

tangentes



$$y = f'(x_0) (x - x_0) + y_0$$

A) $f(x) = x^2$

$(x_0, y_0) = (1, 1)$

B) $f(x) = x^3 - x^2$

$(x_0, y_0) = (-1, -2)$

C) $f(x) = x^4 + 3x^2 + 2$

$(x_0, y_0) = (0, 2)$

D) $f(x) = x^4 + 16x - 16$

$(x_0, y_0) = (1, 1)$

A) $f'(x) = 2x$

$y = 2(x - 1) + 1 = 2x - 1$

B) $f'(x) = 3x^2 - 2x$

$y = 5(x + 1) - 2 = 5x + 3$

C) $f'(x) = 4x^3 + 6x$

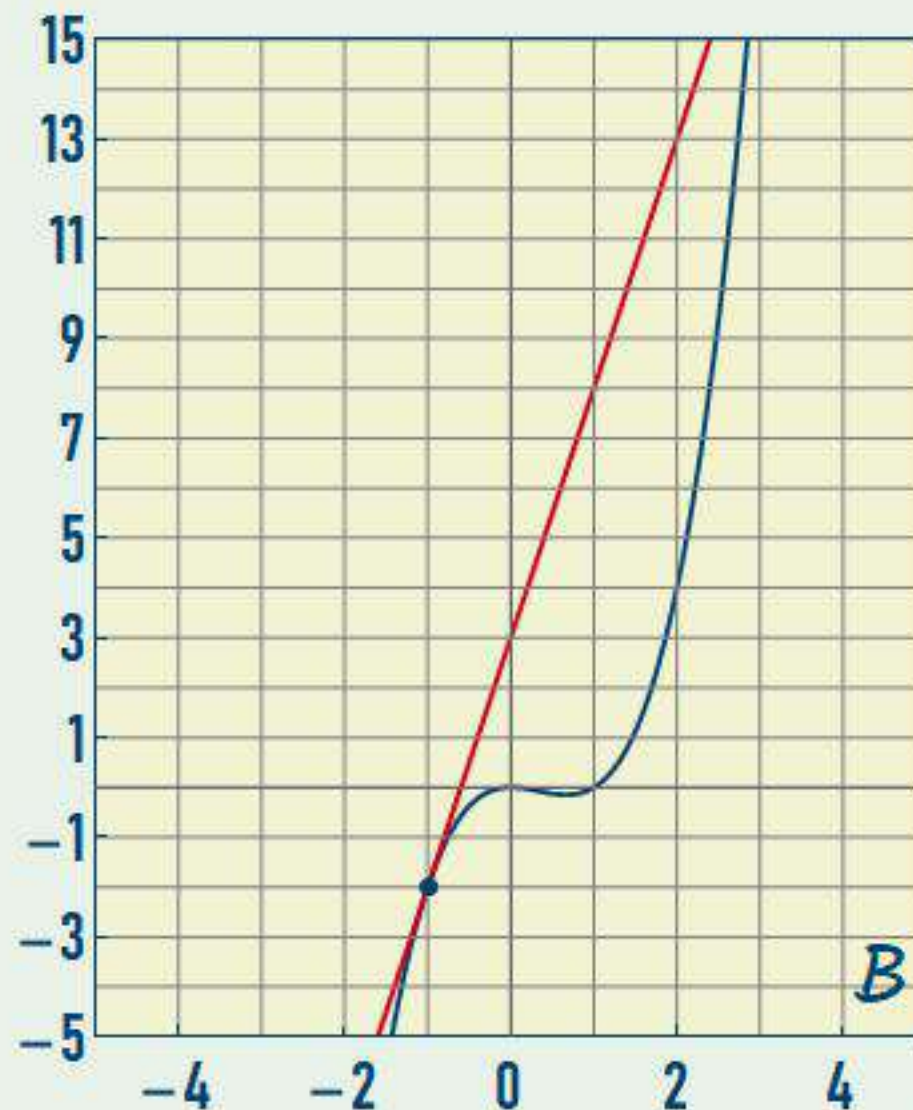
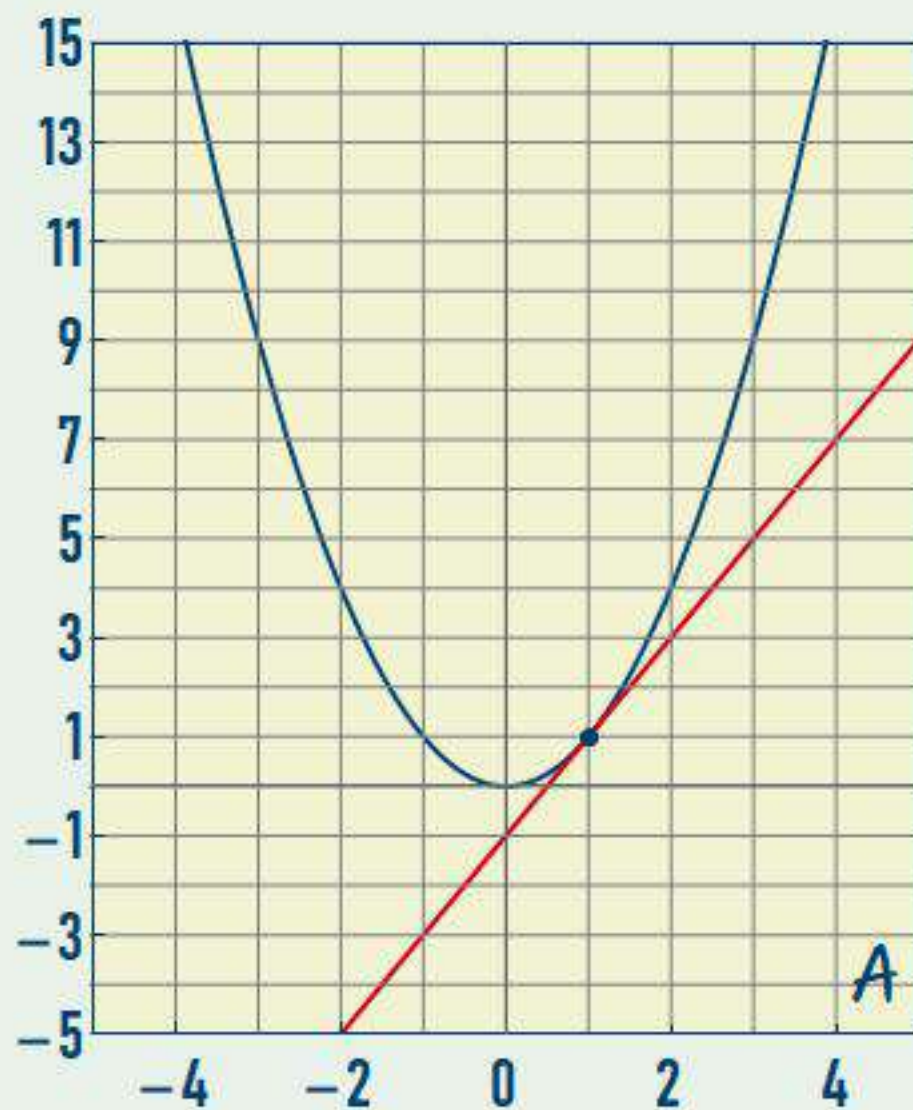
$y = 0(x - 0) + 2 = 2$

