MA141 Geometria Analítica

Exame - Turmas 16h-18h

11 de julho de 2024

Nome completo: RA: Turma:

Questão	Q1	Q2	Q3	Q4	Total
Valor	2	2,5	2,5	3	10
Nota					

Instruções para realização e entrega de sua prova:

- Desligue o celular.
- Não é permitido o uso de calculadoras, smartwatches, celulares ou qualquer outro material de consulta.
- Essa prova terá inicio às 16:00h e **finalizará às 17:55h**. Você terá duas horas para resolvê-la.
- A prova contém **4 (quatro)** questões, uma por folha. Resolva cada questão **em sua respectiva folha**.
- Não retire o grampo da prova.
- **Respostas sem justificativas não serão consideradas.**

As questões da prova estão na próxima página; **aguarde a indicação da professora/do professor** para virar a folha.

Boa prova!

Questão 1 [2 pt] Considere o sistema linear $AX = B$ onde

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ a & a & 4 \\ 0 & a & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ a \end{pmatrix}$$

Determine todos os valores de a (se existir) para que o sistema admita solução única, infinitas soluções ou nenhuma solução. Nos casos que o sistema admita soluções, descreva o conjunto de soluções do mesmo.

Solução

Colocaremos as matrizes A e B na forma de matriz aumentada do sistema $AX = B$, que podemos efetuar algumas operações de linha:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 0 & a & 2 \\ a & a & 4 & 4 \\ 0 & a & 2 & a \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 - L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} a & 0 & a & 2 \\ 0 & a & 4-a & 2 \\ 0 & a & 2 & a \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 - L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} a & 0 & a & 2 \\ 0 & a & 4-a & 2 \\ 0 & 0 & a-2 & a-2 \end{array}\right) (1)$$

Essa matriz (1) será usada para analisar o sistema a partir dos valores de a. Para isso, usaremos da informação de que, se A quadradada tem solução única, então o seu determinante é não nulo. Verificamos essa condição:

$$det \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ a & a & 4 \\ 0 & a & 2 \end{pmatrix} = (2a^2 + 0 + a^3) - (0 + 0 + 4a^2) = a^3 - 2a^2 = a^2(a-2)$$

Perceba que com $a \neq 0$ e $a \neq 2$, o nosso determinante é não-nulo, portanto, o sistema $AX = B$ admite solução única. Caso a assuma um desses valores, é necessário avaliarmos o sistema - neste caso, avaliaremos substituindo esses valores em (1).

- Com $a = 0$:

  Substituindo na matriz escalonada (1), temos a matriz abaixo. Perceba que a primeira linha do sistema sugere que $0x + 0y + 0z = 2$, o que é impossível. Assim, **para $a = 0$, o sistema não admite solução (é impossível)**.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 0 & a & 2 \\ 0 & a & 4-a & 2 \\ 0 & 0 & a-2 & a-2 \end{array}\right) \xrightarrow{a=0} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right)$$

- Com $a = 2$:

  Substituindo na matriz escalonada (1), temos a matriz abaixo.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 0 & a & 2 \\ 0 & a & 4-a & 2 \\ 0 & 0 & a-2 & a-2 \end{array}\right) \xrightarrow{a=2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Perceba que uma linha foi zerada, então temos 2 equações com 3 incógnitas. Dessa forma, podemos continuar a resolução do sistema:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \equiv \begin{cases} 2x + 2y & = & 2 \\ 2y + 2z & = & 2 \\ \quad 0 & & \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 - y \\ z = 1 - y \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Assim, com $a = 2$, **o nosso sitema tem infinitas soluções (possível e indeterminado)**. Sendo $y = k \in \mathbb{R}$, o conjunto solução desse sistema são os pontos da forma $(x, y, z) = (1 - k, k, 1 - k)$.

- Com $a \in \mathbb{R} - \{0, 2\}$:

Se a não pode assumir 0 e 2, podemos continuar a resolver o sistema que chegamos em (1):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 0 & a & 2 \\ 0 & a & 4-a & 2 \\ 0 & 0 & a-2 & a-2 \end{array}\right) \equiv \begin{cases} ax + az = 2 \\ ay + (4-a)z = 2 \\ (a-2)z = a - 2 \end{cases} \xrightarrow[L_3 \div (a-2)]{a \neq 2} \begin{cases} a(x+z) = 2 \\ ay + (4-a)z = 2 \\ z = 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} a(x+1) = 2 \\ ay + (4-a) = 2 \\ z = 1 \end{cases} \xrightarrow[L_1 \div a]{a \neq 0} \begin{cases} x + 1 = \frac{2}{a} \\ ay + (4-a) = 2 \\ z = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{2-a}{a} \\ y = \frac{a-2}{a} \\ z = 1 \end{cases}$$

Portanto, dado o valor $a \in \mathbb{R} - \{0, 2\}$, a solução do sistema é o ponto $(x, y, z) = (\frac{2-a}{a}, \frac{a-2}{a}, 1)$.

