MA141 Geometria Analítica

Exame - Turmas 8h-10h

11 de julho de 2024

Nome completo: RA: Turma:

Questão	Q1	Q2	Q3	Q4	Total
Valor	2	2,5	2,5	3	10
Nota					

Instruções para realização e entrega de sua prova:

- Desligue o celular.
- Não é permitido o uso de calculadoras, smartwatches, celulares ou qualquer outro material de consulta.
- Essa prova terá inicio às 08:00h e **finalizará às 09:55h**. Você terá duas horas para resolvê-la.
- A prova contém **4 (quatro)** questões, uma por folha. Resolva cada questão **em sua respectiva folha**.
- Não retire o grampo da prova.
- **Respostas sem justificativas não serão consideradas.**

As questões da prova estão na próxima página; **aguarde a indicação da professora/do professor** para virar a folha.

Boa prova!

Questão 1 [2 pt] Considere o sistema linear $AX = B$ onde

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \alpha \\ \alpha & \alpha & 10 \\ 0 & \alpha & 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ \alpha \end{pmatrix}.$$

Determine todos os valores de α (se existir) para que o sistema admita solução única, infinitas soluções ou nenhuma solução. Nos casos que o sistema admita soluções, descreva o conjunto de soluções do mesmo.

Solução

Temos que a matriz aumentada do sistema é

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 0 & \alpha & 5 \\ \alpha & \alpha & 10 & 10 \\ 0 & \alpha & 5 & \alpha \end{array}\right)$$

Agora, devemos escalonar o sistema.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 0 & \alpha & 5 \\ \alpha & \alpha & 10 & 10 \\ 0 & \alpha & 5 & \alpha \end{array}\right) \; L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 0 & \alpha & 5 \\ 0 & \alpha & 10-\alpha & 5 \\ 0 & \alpha & 5 & \alpha \end{array}\right) \; L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 0 & \alpha & 5 \\ 0 & \alpha & 10-\alpha & 5 \\ 0 & 0 & \alpha-5 & \alpha-5 \end{array}\right)$$

Para que o sistema tenha solução única, é necessário e suficiente que os pivos sejam não-nulos, ou seja, $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq 5$. Nesse caso, pela ultima linha do sistema temos que

$$(\alpha - 5)z = \alpha - 5$$
$$z = \frac{\alpha - 5}{\alpha - 5} = 1$$

Pela segunda linha do sistema temos que

$$y\alpha + (10 - \alpha)z = 5$$
$$y\alpha + 10 - \alpha = 5$$
$$y = \frac{-5 + \alpha}{\alpha}$$

E por fim pela terceira linha do sistema temos que

$$\alpha x + \alpha z = 5$$
$$\alpha x + \alpha = 5$$
$$\alpha x = 5 - \alpha$$
$$x = \frac{5 - \alpha}{\alpha}$$

Ou seja, a solução é $S = \left\{ (x, y, z) = \left(\frac{s - \alpha}{\alpha}, \frac{-s\alpha}{\alpha}, 1 \right) \right\}$

Agora se $\alpha = 0$, pela primeira linha do sistema, $0x + 0z = 5$, o que é impossível. Logo se $\alpha = 0$ o sistema é impossível.

E por fim, se $\alpha = 5$, temos que

$$5x + 5z = 5$$
$$5y + 5z = 5$$
$$0z = 0.$$

Ou seja $x = 1 - z$ e $y = 1 - z$. Tomando $z = t$, a solução do sistema é dada por $(x, y, z) = (1 - t, 1 - t, t)$, isto é, o sistema é possível e indeterminado.

Questão 2 Considere as seguintes retas no espaço:

$$r\colon x+1=y-1=z, \qquad s\colon \begin{cases} x &= 5+2t \\ y &= 3+t \\ z &= 2-t \end{cases}, \quad t\in\mathbb{R}.$$

a) [1,25 pt] Mostre que r e s são reversas.
b) [1,25 pt] Determine a equação geral/cartesiana do plano π que é paralelo a r e a s, e passa pelo ponto $(0,0,1)$.

