenvolvem. Em geral, os besouros levam pelotas do bolo fecal para o local onde fica sua prole, para alimentação.

¹tiagoyuzo@gmail.com

²joni@ime.unicamp.br

A ação dos besouros coprófagos no bolo fecal não contribui somente para o controle populacional, mas também ajuda no desenvolvimento do pasto (nos locais onde as fezes são depositadas o pasto pára de crescer e morre, tornando a área improdutiva por cerca de um ano, e os túneis feitos pelo besouro favorecem a circulação de oxigênio contribuindo para o desenvolvimento das plantas).

O objetivo do presente trabalho é o de modelar matematicamente o convívio das 3 espécies citadas (o gado, a mosca e o besouro) de modo a permitir, com adequada discretização numérica, uma algoritmização que gere diferentes cenários minimamente realistas.

2. Modelagem Matemática

Vamos modelar a interação entre as 3 espécies de animais por meio de um sistema não-linear de Equações Diferenciais Parciais combinando Equações de Dispersão-migração com características Lotka-Volterra (presa-predador). Esse sistema de equações evolutivas com derivadas parciais permite, através de simulações, avaliar a possibilidade de controle biológico da mosca-dos-chifres com seu predador. Para tanto, representamos o gado por R , a mosca por M e o besouro por B , em uma região definida por $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ e com $J = (0, T]$, tais que:

Rês

Para o gado, $R(x, y, t) = R$, consideraremos reprodução malthusiana pois é controlada, ou seja, seu crescimento não é limitado por falta de espaço ou falta de alimento, mas há uma porcentagem da população que é destinada ao abate. O contato da rês com a mosca é prejudicial, pois a mosca é seu parasita, logo temos a seguinte equação para a variação populacional da rês:

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \lambda_R R - \mu_A R - \nu_{RM} RM \quad (2.1)$$

onde:

- $\lambda_R R$ denota a reprodução do gado, que é malthusiana pois a criação é assistida;
- $-\mu_A R$ é uma porcentagem fixa de abate do gado;
- $-\nu_{RM} RM$ representa o prejuízo causado pela mosca ao gado.

Mosca

Para a mosca, $M(x, y, t) = M$, temos reprodução verhulstiana, ou seja, dependente do meio em que vive, mas como a mosca é parasita do gado, o meio é relacionando à população de rês. Também há espalhamento geográfico, pois ela tem autonomia de vôo, e um termo advectivo. Vamos considerar que a mosca não pode viver do sangue de outros animais, pois no domínio estudado o único animal presente será o gado (esta é uma característica de predador especialista). Logo, o contato com a rês é benéfico enquanto a presença de besouros coprófagos é prejudicial. Com isto temos que a variação populacional da mosca é dada por:

$$\frac{\partial M}{\partial t} - \alpha_M \nabla^2 M + \vec{\nabla} \cdot (\nabla \cdot M) = -\lambda_M M \left(1 + \frac{M}{\rho R} \right) + \nu_{MR} RM - \nu_{MB} MB \quad (2.2)$$

onde:

- $-\alpha_M \nabla^2 M$ representa o processo de difusão da mosca;

- $\vec{\nabla} \cdot M$ descreve um processo migratório da mosca;
- $-\lambda_M M(1 + \frac{M}{\rho R})$ denota a reprodução da mosca, verhulstiana, onde o sinal negativo, além de representar um decréscimo da população se não houver gado no meio, indica que o modelo considera a mosca como predador especialista e não oportunista;
- $\rho R = \kappa_M$ é a capacidade de suporte do meio da mosca, dependente da rês;
- $\nu_{MR}RM$ é o termo de efeito benéfico que a mosca recebe da rês;
- $-\nu_{MB}MB$ é o termo de efeito de presa que a mosca sofre do besouro.

