MA141 Geometria Analítica

Exame - Turmas 21h-23h

11 de julho de 2024

Nome completo: RA: Turma:

Questão	Q1	Q2	Q3	Q4	Total
Valor	2	2,5	2,5	3	10
Nota					

Instruções para realização e entrega de sua prova:

- Desligue o celular.
- Não é permitido o uso de calculadoras, smartwatches, celulares ou qualquer outro material de consulta.
- Essa prova terá inicio às 19:00h e **finalizará às 20:55h**. Você terá duas horas para resolvê-la.
- A prova contém **4 (quatro)** questões, uma por folha. Resolva cada questão **em sua respectiva folha**.
- Não retire o grampo da prova.
- **Respostas sem justificativas não serão consideradas.**

As questões da prova estão na próxima página; **aguarde a indicação da professora/do professor** para virar a folha.

Boa prova!

Questão 1 [2 pt] Considere o sistema linear $AX = B$ onde

$$A = \begin{pmatrix} k & 0 & k \\ k & k & 6 \\ 0 & k & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ k \end{pmatrix}$$

Determine todos os valores de k (se existir) para que o sistema admita solução única, infinitas soluções ou nenhuma solução. Nos casos que o sistema admita soluções, descreva o conjunto de soluções do mesmo.

Questão 2 Considere as seguintes retas no espaço:

$$r\colon x = \frac{y-3}{2} = z - 1, \qquad s\colon \begin{cases} x &= 7 + 2\lambda \\ y &= 4 + \lambda \\ z &= 1 - \lambda \end{cases}.$$

a) [1,25 pt] Mostre que r e s são reversas.

b) [1,25 pt] Determine a equação geral/cartesiana do plano π que é paralelo a r e a s, e passa pelo ponto $(0,0,1)$.

Questão 3 Seja ℓ o lugar geométrico dos pontos $P(x, y)$ do plano cujas cooredenadas x e y satisfazem

$$5x^2 + 2y^2 - 10x - 10 = 0.$$

a) [1,25 pt] Identifique a cônica ℓ e determine sua equação na forma canônica.

b) [1,25 pt] Determine a excentricidade de ℓ, as coordenadas do centro, dos focos e dos vértices, conforme corresponda.

Questão 4 Determine se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas. Justifique adequadamente.

a) [0,75 pt] Se A e B são matrizes $n \times n$ satisfazendo $AB = 0$, então $A = 0$ ou $B = 0$.

b) [0,75 pt] A projeção ortogonal do vetor $U = (2, 1)$ sobre o vetor $V = (1, 1)$ é $W = (2, 0)$.

c) [0,75 pt] A superfície cilíndrica gerada pela curva $\gamma : \begin{cases} 8z^2 - yz + 6 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ e vetor $V = (1, 0, \frac{1}{2})$ é a superfície de equação $8z^2 + 2x^2 - 8xz - y + 6 = 0$.

d) [0,75 pt] A equação $5x^2 + 14xy - 10y^2 + 20 = 0$ descreve uma elipse.

EXAME DE MA141 - NOTURNO:

1. Vamos calcular o determinante de A:

$$\begin{vmatrix} k & 0 & k \\ k & k & 6 \\ 0 & k & 3 \end{vmatrix} = 3k^2 + k^3 - 6k^2 = k^3 - 3k^2 = k^2(k-3) = \det(A)$$

$AX = B$ tem solução única $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0 \Leftrightarrow k \neq 3$ e $k \neq 0$

Se $k = 3 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 3z = 3 & (1) \\ 3x + 3y + 6z = 6 & (2) \\ 3y + 6z = 3 & (3) \end{cases}$

Vou escalonar este sistema:

$$\left.\begin{matrix} 3 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 6 \\ 3 \\ 3 \end{matrix} \; (-) \Rightarrow \left.\begin{matrix} 3 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 6 \\ 3 \\ -3 \end{matrix}$$

$\Rightarrow$ As duas últimas equações são equivalentes

$3x + 3 - 3t + 6t = 6 \Rightarrow 3x + 3t = 3 \Rightarrow x = 1-t$

$\therefore AX = B \Rightarrow \begin{cases} 3x + 3y + 6z = 6 \\ 3y + 3z = 3 \end{cases}$ tome $z = t \Rightarrow y = 1 - t$

$x = 1 - t = y$

$\therefore k = 3 \Rightarrow$ o sistema tem infinitas soluções, que são:

$$S = \{(1-t, 1-t, t),\ \forall t \in \mathbb{R}\}$$

Se $k = 0 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 0 = 3 \Rightarrow$ ABSURDO!

$\therefore$ Se $k = 0$, o sistema não admite solução

Se $k \neq 0$ e $k \neq 3$, o sistema pode ser escalonado:

$$\left.\begin{matrix} k & k & 6 \\ 0 & k & 3 \\ k & 0 & \cancel{k} \end{matrix}\right| \begin{matrix} 6 \\ k \\ 3 \end{matrix} \; (-) \Rightarrow \left.\begin{matrix} k & k & 6 \\ 0 & k & 3 \\ 0 & -k & k-6 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 6 \\ k \\ -3 \end{matrix} \; (+) \Rightarrow \left.\begin{matrix} k & k & 6 \\ 0 & k & 3 \\ 0 & 0 & k-3 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 6 \\ k \\ k-3 \end{matrix} \Rightarrow z = 1 \text{ (pois } k \neq 3)$$

$z = 1 \Rightarrow ky + 3 = k \Rightarrow y = \dfrac{k-3}{k}$ (pois $k \neq 0$) $\Rightarrow kx + (k-3) + 6 = 6 \Rightarrow x = \dfrac{3-k}{k}$ $(k \neq 0)$

$\therefore$ A solução é $S_k = \left\{\left(\dfrac{3-k}{k}, \dfrac{k-3}{k}, 1\right)\right\}$, para cada $k \neq 3$ e $k \neq 0$.