Questão 2 Considere as seguintes retas no espaço:

$$r\colon \frac{x+3}{4} = y+3 = z-1, \qquad s\colon \begin{cases} x &= 3t \\ y &= 1+t \\ z &= 3 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

a) [1,25 pt] Mostre que r e s são reversas.

b) [1,25 pt] Determine a equação geral/cartesiana do plano π que é paralelo a r e a s, e passa pelo ponto $(0,0,1)$.

Solução

a) Mostre que r e s são reversas.

Para que duas retas sejam reversas, é preciso mostrar que **as retas não são paralelas nem concorrentes**. Assim, neste item, escreveremos as retas descritas em sua forma paramétrica:

$$r : (x,y,z)_r = (4y+9, y, y+4) = (9,0,4) + y(4,1,1), \text{ com } y \in \mathbb{R}$$

$$s : (x,y,z)_s = (3t, 1+t, 3) = (0,1,3) + t(3,1,0), \text{ com } t \in \mathbb{R}$$

Perceba que a reta r tem vetor diretor $V_r = (4,1,1)$, já a reta s, $V_s = (3,1,0)$. Se r e s são paralelas, esses vetores são paralelos, então existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $V_r = \lambda V_s$. Pelos cálculos a seguir, isso não é possivel de ocorrer:

$$(4,1,1) = \lambda(3,1,0) \iff \begin{cases} 4 = & 3\lambda \\ 1 = & 1\lambda \\ 1 = & 0\lambda \end{cases}$$

Note que a terceira linha do sistema gera uma impossibilidade, então podemos concluir que as retas **não são paralelas**.

Verificamos, agora, se as retas possuem um ponto em comum:

$$(x,y,z)_r = (x,y,z)_s \implies (9,0,4) + y(4,1,1) = (0,1,3) + t(3,1,0)$$

$$\implies y(4,1,1) - t(3,1,0) = (-9,1,-1) \implies (4y-3t, y-t, y) = (-9,1,-1)$$

$$\iff \begin{cases} 4y-3t = -9 \\ y-t = 1 \\ y = -1 \end{cases} \implies \begin{cases} 4y-3t = -9 \\ t = -2 \\ y = -1 \end{cases} \implies \begin{cases} -4+6 \neq -9 \\ t = -2 \\ y = -1 \end{cases}$$

Perceba que esse sistema é impossível devido à primeira linha (ou primeira coordenada do ponto procurado). Assim, concluímos que não há um ponto comum nas retas, isto é, **não são concorrentes**.

Finalmente, as retas r e s não são paralelas nem concorrentes, portanto, **são reversas.**

b) Determine a equação geral/cartesiana do plano π que é paralelo a r e a s, e passa pelo ponto $(0, 0, 1)$.

Se o plano π é paralelo às retas r e s, os seus vetores diretores são paralelos aos vetores diretores V_r e V_s . Também, perceba que o vetor $N = V_r \times V_s$ é paralelo ao vetor normal às retas e, consequentemente, ao plano π . Determinamos, então, o vetor N:

$$N = V_r \times V_s = (4, 1, 1) \times (3, 1, 0) = (-1, 3, 1)$$

Podemos usar das coordenadas desse vetor para determinar o plano π : $ax + by + cz = d \implies -x + 3y + z = d$. Por fim, para encontrar o valor da componente d , consideramos o fato de que o ponto $(0, 0, 1) \in \pi$, isto é, suas coordenadas satisfazem a equação. Assim, temos:

$$-(0) + 3(0) + (1) = d \implies d = 1$$

Finalmente, o plano π que satisfaz as condições pedidas é escrito na forma $-x + 3y + z = 1$.

Questão 3 Seja ℓ o lugar geométrico dos pontos $P(x, y)$ do plano cujas cooredenadas x e y satisfazem

$$x^2 + 2y^2 - 4x + 4y + 5 = 0.$$

a) [1,25 pt] Identifique a cônica ℓ e determine sua equação na forma canônica.

b) [1,25 pt] Determine a excentricidade de ℓ, as coordenadas do centro, dos focos e dos vértices, conforme corresponda.

Solução

a) Identifique a cônica ℓ e determine sua equação na forma canônica.

Para identificar a curva, iremos escrevê-la na sua forma canônica. Assim, a cônica pode ser reescrita na forma:

$$x^2 + 2y^2 - 4x + 4y + 5 = 0 \implies x^2 - 4x + 2(y^2 + 2y) + (4 + 1) = 0$$

$$\implies (x^2 - 4x + 4) + 2[y^2 + 2y + (1 - 1)] + 1 = 0 \implies (x - 2)^2 + 2[(y + 1)^2 - 1] + 1 = 0$$

$$\implies (x - 2)^2 + 2(y + 1)^2 - 2 + 1 = 0 \implies (x - 2)^2 + 2(y + 1)^2 = 1$$

Aqui, vamos realizar uma mudança de variável: $\begin{cases} x' = x - 2 \\ y' = y + 1 \end{cases}$.

$$x'^2 + 2y'^2 = 1 \implies \frac{x'^2}{1^2} + \frac{y'^2}{\frac{1}{2}} = 1 \implies \frac{x'^2}{1^2} + \frac{y'^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1$$

Portanto, a curva ℓ descreve uma elipse de eixo maior medindo 1 e eixo menor medindo $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

b) Determine a excentricidade de ℓ, as coordenadas do centro, dos focos e dos vértices, conforme corresponda.