D) $f'(x) = 4x^3 + 16$

$y = 20(x - 1) + 1 = 20x - 19$



representação gráfica dos resultados



representação gráfica dos resultados

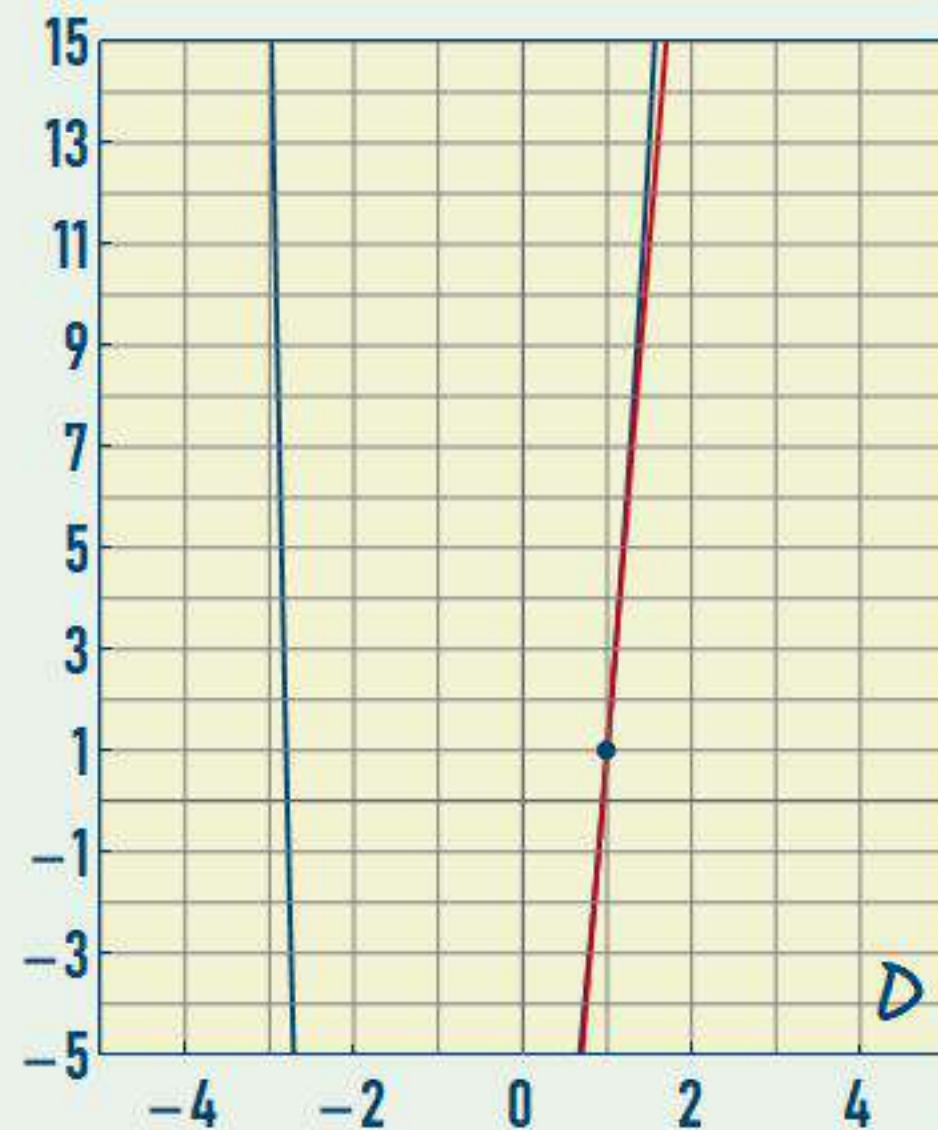
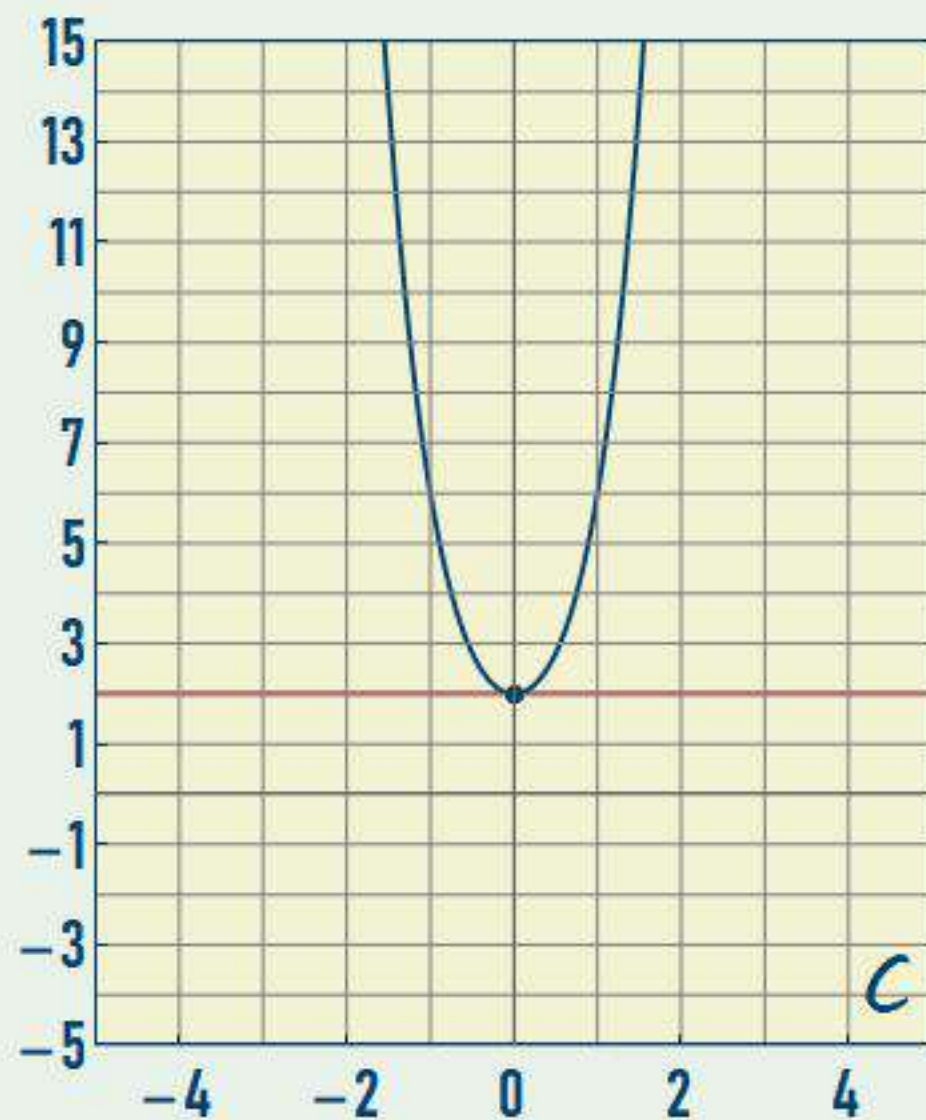




