MA141 Geometria Analítica

Prova 3 - Turmas 19h-21h

25 de junho de 2024

Nome completo: RA: Turma:

Questão	Q1	Q2	Q3	Q4	Total
Valor	2,5	2,5	2	3	10
Nota					

Instruções para realização e entrega de sua prova:

- Desligue o celular.
- Não é permitido o uso de calculadoras, smartwatches, celulares ou qualquer outro material de consulta.
- Essa prova terá inicio às 19:00h e **finalizará às 20:55h**. Você terá duas horas para resolvê-la.
- A prova contém **4 (quatro)** questões, uma por folha. Resolva cada questão **em sua respectiva folha**.
- Não retire o grampo da prova.
- **Respostas sem justificativas não serão consideradas.**

As questões da prova estão na próxima página; **aguarde a indicação da professora/do professor** para virar a folha.

Boa prova!

Questão 1 [2,5 pt] Determine as mudanças de coordenadas consecutivas necessárias para encontrar a forma canônica da cônica; escreva a equação canônica da cônica obtida.

$$3x^2 + 14xy + 3y^2 + 20 = 0.$$

Questão 2 Considere a cônica no plano dada pela seguinte equação

$$x^2 + 4y^2 - 2x + 8y + 4 = 0.$$

1. [1,5pt] Determine o tipo da cônica e encontre seus elementos característicos (foco(s), diretriz(es), centro/vértice, excentricidade).

2. [1pt] Escreva a equação da cônica em coordeandas polares.

Questão 3 [2 pt] Encontre a equação cartesiana da superfície cônica gerada pela curva diretriz

$$\gamma : \begin{cases} y^2 - 2y - 4z - 3 = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

e vértice $Q = (0, 0, 0)$.

Questão 4 Determinar se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas. Justifique adequadamente.

1. [1 pt] A interseção da superfície $z = -x^2 + 2y^2$ com o plano $\tau)\, x = k$ é uma parábola com foco por baixo da diretriz.

2. [1pt] Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, a equação $(\lambda + 1)x^2 + y^2 - \lambda^2 z^2 = 1$ descreve sempre um hiperboloide de uma folha.

3. [1 pt] A superfície de coordenadas cartesianas $x^2 + y^2 = 2z$ é descrita em coordenadas esféricas (r, θ, φ) pela equação $(r(\sin\varphi)^2 - 2\cos\varphi)r = 0$.

GABARITO

Exercício 1

A equação na forma matricial da cônica é: $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 20 = 0$

Para a matriz $M = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$ vamos encontrar os autovalores associados através de $det(M - I\lambda) = 0$, ou seja, $\begin{vmatrix} 3-\lambda & 7 \\ 7 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \implies (3-\lambda)^2 - 7^2 = 0$

Resolvendo a equação característica obtemos que $\lambda_1 = -4$ e $\lambda_2 = 10$. A partir disso, escolhemos um autovalor, nesse caso, λ_2 e resolvemos o sistema

$$\begin{bmatrix} 3-10 & 7 \\ 7 & 3-10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Encontramos, com isso, a relação $x = y$ e, portanto, nosso autovetor é $V = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

O autovetor normalizado nos fornece o $\cos(\theta)$ e o $\sin(\theta)$ associados à rotação da cônica:

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{bmatrix} = \frac{V}{|V|} = \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Ou seja, $\theta = \frac{\pi}{4}$. A relação entre o novo sistema de coordenadas $x'y'$ e o antigo xy é a seguinte

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

Como a inversa da matriz de rotação é a sua transposta (matriz ortogonal) podemos equivalentemente relacionar os sistemas de coordenadas da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Tendo feito a rotação no sistema de coordenadas podemos analisar a equação da cônica nesse novo sistema, ou seja:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + 20 = 0 &\implies \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + 20 = 0 \\
&\implies \begin{bmatrix} 10x' & -4y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + 20 = 0 \\
&\implies 10(x')^2 - 4(y')^2 + 20 = 0 \\
&\implies 20 = 4(y')^2 - 10(x')^2 \\
&\implies \frac{(y')^2}{5} - \frac{(x')^2}{2} = 1
\end{aligned}$$

Trata-se de uma hipérbole já na sua forma canônica, apenas sendo necessário realizar a rotação do sistema de coordenadas dada por $x' = \frac{x+y}{\sqrt{2}}$ e $y' = \frac{y-x}{\sqrt{2}}$.

Exercício 2a

Vamos inicialmente completar quadrados:

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + 4(y^2 + 2y) + 4 = 0 &\implies ((x-1)^2 - 1) + 4((y+1)^2 - 1) + 4 = 0 \\ &\implies (x-1)^2 + 4(y+1)^2 - 1 - 4 + 4 = 0 \\ &\implies (x-1)^2 + 4(y+1)^2 = 1 \\ &\implies \frac{(x-1)^2}{1^2} + \frac{(y+1)^2}{(\frac{1}{2})^2} = 1 \end{aligned}$$

Trata-se, então, de uma elipse da forma $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$, com $c^2 = a^2 - b^2$, excentricidade $e = \frac{c}{a} < 1$, centro em (x_0, y_0) e focos em $(x_0 - c, y_0)$ e $(x_0 + c, y_0)$. Comparação das equações permite observar que $x_0 = 1$, $y_0 = -1$, $a = 1$ e $b = \frac{1}{2}$.