Primento, listamos as informações sobre a curva ℓ a partir da equação encontrada no item anterior:

- Os termos a e b valem, respectivamente, 1 e $\frac{1}{\sqrt{2}}$;
- Os focos estão sobre o eixo Ox', já que $a > b$;
- O termo c é definido por $a^2 = b^2 + c^2 \implies c = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Excentricidade

A excentricidade é definida como $e = \frac{c}{a}$. Assim, temos que $e = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Centro

O centro no nosso sistema $Ox'y'$ tem coordenadas $(x', y') = (0, 0)$. Para o sistema original, temos que fazer a mudança de coordenadas:

$$(x', y') = (x - 2, y + 1) = (0, 0) \iff \begin{cases} x - 2 = & 0 \\ y + 1 = & 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

As coordenadas do centro da elipse, no sistema Oxy é $(2,-1)$.

Focos

Os focos estão sobre o eixo Ox', com coordenadas $(x',y') = (\pm c, 0) = \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$. Para o sistema original, temos que fazer a mudança de coordenadas:

$$(x',y') = (x-2, y+1) = \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \iff \left\{\begin{array}{rc} x-2= & \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y+1= & 0 \end{array}\right. \implies \left\{\begin{array}{l} x = 2 \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y=-1 \end{array}\right.$$

As coordenadas dos focos da elipse, no sistema Oxy, são $F_1 = \left(2-\frac{1}{\sqrt{2}}, -1\right)$ e $F_2 = \left(2+\frac{1}{\sqrt{2}}, -1\right)$.

Vértices

Os vértices estão sobre o eixo Ox', com coordenadas $(x',y') = (\pm a, 0) = (\pm 1, 0)$. Para o sistema original, temos que fazer a mudança de coordenadas:

$$(x',y') = (x-2, y+1) = (\pm 1, 0) \iff \left\{\begin{array}{rc} x-2= & \pm 1 \\ y+1= & 0 \end{array}\right. \implies \left\{\begin{array}{l} x = 2 \pm 1 \\ y=-1 \end{array}\right.$$

As coordenadas dos vértices da elipse, no sistema Oxy, é $V_1 = (1,-1)$ e $V_2 = (3,-1)$.

Questão 4 Determine se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas. Justifique adequadamente.

a) [0,75 pt] Se A e B são matrizes quadradas tais que $\det(AB) = 0$, então pelo menos uma das duas, A ou B, não é invertível.
b) [0,75 pt] A projeção ortogonal do vetor $U = (2, 1)$ sobre o vetor $V = (1, -2)$ é $W = (0, 0)$.
c) [0,75 pt] Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, a equação $(\lambda+1)x^2 + y^2 - \lambda^2 z^2 = 1$ descreve um hiperboloide de uma folha.
d) [0,75 pt] A equação $3x^2 + 14xy + 3y^2 + 20 = 0$ descreve uma elipse.

Solução

a) **Verdadeiro**

Uma matriz M é invertível se e somente se o seu determinante é não-nulo. Se A e B quadradas, os seus determinantes estão definidos: $\det(A)$ e $\det(B)$, respectivamente. Usando a propriedade de determinantes, podemos afirmar que:

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) = 0 \iff \det(A) = 0 \text{ ou } \det(B) = 0$$

Dessa forma, então A ou B tem determinante nulo, consequentemente, A ou B não é invertível.

b) **Verdadeiro**

Chamamos a projeção de U sobre V de W. Assim,:

$$W = Proj_{\vec{V}}\vec{U} = \frac{\langle \vec{U}, \vec{V} \rangle}{\|\vec{V}\|^2} \cdot \vec{V} = \left(\frac{2 \cdot (1) + 1 \cdot (-2)}{(1)^2 + (-2)^2} \right) \cdot \vec{V} = \frac{0}{5} \cdot \vec{V} = (0, 0)$$

c) **Falso**

Analisamos a equação para $\lambda \in \{-1, 0\}$.

(i) $\lambda = -1$

$$(\lambda + 1)x^2 + y^2 - \lambda^2 z^2 = 1 \implies y^2 - z^2 = 1$$

Que descreve um cilindro de base hiperbólica.

(ii) $\lambda = 0$

$$(\lambda + 1)x^2 + y^2 - \lambda^2 z^2 = 1 \implies x^2 + y^2 = 1$$

Que descreve um cilindro de base circular de raio 1.

d) **Falso**

Analisando a curva a partir da estrutura $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, temos $A = C = 3$, $B = 14$, $D = E = 0$ e $F = 20$. Calculando $AC - \frac{B^2}{4}$, obtemos $3 \cdot 3 - \frac{14^2}{4} = 9 - 49 = -40 < 0$, indicando que a curva ou é uma hipérbole ou uma cônica degenerada.