MA141 Geometria Analítica

Prova 3 - Turmas 16h-18h

25 de junho de 2024

Nome completo: RA: Turma:

Questão	Q1	Q2	Q3	Q4	Total
Valor	2,5	2,5	2	3	10
Nota					

Instruções para realização e entrega de sua prova:

- Desligue o celular.
- Não é permitido o uso de calculadoras, smartwatches, celulares ou qualquer outro material de consulta.
- Essa prova terá inicio às 16:00h e **finalizará às 17:55h**. Você terá duas horas para resolvê-la.
- A prova contém **4 (quatro)** questões, uma por folha. Resolva cada questão **em sua respectiva folha**.
- Não retire o grampo da prova.
- **Respostas sem justificativas não serão consideradas.**

As questões da prova estão nas próximas páginas; **aguarde a indicação da professora/do professor** para virar a folha.

Boa prova!

Questão 1 [2,5 pt] Determine as mudanças de coordenadas consecutivas necessárias para encontrar a forma canônica da cônica; escreva a equação canônica da cônica obtida.

$$7x^2 + 6xy + 7y^2 - 10\sqrt{2}x - 10\sqrt{2}y - 10 = 0$$

Questão 2 Considere a cônica no plano dada pela seguinte equação

$$x^2 - 2x - 4y - 3 = 0.$$

1. [1,5pt] Determine o tipo da cônica e encontre seus elementos característicos (foco(s), diretriz(es), centro/vértice, excentricidade).

2. [1pt] Escreva a equação da cônica em coordeandas polares.

Questão 3 [2 pt] Mostre que

$$2x^2 + 8z^2 - 8xz - y + 6 = 0,$$

é uma superficie cilíndrica e determine uma equação da curva diretriz e um vetor paralelo às geratrizes.

Questão 4 Determine se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas. Justifique adequadamente.

1. [1 pt] A cônica em $\mathbb{R}^2$ dada por $3x^2 - 4y^2 - 12x + 4y + 13 = 0$ é uma parábola.

2. [1 pt] No espaço, a superfície de coordenadas cartesianas $2y + 4z = 1$ é descrita em coordenadas esféricas (r, θ, φ) pela equação $r(2\sin\varphi\sin\theta + 4\cos\varphi) = 1$.

3. [1 pt] A interseção da superfície $\mathcal{S} : \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{6} - \dfrac{z^2}{8} = 0$ com o plano $\pi : x = 0$ é um par de retas.

Gabarito P3 - Prova 3 - Turmas 16h-18h

Gustavo Sobreira Barroso

Questão 1.

$$7x^2 + 6xy + 7y^2 - 10\sqrt{2}x - 10\sqrt{2}y - 10 = 0$$

Mudamos a coordenadas do sistema $X = (x, y)$ para $X' = (x', y') = \begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{cases}$ para eliminar o termo misto xy. A equação da cônica fica da forma:

$$\begin{aligned} x'^2(7\sin^2\theta + 6\cos\theta\sin\theta + 7\cos^2\theta) + y'^2(7\sin^2\theta - 6\cos\theta\sin\theta + 7\cos^2\theta) + \\ + x'y'(-14\cos\theta\sin\theta + 6\cos 2\theta + 14\cos\theta\sin\theta) + \\ + x'(-10\sqrt{2}\cos\theta - 10\sqrt{2}\sin\theta) + y'(-10\sqrt{2}\cos\theta + 10\sqrt{2}\sin\theta) - 10 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x'^2(7\sin^2\theta + 6\cos\theta\sin\theta + 7\cos^2\theta) + y'^2(7\sin^2\theta - 6\cos\theta\sin\theta + 7\cos^2\theta) + \\ + x'y'(6\cos 2\theta) + x'(-10\sqrt{2}\cos\theta - 10\sqrt{2}\sin\theta) + y'(-10\sqrt{2}\cos\theta + 10\sqrt{2}\sin\theta) - 10 = 0 \end{aligned}$$