Besouro

Para o besouro, $B(x, t, y) = B$, também temos reprodução verhulstiana, mas com capacidade de suporte do meio constante. Também temos espalhamento geográfico, mas com menor autonomia de vôo, pois o besouro também vive em terra. Sua relação com a rês é benéfica, pois se alimenta de suas fezes. Temos portanto que sua variação populacional é descrita por:

$$\frac{\partial B}{\partial t} - \alpha_B \nabla^2 B = \lambda_B B \left(1 - \frac{B}{\kappa_B}\right) + \nu_{BR}RB \quad (2.3)$$

onde:

- $-\alpha_B \nabla^2 B$ representa o processo de difusão do besouro;
- $\lambda_B B(1 - \frac{B}{\kappa_B})$ denota a reprodução do besouro, também verhulstiana, mas sem sinal negativo e com capacidade de suporte constante;
- $\nu_{BR}RB$ é o termo de efeito benéfico que o besouro recebe da rês;

Destas três equações obtemos o seguinte sistema não linear de equações diferenciais parciais :

$$\begin{cases} \frac{\partial R}{\partial t} = \lambda_R R - \mu_A R - \nu_{RM}RM \\ \frac{\partial M}{\partial t} - \alpha_M \nabla^2 M + \vec{\nabla} \cdot (\nabla \cdot M) = -\lambda_M M \left(1 + \frac{M}{\rho R}\right) + \nu_{MR}RM - \nu_{MB}MB \\ \frac{\partial B}{\partial t} - \alpha_B \nabla^2 B = \lambda_B B \left(1 - \frac{B}{\kappa_B}\right) + \nu_{BR}RB \end{cases} \quad (2.4)$$

onde:

- λ_R , λ_M e λ_B são as taxas de crescimento intrínseco das espécies;
- μ_A é a taxa de abate de gado;
- α_M e α_B são coeficientes de difusão;
- $\vec{\nabla} = (u, v)$, com $\nabla \cdot \vec{\nabla} = 0$ é o campo de velocidades relacionado ao processo migratório da mosca;
- $\rho R = \kappa_M$ e κ_B são capacidades de suporte do meio em que vivem a mosca e o besouro, respectivamente, onde ρR é uma função de R enquanto κ_B é constante;
- ν_{RM} , ν_{MR} , ν_{MB} , ν_{RB} são os coeficientes de interação entre as espécies.

Desenvolvendo as equações desse sistema temos, inicialmente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial R}{\partial t} - \alpha_M \left(\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} \right) + u \frac{\partial M}{\partial x} + v \frac{\partial M}{\partial y} = \lambda_R R - \mu_A R - \nu_{RM} RM \\ \frac{\partial B}{\partial t} - \alpha_B \left(\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} \right) = \lambda_B B \left(1 - \frac{B}{\kappa_B} \right) + \nu_{BR} RB \end{array} \right. \quad (2.5)$$

Definimos Ω como uma região retangular, com a largura maior que altura para facilitar a compreensão intuitiva dos resultados.

As condições de contorno e condições iniciais para $\partial\Omega$ são:

- $\frac{\partial R}{\partial \eta} \Big|_{\Omega} = 0;$
- $\frac{\partial M}{\partial \eta} \Big|_{\Omega} = 0;$
- $\frac{\partial B}{\partial \eta} \Big|_{\Omega} = 0;$
- $R(x, y, 0) = R_0(x, y) = r_0$ (constante);
- $M(x, y, 0) = M_0(x, y) = m_0$ (constante);
- $B(x, y, 0) = B_0(x, y) = b_0$ (constante);

Para a discretização do domínio Ω , uma região retangular, definimos nnx como o número de nós em x e $nnny$ como o número de nós em y .

Para desenvolver o tratamento matemático do sistema usaremos o Método das Diferenças Finitas nas coordenadas espaciais e o Método de Crank-Nicolson na coordenada temporal. Portanto, temos:

Método das diferenças finitas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial x}(x_i, t_n) &= \frac{G_{i+1}^{(n)} - G_{i-1}^{(n)}}{2\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^2) \\ \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x_i, t_n) &= \frac{G_{i+1}^{(n)} - 2G_i^{(n)} + G_{i-1}^{(n)}}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Método de Crank-Nicolson:

$$\begin{aligned} G(x_i, t_{n+\frac{1}{2}}) &= \frac{G_i^{(n+1)} + G_i^{(n)}}{2} + \mathcal{O}(\Delta t^2) \\ G'(x_i, t_{n+\frac{1}{2}}) &= \frac{G_i^{(n+1)} - G_i^{(n)}}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t^2) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Obtemos então, para pontos interiores ao domínio, as seguintes aproximações:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial x} &= \frac{G_{i+nnny}^{(n+\frac{1}{2})} - G_{i-nnny}^{(n+\frac{1}{2})}}{2\Delta x}, & \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} &= \frac{G_{i+nnny}^{(n+\frac{1}{2})} - 2G_i^{(n+\frac{1}{2})} + G_{i-nnny}^{(n+\frac{1}{2})}}{\Delta x^2} \\ \frac{\partial G}{\partial y} &= \frac{G_{i+1}^{(n+\frac{1}{2})} - G_{i-1}^{(n+\frac{1}{2})}}{2\Delta y}, & \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} &= \frac{G_{i+1}^{(n+\frac{1}{2})} - 2G_i^{(n+\frac{1}{2})} + G_{i-1}^{(n+\frac{1}{2})}}{\Delta y^2} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Para pontos na fronteira, em função de condições de contorno de tipo von Neumann homogêneas estas equações são modificadas conforme a localização (já que as normais externas, \vec{n} , são de 4 tipos). As fórmulas para cada caso são claramente postos no algoritmo anexo.

Substituindo no sistema, obtemos:

Primeira equação:

$$\left[1 - \frac{\lambda_R \Delta t}{2} + \frac{\mu_A \Delta t}{2} + \frac{\nu_{RM} \Delta t}{2} \left(\frac{M_i^{(n+1)} + M_i^{(n)}}{2} \right)\right] R_i^{(n+1)} = \left[1 + \frac{\lambda_R \Delta t}{2} - \frac{\mu_A \Delta t}{2} - \frac{\nu_{RM} \Delta t}{2} \left(\frac{M_i^{(n+1)} + M_i^{(n)}}{2} \right)\right] R_i^{(n)} \quad (2.9)$$

Segunda equação:

$$\begin{aligned} & \left[-\frac{\alpha_M \Delta t}{2\Delta x^2} + \frac{u\Delta t}{4\Delta x} \right] M_{i+nnny}^{(n+1)} + \left[-\frac{\alpha_M \Delta t}{2\Delta y^2} + \frac{v\Delta t}{4\Delta y} \right] M_{i+1}^{(n+1)} + \left[1 + \frac{\alpha_M \Delta t}{\Delta x^2} + \frac{\alpha_M \Delta t}{\Delta y^2} + \frac{\lambda_M \Delta t}{2} \left(1 + \frac{M_i^{(n+1)} + M_i^{(n)}}{\rho(R_i^{(n+1)} + R_i^{(n)})} \right) - \frac{\nu_{MR} \Delta t}{2} \left(\frac{R_i^{(n+1)} + R_i^{(n)}}{2} \right) + \frac{\nu_{MB} \Delta t}{2} \left(\frac{B_i^{(n+1)} + B_i^{(n)}}{2} \right) \right] M_i^{(n+1)} + \\ & \left[-\frac{\alpha_M \Delta t}{2\Delta y^2} - \frac{v\Delta t}{4\Delta y} \right] M_{i-1}^{(n+1)} + \left[-\frac{\alpha_M \Delta t}{2\Delta x^2} - \frac{u\Delta t}{4\Delta x} \right] M_{i-nny}^{(n+1)} = \left[\frac{\alpha_M \Delta t}{2\Delta x^2} - \frac{u\Delta t}{4\Delta x} \right] M_{i+nnny}^{(n)} + \left[\frac{\alpha_M \Delta t}{2\Delta y^2} - \frac{v\Delta t}{4\Delta y} \right] M_{i+1}^{(n)} + \left[1 - \frac{\alpha_M \Delta t}{\Delta x^2} - \frac{\alpha_M \Delta t}{\Delta y^2} - \frac{\lambda_M \Delta t}{2} \left(1 + \frac{M_i^{(n+1)} + M_i^{(n)}}{\rho(R_i^{(n+1)} + R_i^{(n)})} \right) + \frac{\nu_{MR} \Delta t}{2} \left(\frac{R_i^{(n+1)} + R_i^{(n)}}{2} \right) - \frac{\nu_{MB} \Delta t}{2} \left(\frac{B_i^{(n+1)} + B_i^{(n)}}{2} \right) \right] M_i^{(n)} + \\ & \left[\frac{\alpha_M \Delta t}{2\Delta y^2} + \frac{v\Delta t}{4\Delta y} \right] M_{i-1}^{(n)} + \left[\frac{\alpha_M \Delta t}{2\Delta x^2} + \frac{u\Delta t}{4\Delta x} \right] M_{i-nny}^{(n)} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Terceira equação:

$$\begin{aligned} & \left[-\frac{\alpha_B \Delta t}{2\Delta x^2} \right] B_{i+nnny}^{(n+1)} + \left[-\frac{\alpha_B \Delta t}{2\Delta y^2} \right] B_{i+1}^{(n+1)} + \left[1 + \frac{\alpha_B \Delta t}{2\Delta x^2} + \frac{\alpha_B \Delta t}{2\Delta y^2} - \frac{\lambda \Delta t}{2} \left(1 - \frac{B_i^{(n+1)} + B_i^{(n)}}{2\kappa_B} \right) - \frac{\nu_{BR} \Delta t}{2} \left(\frac{R_i^{(n+1)} + R_i^{(n)}}{2} \right) \right] B_i^{(n+1)} + \left[-\frac{\alpha_B \Delta t}{2\Delta y^2} \right] B_{i-1}^{(n+1)} + \\ & \left[-\frac{\alpha_B \Delta t}{2\Delta x^2} \right] B_{i-nny}^{(n+1)} = \left[\frac{\alpha_B \Delta t}{2\Delta x^2} \right] B_{i+nnny}^{(n)} + \left[\frac{\alpha_B \Delta t}{2\Delta y^2} \right] B_{i+1}^{(n)} + \left[1 - \frac{\alpha_B \Delta t}{2\Delta x^2} - \frac{\alpha_B \Delta t}{2\Delta y^2} + \frac{\lambda \Delta t}{2} \left(1 - \frac{B_i^{(n+1)} + B_i^{(n)}}{2\kappa_B} \right) + \frac{\nu_{BR} \Delta t}{2} \left(\frac{R_i^{(n+1)} + R_i^{(n)}}{2} \right) \right] B_i^{(n)} + \left[\frac{\alpha_B \Delta t}{2\Delta y^2} \right] B_{i-1}^{(n)} + \left[\frac{\alpha_B \Delta t}{2\Delta x^2} \right] B_{i-nny}^{(n)} \end{aligned} \quad (2.11)$$

3. Simulações

Para obter uma aproximação para a solução do sistema obtido e analisar a relação entre as espécies desenvolvemos o algoritmo em anexo, em ambiente MATLAB[®]. Os parâmetros foram estimados. Apresentamos gráficos (figura 1) das espécies referentes à aproximação da solução.

4. Conclusão

Os resultados obtidos nas simulações ilustram claramente o fato do modelo ser do tipo presa-predador, pois pode-se observar nos gráficos obtidos que a rês se concentra em regiões em que há menos

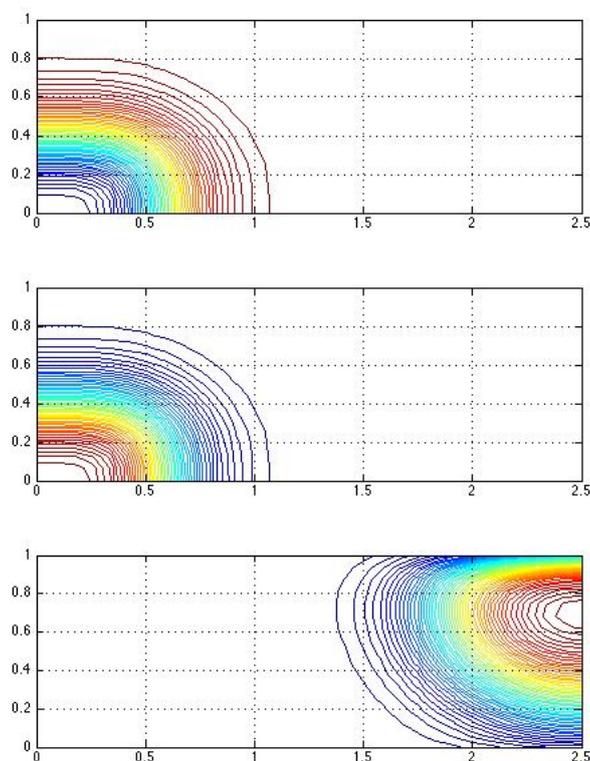


Figura 1: Distribuição das espécies (rês, mosca e besouro, respectivamente) após 400 iterações

mosca, e esta por sua vez encontra-se em menor quantidade em regiões onde a incidência de besouros é maior, pois este impede seu crescimento populacional. Também podemos notar que a população de besouros cresce sem sofrer influências negativas.

