MA141 Geometria Analítica

Prova 3 - Turmas 8h-10h

25 de junho de 2024

Nome completo: RA: Turma:

Questão	Q1	Q2	Q3	Q4	Total
Valor	2,5	2,5	2	3	10
Nota					

Instruções para realização e entrega de sua prova:

- Desligue o celular.
- Não é permitido o uso de calculadoras, smartwatches, celulares ou qualquer outro material de consulta.
- Essa prova terá inicio às 8:00h e **finalizará às 09:55h**. Você terá duas horas para resolvê-la.
- A prova contém **4 (quatro)** questões, uma por folha. Resolva cada questão **em sua respectiva folha**.
- Não retire o grampo da prova.
- **Respostas sem justificativas não serão consideradas.**

As questões da prova estão nas próximas páginas; **aguarde a indicação da professora/do professor** para virar a folha.

Boa prova!

Questão 1 [2,5 pt] Determine as mudanças de coordenadas consecutivas necessárias para encontrar a forma canônica da cônica; escreva a equação canônica da cônica obtida.

$$3x^2 - 2xy + 3y^2 - 8\sqrt{2}x + 10 = 0.$$

Questão 2 Considere a seguinte equação de uma cônica em coordenadas polares:

$$r = \frac{6}{3 + 2\cos\theta}.$$

1. [1,5 pt] Identifique a cônica e dê a equação de uma reta diretriz da mesma.

2. [1 pt] Escreva a equação canônica da cônica em coordenadas cartesianas.

Questão 3 Considere a seguinte equação de superfície no espaço, onde λ é um parámetro real:

$$x^2 + \frac{1}{2}(\lambda + 1)y^2 + (\lambda^2 - 1)z^2 = 1.$$

1. [0,75 pt] Determine o tipo de superfície descrito pela equação acima para $\lambda = 1$ e $\lambda = -1$.

2. [1,25 pt] Determine o tipo de superfície quádrica descrito pela equação acima para λ nos seguintes intervalos: $(-\infty, -1)$,$(-1, 1)$,$(1, \infty)$.

Questão 4 Determine se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas. Justifique adequadamente.

1. [1 pt] No espaço, a superfície de coordenadas cartesianas $x^2+y^2+2z=0$, em coordenadas esféricas (r,θ,φ) ela é descrita pela equação $(r(\sin\varphi)^2+2\cos\varphi)r=0$.

2. [1 pt] A superfície cilíndrica gerada pela curva $\gamma : \begin{cases} 8z^2-xy+6=0 \\ x=0 \end{cases}$ e vetor $V=(1,0,\frac{1}{2})$ é a superfície de equação $8z^2+2x^2-8xz-y+6=0$.

3. [1 pt] No plano, a equação cartesiana da hipérbole centrada na origem com focos em $(7,0)$ $(-7,0)$ com exentricidade $e=\frac{2\sqrt{13}}{4}$ é $-\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=4$.

SOLUÇÕES

1-

Opção 1 (veja abaixo a opção 2)

Escrevemos a cônica com matrizes:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 10 = 0$$

Polinômio característico:

$$det(A - I_2\lambda) = 0 \implies \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$$

Portanto, $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 4$.

Para $\lambda_1 = 2$,

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \implies \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0.$$

Assim, o sistema correspondente fica:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases}$$

de onde tiramos que a solução desse sistema são os vetores x=y, ou seja (vamos chamar de v_1 o vetor (x,y) genérico solução do sistema para o primeiro autovalor), $v_1 = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$ ou uma notação equivalente é $v_1 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, com α pertencente aos reias. Agora vamos normalizar esse vetor (e vamos chamar ele de u_1, para mostrar que ele é um vetor unitário, ou seja, de norma valendo 1):

$$\sqrt{\alpha^2 + \alpha^2} = 1 \implies \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Vamos escolher α positivo. Assim,