Com $A' = 7\sin^2\theta + 6\cos\theta\sin\theta + 7\cos^2\theta$, $B' = 6\cos 2\theta$ e $C' = 7\sin^2\theta - 6\cos\theta\sin\theta + 7\cos^2\theta$, consideramos o sistema:

$$\begin{cases} A' + C' = 14 \\ A' - C' = 12\cos\theta\sin\theta = 6\sin 2\theta \\ B' = 6\cos 2\theta = 0 \end{cases}$$

Foquemos agora na terceira linha do nosso sistema:

$$6\cos 2\theta = 0 \iff \theta = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$$

Tomando $\theta = \frac{\pi}{4}$, temos:

$$\begin{cases} A' + C' = 14 \\ A' - C' = 6\sin 2\theta \\ 6\cos 2\theta = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} A' + C' = 14 & (1) \\ A' - C' = 6 & (2) \\ 6\cos 2\theta = 0 \end{cases}$$

Efetuando (1) + (2), descobrimos que $A' = 10$ e, então, $C' = 4$. Reescrevendo a equação da cônica, obtemos:

$$10x'^2 + 4y'^2 + x'(-10\sqrt{2}\cos\theta - 10\sqrt{2}\sin\theta) + y'(-10\sqrt{2}\cos\theta + 10\sqrt{2}\sin\theta) - 10 = 0$$

Sendo $\theta = \frac{\pi}{4}$, obtemos:

$$10x'^2 + 4y'^2 - 20x' - 10 = 0 \implies 10x'^2 - 20x' + 4y'^2 = 10$$

Completando quadrados, temos:

$$10x'^2 - 20x' + 10 + 4y'^2 = 10 + 10 \implies 10(x' - 1)^2 + 4y'^2 = 20$$

Realizando a translação $x'' = x' - 1$ e $y'' = y'$, obtemos:

$$\frac{10(x'')^2}{20} + \frac{4(y'')^2}{20} = 1$$

$$\frac{(x'')^2}{2} + \frac{(y'')^2}{5} = 1$$

A equação obtida representa uma elipse.

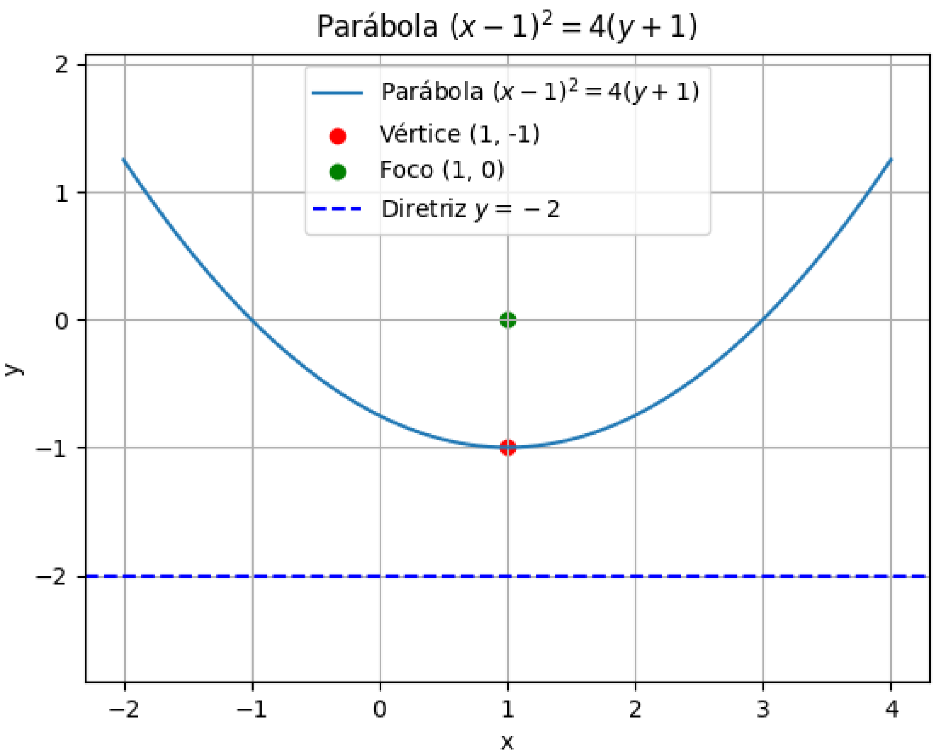
Questão 2.