Portanto, temos resultados satisfatórios, que condizem com o que é esperado das equações do modelo, embora há também realidades que não podemos observar nas simulações, como o fato de que a rês e a mosca ocupam o mesmo espaço, e se não houver rês, não há mosca. Outro fato é que o besouro não é um parasita direto da mosca, mas sim de suas larvas, causando uma redução no número adulto de moscas, mas não matando-as diretamente.

Referências

Koga, M. T., Meyer, J. F. C. A. e Tabares, P. C. C. (2011). *Dinâmica Populacional Interativa da Mosca-dos-chifres (Haematobia Irritans) na Presença de um Predador: Simulações computacionais*. *Biomatemática* 21 (2011), 71-86

Anexo

Algoritmo 1 (em ambiente MATLAB[®])

```

clear all
clf
clc

%
% algoritmo para simular ações interespecíficas
% mosca-do-chifre (m), gado bovino (r) e besouro (b)
%
% dados do domínio
l=2.5; h=1.0; tf=200;
%
% parâmetros do problema
am=0.1e-3; ab=0.25e-3; ma=1.25e-2;
lr=0.025; lm=0.05; lb=0.0375;
u=0.25e-2; v=0.125e-2; r=1.0e+2; k=1.0e+5;
nrm=0.125e-5; nmr=0.25e-4; nmb=0.75e-2; nbr=0.25e-3;
%
% parâmetros da discretização
nt=500; dt=tf/nt; npit=4;
nx=30; dx=l/nx; nnx=nx+1;
ny=16; dy=h/ny; nny=ny+1;
nn=nnx*nny;
%
% condições iniciais
rz=0.25*ones(nn,1); mz=zeros(nn,1); bz=zeros(nn,1);
bz(nn)=1; bz(nn-1)=1; bz(nn-nny)=1; bz(nn-nny-1)=1;
mz(1)=0.25; mz(2)=0.25; mz(nny+1)=0.125;
mz(nny+2)=0.125;
%
% valores auxiliares
dt2=dt/2; ddx=dx*dx; ddy=dy*dy;
amx=am*dt2/ddx; amy=am*dt2/ddy; abx=ab*dt2/ddx; aby=ab*dt2/ddy;
ut=u*dt/(4*dx); vt=v*dt/(4*dy); plre=1-dt2*(lr-ma);
plrd=1+dt2*(lr-ma); nrmt=nrm*dt2;
lmt2=lm*dt2; lbt2=lb*dt2;
nmrt=nmr*dt2; nmbt=nmb*dt2;
nbrt=nbr*dt2;
sidem=-amx-ut; siddm=amx+ut;
sipem=-amy-vt; sipdm=amy+vt;
ssdem=-amx+ut; ssddm=amx-ut;
sspem=-amy+vt; sspdm=amy-vt;
dpem=1+2*(amx+amy); dpdm=1-2*(amx+amy);
sideb=-abx; siddb=abx;
sipeb=-aby; sipdb=aby;
ssdeb=-abx; ssddb=abx;
sspeb=-aby; sspdb=aby;