2. (a) $r: \begin{cases} x = \gamma \\ y = 2\gamma + 3 \\ z = \gamma + 1 \end{cases}$ e $s: \begin{cases} x = 2\lambda + 7 \\ y = \lambda + 4 \\ z = -\lambda + 1 \end{cases}$

Os vetores diretores de r e s são: $V_r = (1, 2, 1)$ e $V_s = (2, 1, -1)$

Tomemos $\vec{n} = \vec{V_r} \times \vec{V_s} =$ "$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$" $= -3\vec{i} + 3\vec{j} - 3\vec{k} = (-3, 3, -3)$

$\vec{n} \neq 0 \Rightarrow$ r e s não são paralelas

Tomemos P_r e P_s pontos arbitrários de r e s, respectivamente:

$P_r = (0, 3, 1)$, $P_s = (7, 4, 1) \Rightarrow \overrightarrow{P_rP_s} = P_s - P_r = (7, 1, 0)$

Se $\overrightarrow{P_rP_s}$ for coplanar com V_r e V_s, as retas são concorrentes. Caso c[ontrário]

são reversas. Calculando $\overrightarrow{P_rP_s} \cdot \vec{n} = -21 + 3 = -18 \neq 0 \Rightarrow$ r e s são r[eversas]

b) π é paralelo a r e a s $\Rightarrow$ seu vetor normal $\vec{n}$ é dado por

$\vec{n} = \vec{V_r} \times \vec{V_s} = (-3, 3, -3) \Rightarrow \pi: -3x + 3y - 3z + d = 0$

Para achar d, usarei o ponto $(0, 0, 1)$, que pertence a π:

$-3 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 3 \cdot 1 + d = 0 \Rightarrow d = 3 \Rightarrow \pi: -3x + 3y - 3z + 3 = 0$

$\boxed{\pi: -x + y - z + 1 = 0}$

3. $5x^2+2y^2-10x-10=0 \Leftrightarrow 15=5(x-1)^2+2y^2 \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{3}+\frac{2y^2}{15}=1 \Leftrightarrow (*)$

a)

$(*) \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{(\sqrt{3})^2}+\frac{y^2}{\left(\sqrt{\frac{15}{2}}\right)^2}=1$ ⇝ esta é a forma canônica de ℓ, que é uma elipse

Note que a transformação $\begin{cases} y'=y \\ x'=x-1 \end{cases} \Rightarrow \ell: \frac{x'^2}{(\sqrt{3})^2}+\frac{y'^2}{\left(\sqrt{\frac{15}{2}}\right)^2}=1$

Neste sistema, a elipse está com centro na origem de (x', y')

b) $b = \sqrt{3}$, $a = \sqrt{\frac{15}{2}}$ e $c^2 = a^2 - b^2 = \frac{15}{2} - \frac{6}{2} = \frac{9}{2} \Rightarrow c = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

A excentricidade de ℓ é $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{15}} = \frac{3}{\sqrt{15}} = \frac{3\sqrt{15}}{15} = \boxed{\frac{\sqrt{15}}{5}}$

As coordenadas do centro são $C = (1, 0)$

Os focos estão em $F_1 = \left(1, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$; $F_2 = \left(1, \frac{-3\sqrt{2}}{2}\right)$

Os vértices estão em: $V_1 = \left(1, \sqrt{\frac{15}{2}}\right)$; $V_2 = (1 - \sqrt{3}, 0)$;

$V_3 = \left(1, -\sqrt{\frac{15}{2}}\right)$; $V_4 = (1 + \sqrt{3}, 0)$

4. (a) FALSA! Tome $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ como contra-exemplo

b) $Proj_v U = \frac{\vec{U} \cdot \vec{V}}{|\vec{V}|^2} \cdot \vec{V} = \frac{2+1}{2} \cdot (1,1) = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) \neq W$

ou seja, é FALSA!

c) $f(y,z) = 8z^2 - yz + 6 = 0$; $V = (1, 0, 1/2)$

$\therefore$ A superfície cilíndrica é dada por

$$f(y - 0\cancel{x}, z - 1/2x) = 8\left(z - \frac{x}{2}\right)^2 - y \cdot \left(z - \frac{x}{2}\right) + 6 = 0 = 8z^2 - 8xz + 2x^2 - yz + \frac{yx}{2} + 6$$

$8z^2 - 8xz + 2x^2 - yz + \frac{yx}{2} + 6 \neq 8z^2 + 2x^2 - 8xz - y + 6 \Rightarrow$ FALSA!

d) $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \Rightarrow A = 5$; $B = 14$ e $C = -10$

Tome $\det \begin{pmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 7 & -10 \end{vmatrix} = -50 + 49 = -1$

$\det \begin{pmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{pmatrix} < 0 \Rightarrow$ hipérbole ou degenerada $\Rightarrow$ NÃO é elipse $\Rightarrow$ afirmação FALSA!