MS 877:
Estudo dos Problemas de Lot-Sizing

Flávia Barbosa
RA 083552

1 Introdução

O planejamento e a programação da produção é um dos maiores desafios que várias companhias enfrentam. É um processo hierárquico, que envolve decisões a longo, médio e curto prazo, gerando uma necessidade por melhora e integração dos níveis de produção. Nesse contexto, o objetivo principal é determinar o tamanho dos lotes de produção e o instante de tempo de produção de modo a suprir uma certa demanda em um horizonte de planejamento finito. Para tanto, deve-se levar em conta a disponibilidade dos recursos e os custos de produção e estoque.

Suponhamos que o processo de manufatura é desencadeado por pedidos, que são originados por clientes ou por outras instalações, e que o rendimento de um sistema inclue um conjunto de produtos não personalizados.

Para motivar a atividade de planejamento, precisamos identificar quais assuntos merecem uma análise mais refinada, como por exemplo a manutenção de grandes estoques. Manter itens em estoque gera custos e, portanto, isso deve ser evitado. Por outro lado, se diferentes partes da produção usam recursos comuns, o custo fixo de preparação das operações pode aumentar o custo total da produção. Além disso, os pedidos que envolvem recursos comuns devem ser sequenciados para que a produção desses recursos não coincidam em diferentes estados causando um atraso. Portanto, devemos a achar um meio termo entre baixos custos preparação e baixos custos de estoque que favoreçam a produção em grandes lotes ou a produção lote-a-lote, respectivamente.

É necessario que o curso dos componentes do produto sejam conhecidas. As operações só podem ser executadas se essas componetes estiverem disponíveis, ou seja, o planejamento da produção deve respeitar a relação de precedência entre as operações. Também é necessário que a capacidade seja conhecida, uma vez que a produção de um item exige uma quantidade exata de recursos que são limitados por unidade de tempo.

2 Uncapacitated Lot-Sizing Model

O modelo mais simples de planejamento de produção é o *single-item / single-level uncapacitated lot-sizing*, que é o planejamento de um único item para suprir uma demanda dinânica e minimizar os custos de produção e estoque em um horizonte de planejamento discreto, o qual iremos representar pelo indice t, com $1 \leq t \leq n$.

O custo de produção inclue um custo fixo, independente do tamanho do lote produzido, e um custo unitário de produção para cada unidade produzida no lote. Os custos de estoque são cobrados por unidade mantida em estoque no final de cada período. A demanda de um período pode ser atendida pela produção ou pelo estoque, e sobras não são permitidas no final do horizonte de planejamento. Além disso, nesse modelo a capacidade de produção é considerada infinita.

Para cada perído t, temos as seguintes informações:

- p_t: custo de produção unitário
- q_t: custo de produção fixo
- h_t: custo de estoque unitário
- $d_t \geq o$: demanda a ser satisfeita

As variáveis de decisão para cada período t são:

- x_t: tamanho do lote de produção
- $y_t = 1$: se houver produção no período t
- s_t: estoque ao final do perido t

Então, o problema pode ser formulado como:

$$\begin{aligned}
\text{minimizar} \quad & \sum_{t=1}^{n}(p_t * x_t + q_t * y_t + h_t * s_t) && (1)\\
\text{sujeito a} \quad & s_{t-1} + x_t = d_t + s_t \ \forall t && (2)\\
& s_0 = s_n = 0 && (3)\\
& x_t \leq M_t * y_t \ \forall t && (4)\\
& x_t \geq 0 \ \forall t && (5)\\
& s_t \geq 0 \ \forall t && (6)\\
& y_t \in \{0, 1\} \ \forall t && (7)
\end{aligned}$$

Onde M_t é uma constante positiva suficientemente grande.

A restrição (2) é a chamada de conservação de fluxo e a restrição (3) garante que não há estoques inicial e final.

2.1 Estrutura da Solução Ótima

Antes de tudo, devemos verificar se os estoques inicial e final são fixos e se existem limites inferiores para o estoque. Sendo assim, o problema pode ser reformulado com demandas modificadas de modo que os estoques inicial e final e o limite inferior para o estoque sejam todos iguais a zero.