Solução

a) Da equação da reta r parametrizando a reta com $t = x+1 = y-1 = z$ temos que $r : (x,y,z) = (t-1, t+1, t) = (-1,1,0) + t(1,1,1)$.

Da equação da reta s, temos que $s : (x,y,z) = (5+2t, 3+t, 2-t) = (5,3,2) + t(2,1,-1)$

Temos que $\vec{v_r} = (1,1,1)$ e $\vec{v_s} = (2,1,-1)$ são os vetores diretores das retas r e s respectivamente. Primeiramente, os vetores não são paralelos, pois se $\vec{v_r} = k\cdot\vec{v_s}$, então $(1,1,1) = k\cdot(2,1,-1) = (2k,k,-k)$, ou seja $k=1$ e $-k=1$, o que é impossível.

Logo as retas não são paralelas nem coincidentes, logo só podem ser reversas ou concorrentes. Vamos verificar se as retas se intersectam.
Substituindo a equação da reta s na reta r, temos que

$$(5+2t)+1 = (3+t)-1$$
$$(3+t)-1 = 2-t$$
$$(5+2t)+1 = 2-t.$$

Da primeira equação

$$5+2t+1 = 3+t-1$$
$$6+2t = 2+t$$
$$t = -4$$

E da terceira equação

$$\begin{aligned}(5+2t)+1 &= 2-t\\ 5+2t+1 &= 2-t\\ 6+2t &= 2-t\\ 3t &= -4\\ t &= -\frac{4}{3}\end{aligned}$$

o que claramente é uma contradição com o fato de que $t = -4$. Logo as retas não se intersectam e portanto são reversas, já que não são paralelas.

b) Como π é paralelo a r e a s, seu vetor normal $\vec{n}$ é ortogonal a $\vec{v_r}$ e a $\vec{v_s}$. Para calcular $\vec{n}$, basta calcular o produto vetorial $\vec{v_r} \times \vec{v_s}$.

$$\vec{n} = \vec{v_r} \times \vec{v_s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-2, 3, -1)$$

Como $\vec{n} = (-2, 3, -1)$, sabemos que $\pi : -2x + 3y - z + d = 0$, para algum d real. Como o plano passa pelo ponto $(0, 0, 1)$, $-2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 1 + d = 0$, ou seja, $d = 1$ e $\pi : -2x + 3y - z + 1 = 0$

Questão 3 Seja ℓ o lugar geométrico dos pontos $P(x, y)$ do plano cujas cooredenadas x e y satisfazem

$$x^2 + 4y^2 - 2x + 8y + 4 = 0.$$

a) [1,25 pt] Identifique a cônica ℓ e determine sua equação na forma canônica.
b) [1,25 pt] Determine a excentricidade de ℓ, as coordenadas do centro, dos focos e dos vértices, conforme corresponda.

Solução

a) Percebemos que nessa equação não temos o termo misto, então basta completar quadrado para escrever a cônica em sua forma canônica.
   Temos que

$$\begin{aligned}
x^2 + 4y^2 - 2x + 8y + 4 &= 0 \\
x^2 - 2x + 4y^2 + 8y + 4 &= 0 \\
x^2 - 2x + 4(y^2 + 2y) + 4 &= 0 \\
x^2 - 2x + 1 - 1 + 4(y^2 + 2y + 1 - 1) + 4 &= 0 \\
(x-1)^2 - 1 + 4((y+1)^2 - 1) + 4 &= 0 \\
(x-1)^2 - 1 + 4(y+1)^2 - 4 + 4 &= 0 \\
(x-1)^2 + 4(y+1)^2 - 1 &= 0 \\
\frac{(x-1)^2}{1^2} + \frac{(y+1)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} &= 1
\end{aligned}$$

   Então temos que a cônica é uma Elipse.

b) Perceba que nossa elipse está centrada no ponto $C = (1, -1)$, e que o maior eixo é paralelo ao eixo x, ou seja, $a = 1$ e $b = \dfrac{1}{2}$. Sabemos que $a^2 = b^2 + c^2$, onde c é a distância do foco ao centro.