A partir disso, obtemos

$$c^2 = 1^2 - (\frac{1}{2})^2 \implies c = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

e também

$$e = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} \implies e = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

seu centro está em $(1, -1)$, e seus focos são dados por $(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}, -1)$ e $(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}, -1)$. Para encontrar os quatro vértices fazemos $x = x_0$ e obtemos os pontos (x_0, y) que satisfazem a equação, analogamente realizamos o mesmo procedimento com $y = y_0$. Na equação, temos

$$\frac{(1-1)^2}{1^2} + \frac{(y+1)^2}{(\frac{1}{2})^2} = 1 \implies \frac{(y+1)^2}{(\frac{1}{2})^2} = 1 \implies y = -\frac{1}{2} \text{ ou } y = -\frac{3}{2},$$

portanto, dois vértices são $(1, -\frac{1}{2})$ e $(1, -\frac{3}{2})$. Para achar os outros vértices retornamos a equação:

$$\frac{(x-1)^2}{1^2} + \frac{(-1+1)^2}{(\frac{1}{2})^2} = 1 \implies \frac{(x-1)^2}{1^2} = 1 \implies x = 2 \text{ ou } x = 0,$$

logo, os outros dois vértices são: $(0, -1)$ e $(2, -1)$.

Exercício 2b

Para obter a cônica em coordenadas polares, fazemos a substituição na equação $x^2 + 4y^2 - 2x + 8y + 4 = 0$ dada por $x = r\cos(\theta)$ e $y = r\sin(\theta)$. Assim, obtemos:

$$\begin{aligned} &(r\cos(\theta))^2 + 4(r\sin(\theta))^2 - 2(r\cos(\theta)) + 8(r\sin(\theta)) + 4 = 0 \\ &\qquad \implies r(r(\cos(\theta))^2 + 4r(\sin(\theta))^2 - 2\cos(\theta) + 8\sin(\theta)) + 4 = 0 \\ &\qquad \implies r = \frac{-4}{r(\cos(\theta))^2 + 4r(\sin(\theta))^2 - 2\cos(\theta) + 8\sin(\theta)}. \end{aligned}$$

Exercício 3

Uma superfície cônica com curva diretriz situada no plano $x = a$ (nesse caso, $a = 3$) da forma $f(y, z) = 0$, com vértice $Q = (0, 0, 0)$ situado na origem tem equação dada por $f(\frac{ay}{x}, \frac{az}{x}) = 0 \implies f(\frac{3y}{x}, \frac{3z}{x}) = 0$. Como $f(y, z) = y^2 - 2y - 4z - 3 = 0$, então a equação desejada é

$$\begin{aligned} f(\frac{3y}{x}, \frac{3z}{x}) &= (\frac{3y}{x})^2 - 2(\frac{3y}{x}) - 4(\frac{3z}{x}) - 3 = 0 \\ &\implies \frac{9y^2}{x^2} - \frac{6y}{x} - \frac{12z}{x} - 3 = 0 \\ &\implies 9y^2 - 6xy - 12xz - 3x^2 = 0. \end{aligned}$$

Exercício 4a

A afirmação **falsa**. Para todo k real a intersecção com o plano $x = k$ é de fato uma parábola, $z = -k^2+2y^2 \implies z-(-k^2) = 2y^2 \implies \frac{1}{2}(z-(-k^2)) = (y-0)^2$. Trata-se de uma parábola com vértice em $(-k^2, 0)$ escrita na forma $4p(z-z_0) = (y-y_0)^2$, foco em $(y_0, z_0 + p)$ e reta diretriz $z = z_0 - p$. Como, nesse caso, comparando as equações percebemos que: $4p = \frac{1}{2}$, então, $p > 0$, isso implica que a coordenada em z do foco $-k^2 + p$ é numericamente maior que a coordenada $-k^2 - p$ de todos os pontos pertencentes à reta diretriz, ou seja, a reta diretriz está por baixo do foco.

Exercício 4b

Afirmação **falsa**. Tome $\lambda = 0$, nesse caso, a equação fica na forma $x^2 + y^2 = 1$, que representa um cilindro no espaço euclidiano de coordenadas (x, y, z).

Exercício 4c

Afirmação **verdadeira**. Das coordenadas esféricas $x = r\cos(\theta)\sin(\phi)$, $y = r\sin(\theta)\sin(\phi)$ e $z = r\cos(\phi)$. Vamos substituir na equação

$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 = 2z &\implies (r\cos(\theta)\sin(\phi))^2 + (r\sin(\theta)\sin(\phi))^2 = 2r\cos(\phi) \\
&\implies (r\sin(\phi))^2((\cos(\theta))^2 + (\sin(\theta))^2) - 2r\cos(\phi) = 0 \\
&\implies r^2(\sin(\phi))^2 - 2r\cos(\phi) = 0 \\
&\implies r(r(\sin(\phi))^2 - 2\cos(\phi)) = 0.
\end{aligned}$$