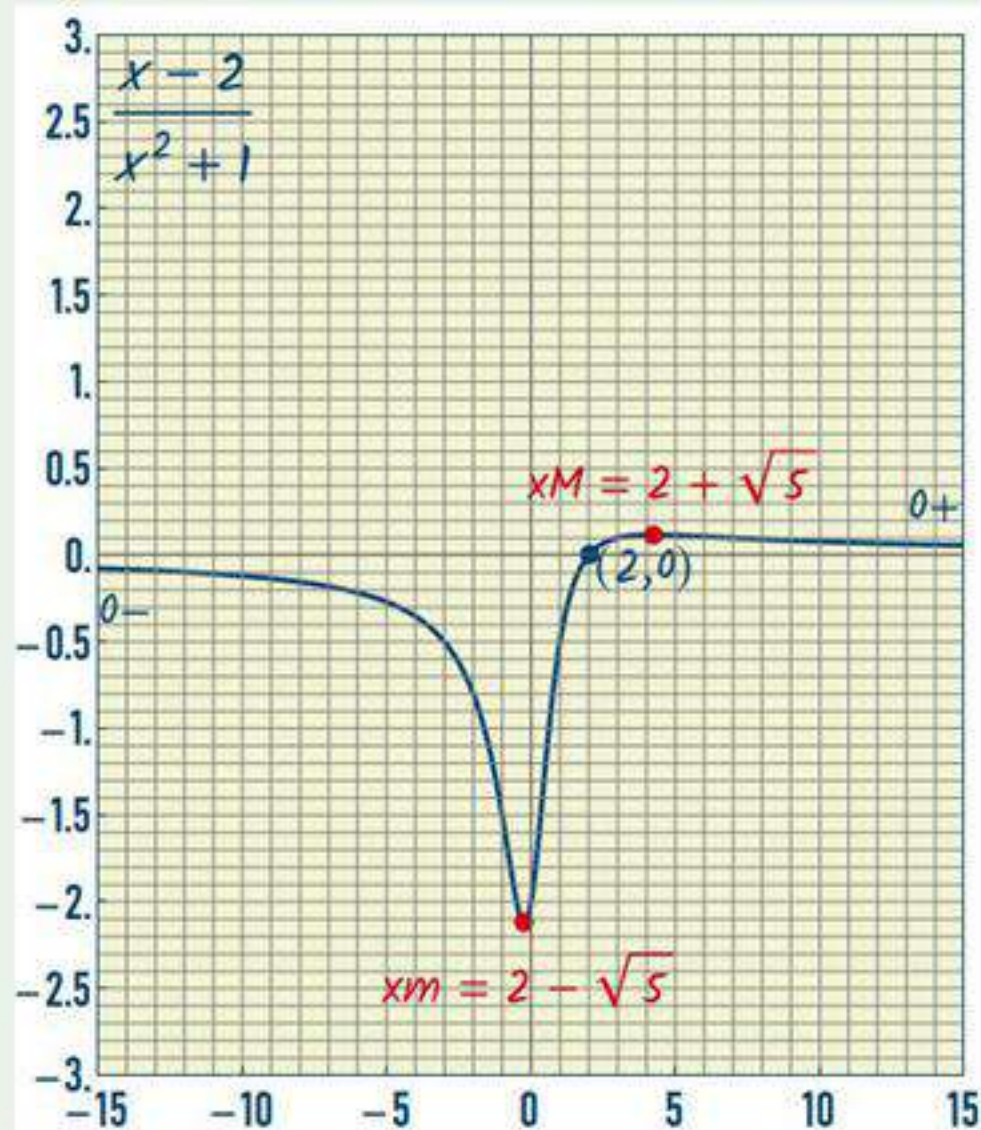
Gráfico de funções do tipo $f(x)/g(x)$

- 1) domínio
- 2) comportamento assintótico horizontal
- 3) comportamento assintótico vertical
- 4) pontos de máximo e mínimo
- 5) pontos de inflexão