```

```

dpeb=1+2*(abx+aby); dpdb=1-2*(abx+aby);
%
% preparação das matrizes
mem=sparse(nn); mdm=sparse(nn);
meb=sparse(nn); mdb=sparse(nn);
moem=sparse(nn); modm=sparse(nn);
moeb=sparse(nn); modb=sparse(nn);
%
% preenchimento da parte constante, linear
for i=1:nn
    mem(i,i)=dpem; mdm(i,i)=dpdm;
    meb(i,i)=dpeb; mdb(i,i)=dpdb;
end
for i=1:nn-1
    mem(i+1,i)=sipem; mem(i,i+1)=sspem;
    mdm(i+1,i)=sipdm; mdm(i,i+1)=sspdm;
    meb(i+1,i)=sipeb; meb(i,i+1)=sspeb;
    mdb(i+1,i)=sipdb; mdb(i,i+1)=sspdb;
end
for i=1:nn-nny
    mem(i+nyy,i)=sidem; mem(i,i+nyy)=ssdem;
    mdm(i+nyy,i)=siddm; mdm(i,i+nyy)=ssddm;
    meb(i+nyy,i)=sideb; meb(i,i+nyy)=ssdeb;
    mdb(i+nyy,i)=siddb; mdb(i,i+nyy)=ssddb;
end
%
% corrigindo contorno
% lateral da esquerda
for kc=1:nyy
    ind=kc;
    mem(ind,ind+nyy)=-2*amx; mdm(ind,ind+nyy)=2*amx;
    meb(ind,ind+nyy)=-2*abx; mdb(ind,ind+nyy)=2*abx;
end
%
% lateral da direita
for kc=1:nyy
    ind=(nx)*nyy+kc;
    mem(ind,ind-nyy)=-2*amx; mdm(ind,ind-nyy)=2*amx;
    meb(ind,ind-nyy)=-2*abx; mdb(ind,ind-nyy)=2*abx;
end
%
% horizontal inferior
mem(1,2)=-2*amy; mdm(1,2)=2*amy;
for kc=1:nx
    ind=kc*nyy+1;
    mem(ind,ind-1)=0; mdm(ind,ind-1)=0;

```

```

    mem(ind,ind+1)=-2*amy; mdm(ind,ind+1)=2*amy;
    meb(ind,ind-1)=0; mdb(ind,ind-1)=0;
    meb(ind,ind+1)=-2*amy; mdb(ind,ind+1)=2*amy;
end
%
% horizontal superior
for kc=1:nx
    ind=kc*nny;
    mem(ind,ind-1)=-2*amy; mdm(ind,ind-1)=2*amy;
    mem(ind,ind+1)=0; mdm(ind,ind+1)=0;
    meb(ind,ind-1)=-2*amy; mdb(ind,ind-1)=2*amy;
    meb(ind,ind+1)=0; mdb(ind,ind+1)=0;
end
meb(nn,nn-1)=-2*amy; mdm(nn,nn-1)=2*amy;
%
% inicio das iterações temporais
rst=rz; mst=mz; bst=bz;
verr = zeros(nny,nnx);
verm = zeros(nny,nnx);
verb = zeros(nny,nnx);
vx = [0:dx:1]; vy = [0:dy:h];

for it=1:nt
    moem=mem; modm=mdm;
    moeb=meb; modb=mdb;
    for k=1:npit
        % calculo dos termos de r
        for i=1:nn
            ter=plre+nrmt*((mz(i)+mst(i))/2);
            rst(i)=(plrd-nrmt*((mz(i)+mst(i))/2))/ter;
        end
        % para calcular m, os operadores
        for il=1:nn
            r2=(rst+rz)/2; m2=(mst+mz)/2; b2=(bst+bz)/2;
            moem(il,il)=mem(il,il)+lmt2*(1+m2(il)/(r*r2(il)))-nmrt*r2(il)+nmbt*b2(il);
            modm(il,il)=mdm(il,il)-lmt2*(1+m2(il)/(r*r2(il)))+nmrt*b2(il)-nmbt*b2(il);
            moeb(il,il)=meb(il,il)-lbt2*(1-b2(il)/k)-nbrt*r2(il);
            modb(il,il)=mdb(il,il)+lbt2*(1-b2(il)/k)+nbrt*r2(il);
        end
        mst=moem\((modm*mz);
        bst=moeb\((modb*bz);
    end
    rz=rst; bz=bst; mz=mst;

    %Visualizacao dos resultados
    for j=1:nnx

```

```
        for i=1:nny
            ind = (j-1)*nny + i;
            verr(i,j) = rz(ind);
            verm(i,j) = mz(ind);
            verb(i,j) = bz(ind);
        end
    end
end
%Gráfico do resultado
subplot(3,2,1)
surf(vx,vy,verr)
view(0,90),colorbar off, shading interp;
subplot(3,2,2)
contour(vx,vy,verr,50),grid
subplot(3,2,3)
surf(vx,vy,verm)
view(0,90),colorbar off, shading interp;
subplot(3,2,4)
contour(vx,vy,verm,50),grid
subplot(3,2,5)
surf(vx,vy,verb)
view(0,90),colorbar off, shading interp;
subplot(3,2,6)
contour(vx,vy,verb,50), grid
pause(0.01);
it
end
```