1. Completando quadrados na equação dada, temos:

$$\begin{aligned} x^2 - 2x - 4y - 3 = 0 &\iff x^2 - 2x = 4y + 3 \\ &\iff x^2 - 2x + 1 = 4y + 3 + 1 \\ &\iff x^2 - 2x + 1 = 4y + 4 \\ &\iff (x-1)^2 = 4(y+1) \end{aligned}$$

Da equação simplificada, infere-se que a cônica referida é uma parábola. Além disso, lembrando que a equação geral de parábolas com diretriz paralela ao eixo x é $(x - x_0)^2 = \pm 4p(y - y_0)$, e observando que na equação simplificada temos $y_0 = -1$ e $p = 1$ e sinal positivo, seus elementos característicos são:

Vértice	$(x_0, y_0) = (1, -1)$
Foco	$(x_0, y_0 + p) = (1, 0)$
Diretriz	$s : y = y_0 - p = -2$



2. Sendo $x = r\cos\theta$,$y = r\sin\theta$, a equação em coordenadas polares desta parábola é:

$$\begin{aligned} x^2 - 2x - 4y - 3 = 0 &\iff (r\cos\theta)^2 - 2r\cos\theta - 4r\sin\theta - 3 = 0 \\ &\iff (r\cos\theta)^2 - (2\cos\theta + 4\sin\theta)r - 3 = 0 \end{aligned}$$

Reescrevendo, temos:

$$(r\cos\theta)^2 - (2\cos\theta + 4\sin\theta)r = 3 \implies r(r\cos^2\theta - 2\cos\theta - 4\sin\theta) = 3$$

Isolando, temos:

$$r = \frac{3}{r\cos^2\theta - 2\cos\theta - 4\sin\theta}$$

Questão 3. Obersevamos que

$$\begin{aligned} 2x^2+8z^2-8xy-y+6=0 &\iff 2(x^2-4xz+4z^2)=y-6 \\ &\iff 2(x-2z)^2=y-6 \\ &\iff (x-2z)^2=\frac{1}{2}(y-6) \end{aligned}$$

Percebemos então, que a interseção da superfície dada com os planos $z=k$ são sempre parábolas, com vértice no ponto $(2k,6,k)$. Assim, os vértices destas parábolas estão sobre a reta $r:(0,6,0)+t(2,0,1)$. Isto é, uma curva geratriz é a parábola $x^2=\frac{1}{2}(y-6)$ no plano xy e um vetor paralelo a reta geratriz é $V=(2,0,1)$.

Questão 4.

1. **Falso.** Completando quadrados

$$\begin{aligned} 3x^2 - 4y^2 - 12x + 4y + 13 = 0 &\iff 3(x-2)^2 - 4(y-\frac{1}{4})^2 = -2 \\ &\iff \frac{(y-\frac{1}{4})^2}{\frac{1}{2}} - \frac{(x-2)^2}{\frac{2}{3}} = 1. \end{aligned}$$

portanto a equação representa uma hipérbole.

2. **Verdadeiro.** Lembrando que as coordenadas esféricas são

$$\begin{cases} x = r\cos\theta\sin\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$$

impondo isto na equação $1 = 2y + 4z$, obtemos:

$$1 = 2r\sin\theta\sin\varphi + 4r\cos\varphi = r(2\sin\theta\sin\varphi + 4\cos\varphi).$$

3. **Verdadeiro.** Quando $x = 0$ a equação dada se torna:

$$\frac{y^2}{6} - \frac{z^2}{8} = 0$$

por diferença de quadrados isto é igual a

$$(\frac{y}{\sqrt{6}} - \frac{z}{\sqrt{8}})(\frac{y}{\sqrt{6}} + \frac{z}{\sqrt{8}}) = 0$$

Logo,

$$y = \frac{\sqrt{6}z}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{3}z}{2} \quad \text{ou} \quad y = -\frac{\sqrt{6}z}{\sqrt{8}} = -\frac{\sqrt{3}z}{2}.$$

que representam duas retas.