Suponha que $s_0 = s_0^*$, $s_n = s_n^*$ e que $s_t \geq s_t^*$ para $1 \leq t \leq n$. Para tratar o limite inferior do estoque, definimos $\underline{S_0} = s_0^*$ e então calculamos:

$$\underline{S_t} = \max \left[\underline{S_{t-1}} - d_t, s_t^* \right]$$

Em seguida, intriduzimos a variável de estoque líquido $ns_t = s_t - \underline{S_t} \geq 0$ para $t = 0, ..., n$. A equação balanceada resultante é:

$$ns_{t-1} + x_t = \left(d_t + \underline{S_t} - \underline{S_{t-1}} \right) + ns_t$$

Assim, obtemos o problema modificado com d_t substituido por $d_t + \underline{S_t} - \underline{S_{t-1}} \geq 0$ para $1 \leq t \leq n$ e com a quantidade $\sum_{t=0}^{n} h_t * \underline{S_t}$ adicionada à função objetivo. Finalmente, fazemos $ns_0 = ns_n = 0$

Proposição: Existe uma solução ótima em que $s_{t-1} * x_t = 0 \ \forall t$

Proposição: Existe uma solução ótima caracterizada por:

i.) Um subconjunto de períodos $1 \leq t_1 < ... < t_r \leq n$ em que a produção acontece. A quantidade produzida em t_j é $(d_t)_j + ... + (d_t)_{j+1}$ para $j = 1, ..., r$ com $t_{r+1} = n + 1$.

ii.) Um subconjunto de períodos $R \subseteq \{1, ..., n\} / \{t_{1,...,t_r}\}$. Nos períodos $\{t_1, ..., t_r\} \bigcup R$ existe a preparação.

3 Master Production Scheduling Model

Esse modelo é conhecido como *multi-item capacitated lot-sizing*, em que precisamos planejar a produção de um conjunto de itens sobre um horizonte de curto prazo correspondente pelo menos ao ciclo total de produção desses itens. Os planejamentos das produções de diferentes itens estão interligadas pelas restrições de capacidade consequentes dos recursos comuns a esses itens.

Definiremos os seguintes índices:

- i, $1 \leq i \leq m$: conjunto de itens a serem produzidos
- k, $1 \leq k \leq K$: conjunto de recursos compartilhados com capacidade limitada

- t, $1 \leq t \leq n$: periodos de tempo

Usaremos os mesmos dados p_t, q_t, h_t e d_t e as mesmas variáveis de decisão x_t, y_t e s_t do problema apresentado na seção anterior.

Além disso, precisamos de alguns dados adicionais:

- L_t^k: capacidade disponivel do recurso k no período t
- $\alpha^{i,k}$: quantidade do recurso k consumido por unidade produzida do item i
- $\beta^{i,k}$: quantidade do recurso k consumido para o set-up da produção do item i

O modelo matemático desse problema é dado por:

$$
\begin{aligned}
\text{minimizar} \quad & \sum_i \sum_t (p_t^i * x_t^i + q_t^i * y_t^i + h_t^i * s_t^i) && (8)\\
\text{sujeito a} \quad & s_{t-1}^i + x_t^i = d_t^i + s_t^i \ \forall i,t && (9)\\
& x_t^i \leq M_t^i * y_t^i \ \forall i,t && (10)\\
& \sum_i \alpha^{i,k} * x_t^i + \sum_i \beta^{i,k} * y_t^i \leq L_t^k \ \forall k,t && (11)\\
& x_t^i \geq 0 \ \forall i,t && (12)\\
& s_t^i \geq 0 \ \forall i,t && (13)\\
& y_t^i \in \{0,1\} \ \ \forall i,t && (14)
\end{aligned}
$$

A restrição (11) expressa a restrição de capacidade de cada recurso k em cada período t.