$$
\begin{aligned}
a^2 &= b^2 + c^2 \\
1^2 &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + c^2 \\
1 &= \frac{1}{4} + c^2 \\
1 - \frac{1}{4} &= c^2 \\
\frac{3}{4} &= c^2 \\
c &= \frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}
$$

Agora, as coordenadas dos vértices são

$$
\begin{aligned}
V_1 &= C + (a, 0) \\
&= (1, -1) + (1, 0) = (2, -1); \\
V_2 &= C + (-a, 0) \\
&= (1, -1) + (-1, 0) = (0, -1);
\end{aligned}
$$

E as coordenadas dos focos são

$$
\begin{aligned}
&F_1 = C + (c, 0) \\
&F_1 = (1, -1) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right) = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}, -1\right) \\
&F_2 = C + (-c, 0) \\
&F_1 = (1, -1) + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right) = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}, -1\right)
\end{aligned}
$$

E por fim, a excentricidade $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{c}{1} = c = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Questão 4 Determine se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas. Justifique adequadamente.

a) [0,75 pt] Se A, $B \in M_n$ são duas matrizes então $\det(A + 2B) = \det(A) + 2^n \det(B)$.

b) [0,75 pt] Se U é um vetor em $\mathbb{R}^3$ tal que $||U|| = 1$, então para todo vetor não nulo $V \in \mathbb{R}^3$ tem se que $U \cdot (U \times V) \neq 0$.

c) [0,75 pt] A interseção da superfície $\mathcal{S} : \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{6} - \dfrac{z^2}{8} = 0$ com o plano $\pi : x = 0$ é um par de retas.

d) [0,75 pt] A equação $2x^2 - 2xy + \frac{1}{2}y^2 + 13 = 0$ descreve uma hipérbole.

Solução

a) Seja $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = -2I_2$ e $B = I_2$. Temos que $\det(A) = 4$, $\det(B) = 1$, $\det(A + 2B) = \det(0) = 0$ e que $\det(A)+2^n \det(B) = 4+2^2 \cdot 1 = 4+4 = 8$, logo $\det(A+2B) \neq \det(A)+2^n \det(B)$ nesse contra-exemplo, logo a afirmação é falsa.

b) Tome $U = V = (1, 0, 0)$. Temos que $||U|| = 1$ e que V é não nulo. Mas

$$U \cdot (U \times V) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Contrariando a afirmação, logo ela é falsa.

c) Tomando $x = 0$, temos que

$$\begin{aligned} \frac{0^2}{4} + \frac{y^2}{6} - \frac{z^2}{8} &= 0 \\ \frac{y^2}{6} - \frac{z^2}{8} &= 0 \\ \left(\frac{y}{\sqrt{6}}\right)^2 - \left(\frac{z}{\sqrt{8}}\right)^2 &= 0 \\ \left(\frac{y}{\sqrt{6}} - \frac{z}{\sqrt{8}}\right) \cdot \left(\frac{y}{\sqrt{6}} + \frac{z}{\sqrt{8}}\right) &= 0 \end{aligned}$$

Logo $\dfrac{y}{\sqrt{6}} - \dfrac{z}{\sqrt{8}} = 0$ e $x = 0$ ou $\dfrac{y}{\sqrt{6}} + \dfrac{z}{\sqrt{8}} = 0$ e $x = 0$, um par de retas. Logo a afirmação é verdadeira.

d) Sabemos que $\Delta = b^2 - 4ac$, o discriminante da cônica, serve para determinar a cônica dado os coeficientes da sua equação geral. Nesse caso, temos que $a = 2$, $b = -2$ e $c = \dfrac{1}{2}$. Logo $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot \dfrac{1}{2} =$

$4 - 4 = 0$, e portanto a equação desse item descreve uma parábola ou uma cônica degenerada, e não uma hipérbole, isto é, a afirmação é falsa.