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Para λ_2=4, analogamente,

$$\begin{cases} -x - y = 0 \\ -x + -y = 0 \end{cases}$$

de onde tiramos que a solução desse sistema são os vetores x=-y, ou seja, $v_2 = \begin{pmatrix} -y \\ y \end{pmatrix}$ ou é equivalente $v_2 = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, com α nos reias. Agora vamos normalizar esse vetor:

$$\sqrt{(-\alpha)^2 + \alpha^2} = 1 \implies \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Vamos escolher α positivo. Assim,

$$u_2 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Logo, definimos as novas coordenadas (x',y'), que estão rotacionadas, como:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y' \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' \end{cases} \tag{1}$$

Então a equação da cônica fica:

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + 10 = 0$$

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + 10 = 0$$

$$2x'^2 + 4y'^2 - 8x' + 8y' + 10 = 0 \tag{2}$$

$$x'^2 - 4x' + 2y'^2 + 4y' = -5$$

$$(x'^2 - 4x' + (2)^2) + 2(y'^2 + 2y' + (1)^2) = -5 + 2^2 + 2(1)$$

$$(x' - 2)^2 + 2(y' + 1)^2 = 1$$

$$\frac{(x'-2)^2}{1} + \frac{(y'+1)^2}{\frac{1}{2}} = 1$$

$$\frac{x''^2}{1} + \frac{y''^2}{\frac{1}{2}} = 1$$

Com a mudança de coordenada que diz respeito à tranlação:

$$\begin{cases} x'' = x' - 2 \\ y'' = y' + 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x' = x'' + 2 \\ y' = y'' - 1 \end{cases} \tag{3}$$

E podemos juntar as mudanças de coordenadas (1) e (2) para obter

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x'' + 2) - \frac{1}{\sqrt{2}}(y'' - 1) \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x'' + 2) + \frac{1}{\sqrt{2}}(y'' - 1) \end{cases}$$

Opção 2 A equação quadrática tem os coeficientes: $A = 3, B = -2, C = 3$. Com isso, temos $AC - B^2/4 = 8 > 0$ por tanto a equação pode ser uma elipse ou uma cônica degenerada.

Observamos que $A = C$ portanto devemos fazer uma rotação de $\theta = \pi/4$. Isto é, as novas coordenadas (x', y') satisfazem

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y'). \end{cases}$$

Substituímos essas coordenadas na equação original, obtendo:

$$3x^2 - 2xy + 3y^2 - 8\sqrt{2}x + 10 =$$
$$3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y')\right)^2 - 2\frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y')\frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') + 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y')\right)^2 - 8\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') + 10 =$$
$$2(x')^2 + 4(y')^2 - 8x' + 8y' + 10 = 0. \quad (4)$$

Notar que essa equação é a mesma que (2) acima, obtida na opção 1. Completando quadrados como acima, obtemos que a equação da cônica é

$$\frac{(x' - 2)^2}{1} + \frac{(y' + 1)^2}{\frac{1}{2}} = 1$$

ou, após uma translação,

$$\frac{x''^2}{1} + \frac{y''^2}{\frac{1}{2}} = 1$$

2-

1.Sabemos que a equação de uma cônica em coordenadas polares com reta diretriz à direita do polo é $r = \frac{\epsilon d}{1+\epsilon cos\theta}$, portanto, neste caso,

$$r = \frac{6}{3 + 2cos\theta} = \frac{2}{1 + \frac{2}{3}cos\theta} \Longrightarrow \begin{cases} \epsilon d = 2 \\ \epsilon = \frac{2}{3} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} d = 3 \\ \epsilon = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Como $0 < \epsilon < 1$, então temos uma elipse e uma das retas retas diretrizes, como $d = 3$, está em $x = 3$.