4 Material Requirements Planning Model (MRP)

Iremos descrever o modelo *multi-item multi-level capacitated lot-sizing*, cujo propósito é otimizar simultaneamente a produção e a compra de todos os itens, desde matérias-primas até produtos finais com o objetivo de satisfazer para cada item a demanda externa ou independente de clientes e a demanda interna ou dependente da produção de outros itens sobre um horizonte a curto prazo.

A dependência entre os itens é modelada com auxilio da definição de *estrutura de produto*, também chamdada de lista de materiais (bill of materials - BOM).

Usaremos os mesmos indices usados anteriormente e também o indice j, $1 \leq j \leq m$ para identificar os itens. Além disso, para o item i usaremos a notação D_i para representar o conjunto de sucessores diretos de i, ou seja, os itens que consomem diretamente o item i na sua produção. Para $j \in D_i$, denotamos $r^{i,j}$ a quantidade do item i usada para produzir uma unidade do item j. Em outras palavras, r identifica a demanda dependente enquanto d corresponde à demanda independente. Para cada item i, também temos γ^i que é o prazo para produzir ou entregar qualquer lote do produto i.

O problema para esse modelo é o seguinte:

$$\text{minimizar} \quad \sum_i \sum_t (p_t^i * x_t^i + q_t^i * y_t^i + h_t^i * s_t^i) \tag{15}$$

$$\text{sujeito a} \quad s_{t-1}^i + x_{t-\gamma^i}^i = d_t^i + \sum_{j \in D_i} r^{i,j} * x_t^j s_t^i \ \forall i, t \tag{16}$$

$$x_t^i \leq M_t^i * y_t^i \ \forall i, t \tag{17}$$

$$\sum_i \alpha^{i,k} * x_t^i + \sum_i \beta^{i,k} * y_t^i \leq L_t^k \ \forall k, t \tag{18}$$

$$x_t^i \geq 0 \ \forall i, t \tag{19}$$

$$s_t^i \geq 0 \ \forall i, t \tag{20}$$

$$y_t^i \in \{0, 1\} \ \ \forall i, t \tag{21}$$

4.1 Definição e Implementação do MRP

A demanda independente é definida para cada facilidade como a demanda vinda de fontes externas.

Em uma política de produção *make-to-stock*, essa demanda independente deve estar já em estoque quando a demanda do cliente chega à facilidade. Todas as atividades de produção e aquisição devem ser realizadas em antecipação a essa demanda e baseadas nas previsões das demandas. Já em uma política de produção *make-to-order* um prazo de entrega é garantido aos consumidores e algumas atividades ainda são executadas após o pedido externo dos produtos. No instante de tempo do pedido, a facilidade deve ter matéria prima suficiente ou produtos semi-acabados em estoque de modo que o prazo necessário para terminar de produzir o restante seja menor ou igual ao prazo de entrega comercial.

Assim, o modelo de planejamento será resolvido e usado em um horizonte de planejamento rolate: a solução proposta para os periodos de tempo iniciais, os dados do modelo e os parâmetros serão atualizados para os períodos subsequentes e o modelo deve ser resolvido novamente.

Já demanda por produtos intermediários é chamada de demanda dependente.

A lista de materias (BOM) define a estrutura do produto especificando para cada componente (acabado ou semi-acabado) todos os seus componentes predecessores diretos assim como a quantidade necessaria por unidade do componente sucessor. Isso permite transformar o produto final ou a demanda externa em requerimentos para cada uma das fases da produção de todos os componentes.

Os prazos de aquisição e produção representam o tempo total necessário para completar um pedido de aquisição ou de produção, incluindo preparação, administração, espera, produção, testes de controle de qualidade e entrega.

No modelo de otimização, γ^i é o prazo mínimo necessário para um lote do item i ser produzido. Como o MRP não considera restrições de capacidade, esse minimo deve ser aumentado por um prazo de segurança para garantir a factibilidade do plano de produção.

A passagem de produtos por diferentes centros de trabalho, assim como o tempo e a capacidade consumida em cada centro de trabalho será analisada no intuito de modelar e controlar a utilização das capacidades.

O roteamento de componentes mais simples consiste na decomposição do pedido de produção de cada componente da lista de materias em uma sequência de operações de produção. Para cada operação na sequência, o tempo unitário de produção e o tempo de set-up é definido (o tempo de set-up é independente do tamanho do lote).

As informações de roteamento permitem calcular o prazo minimo necessário para cada pedido de produção.

A capacidade é definida pelo número efetivo de horas de produção com podem ser executadas no recurso durante o período de tempo. Essa capacidade deverá ser comparada com os perfis de carga calculados pelo planejamento da produção e pelo roteamento dos dados.

Normalmente, a capacidade disponível é obtidao pela capacidade bruta (horas de trabalho) e pelo fator de produtividade (fração das horas de trabalho usadas efetivamente para a produção). O fator de produtividade leva em conta intervalos, interrupções, disturbios ou ineficiências durante a utilização do recurso.

As demandas independente e dependente definem juntas o requerimento grosso, correspondente ao consumo total, tanto por clientes externos quanto por pedidos internos. Isso pode ser satisfeito por estoque atual, por produção adicional ou por compras e, para calcular as quantidades que devem ser produzidas ou compradas, é necessário ter conhecimento do nivel de estoque.

5 Outros casos

Existem, ainda, alguns problemas mais simples de lot-sizing que não são tão comuns no dia a dia das grandes companhias.

5.1 Economic Order Quantity - EOQ

Nesse problema, o mais simples de todos, o processo de produção ocorre em um único nível *(single-level)* e não existem restrições de capacidade, o que torna esse problema um *single-item problem*.

A demanda é assumida como estacionária (ocorre continuamente com uma taxa constante) em um horizonte de planejamento continuo infinito.

5.2 Economic Lot Scheduling Problem - ELSP

Aqui, são consideradas as restrições de capacidade, e as demandas continuam sendo consideradas estacionárias e o horizonte de planejamento também é continuo e infinito.

Como alguns recursos são normalmente compartilhados por vários itens, esse problema é um *single-leve multi-item problem*.

5.3 Wagner-Whitin Problem - WW

Esse caso é uma modificação do problema de EOQ, no sentido em que o horizonte de planejamento agora é finito e subdividido em vários períodos discretos. A demanda é dada por período e pode variar.

Os limites de capacidade não são levados em conta, o que torna esse problema um *single-item problem*.

Além disso, o problema WW pode ser interpretado como um problema de caminho mínimo e, assim, os procedimentos para encontrar a solução ótima existem e são de ordem polinomial.

5.4 Capacitated lot sizing problem - CLSP

O CLSP é um problema *multi-item* que pode ser visto como uma extensão do problema WW com restrições de capacidade. Assim, queremos minimizar a soma dos custos de estoque e de produção dado que existe uma quantidade limitada dos recursos.

As decisões a serem tomadas para o agendamento em cada periodo não são integradas: primeiro o CLSP é resolvido e em seguida o problema de agendamento para cada período separadamente.

5.5 Discrete lot sizing problem - DLSP

Esse problema é originado da divisão do macro-período do CLSP em vários micro-períodos.

A suposição fundamental do DLSP é a produção de *tudo ou nada*: somente um item pode ser produzido por período e, se for produzido, essa produção usa toda a capacidade disponível. Por isso, a produção de um lote pode durar vários períodos.

5.6 Continuous setup lot sizing problem - CSLP

Os custos de preparação ocorrem apenas uma vez e, assim, a produção de *tudo ou nada* é abandonada.

No CSLP somente um item pode ser produzido por período.

5.7 Proportional lot sizing problem - PLSP

O problema proporcional utiliza a capacidade que sobrou de algum recurso para a produção de um segundo item no período. Para tanto, é necessário que a ordem em que esses itens devem ser produzidos seja conhecida.

Ainda, o estado de preparação de uma máquina pode ser alterado no máximo uma vez por período. A produção de um período só poderá ocorrer se a máquina está devidamente preparada para isso ou no inicio ou no final do periodo.