2.Vamos usar:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$$

Assim,

$$r = \frac{2}{1 + \frac{2}{3}cos\theta} \Longrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{2}{1 + \frac{2}{3}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}} \Longrightarrow$$
$$\sqrt{x^2 + y^2} + \frac{2}{3}x = 2 \Longrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 2 - \frac{2}{3}x \Longrightarrow$$
$$x^2 + y^2 = 4 - \frac{8}{3}x + \frac{4}{9}x^2 \Longrightarrow \frac{5}{9}x^2 + \frac{8}{3}x + y^2 = 4 \Longrightarrow$$

$$\frac{5}{9}\left(x^2 + \frac{24}{5}x + \left(\frac{12}{5}\right)^2\right) + y^2 = 4 + \frac{5}{9}\left(\frac{12}{5}\right)^2 \Longrightarrow$$
$$\frac{5}{9}\left(x + \frac{12}{5}\right)^2 + y^2 = \frac{16}{5} \Longrightarrow \frac{\left(x + \frac{12}{5}\right)^2}{\frac{144}{25}} + \frac{y^2}{\frac{16}{5}} = 1$$

$$\frac{x'^2}{\left(\frac{12}{5}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{4}{\sqrt{5}}\right)^2} = 1$$

com mudança de coordendas $x' = x + \frac{12}{5}$.

3-

1. Para $\lambda = 1$:

$$x^2 + \frac{1}{2}(\lambda + 1)y^2 + (\lambda^2 - 1)z^2 = 1. \Longrightarrow x^2 + y^2 = 1$$

que representa um cilindro com um circunferência, centralizada na origem, como curva geratriz

Para $\lambda = -1$,

$$x^2 + \frac{1}{2}(\lambda + 1)y^2 + (\lambda^2 - 1)z^2 = 1. \Longrightarrow x^2 = 1 \Longrightarrow x = \pm 1$$

que representa uma par de planos paralelos, um em $x = 1$ e outro em $x = -1$.

2. Vamos analisar os intervalos:

Para o primeiro intervalo aberto $(-\infty, -1)$, o coeficiente de y^2, que é $\frac{(\lambda+1)}{2}$, é sempre negativo enquanto o coeficiente $(\lambda^2 - 1)$ de z^2 é sempre positvo. Assim, com, dois coeficientes postivos e um negativo, temos um hiperboloide de uma folha.

No segundo intervalo aberto $(-1, 1)$, o coeficiente $\frac{(\lambda+1)}{2}$, é sempre positivo enquanto o coeficiente $(\lambda^2 - 1)$ é sempre negativo. Assim, novamente, dois coeficientes postivos e um negativo representam um outro hiperboloide de uma folha.

Agora, no terceiro intervalo aberto $(1, \infty)$, os coeficientes $\frac{(\lambda+1)}{2}$ e $(\lambda^2 - 1)$ são sempre positivos. Dessa forma, com três coeficientes positivos, temos uma equação referente a um elipsoide.

4-

1.[VERDADEIRA] Usando a troca de coordenadas de cartesianas para esféricas dada por

$$\begin{cases} x = rcos\theta sen\phi \\ y = rsen\phi sen\phi \\ z = rcos\phi \end{cases}$$

nossa expressão fica:

$$x^2 + y^2 + 2z = 0 \Longrightarrow r^2(cos\theta)^2(sen\phi)^2 + r^2(sen\theta)^2(sen\phi)^2 + 2rcos\phi = 0 \Longrightarrow$$

$$r^2[(cos\theta)^2 + (sen\theta)^2](sen\phi)^2 + 2rcos\phi = 0 \Longrightarrow r^2(sen\phi)^2 + 2rcos\phi = 0$$

$$\Longrightarrow (r(sen\phi)^2 + 2cos\phi)r = 0$$

2.[FALSA] Podemos ver logo que as duas superfícies dadas não têm a mesma curva geratriz quando x=0: a primeira fica $8z^2 + 6 = 0$ e a segunda fica $8z^2 - y + 6 = 0$. Além disso, a curva γ não está bem definida, afinal $8z^2 + 6 = 0$ não tem solução nos reais.

3.[FALSA] Vamos achar os parâmetros da hipérbole com $c = 7$ e comparar com a equação dada. Usando a excentricidade,

$$\epsilon = \frac{c}{a} \Longrightarrow a = \frac{c}{\epsilon} \Longrightarrow a = \frac{7}{\frac{2\sqrt{13}}{4}} = \frac{14}{\sqrt{13}}$$

Já podemos ver que nenhum dos parâmetros da equação da hipérbole dada é $\frac{14}{\sqrt{13}}$, na verdade são 3 e 2. Dessa forma, a alternativa é falsa.