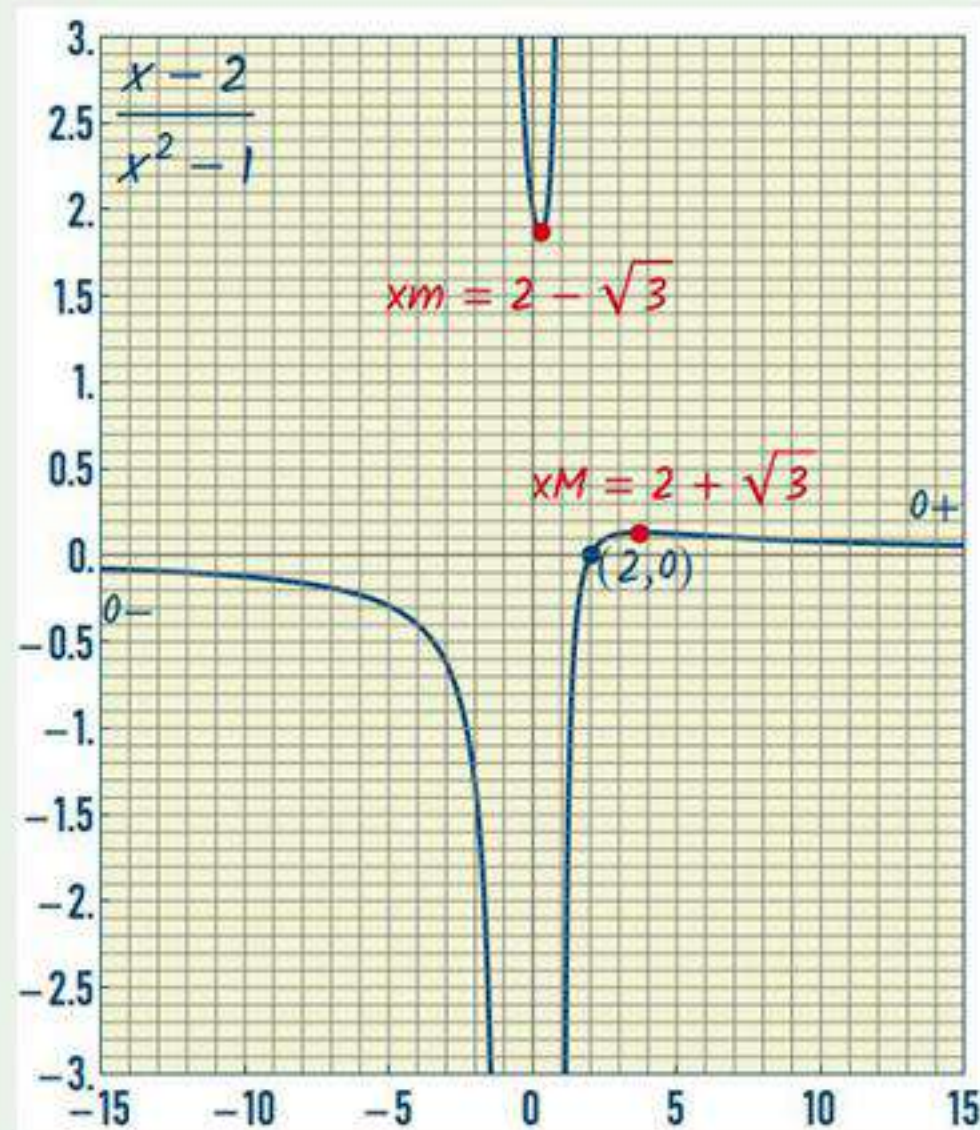


Gráfico das funções: A) $\frac{x-2}{x^2+1}$ e B) $\frac{x-2}{x^2-1}$

A)



B)





1) PONTOS DE ENCONTRO COM O EIXO x ($y=0$)

$$\frac{x-2}{x^2+1} = 0 \Rightarrow x=2$$

$$(2, 0)$$

2) PONTOS DE ENCONTRO COM O EIXO y ($x=0$)

$$\frac{0-2}{0^2+1} = -2$$

$$(0, -2)$$

3) ASSÍNTOTAS HORIZONTAIS

$$x \rightarrow +\infty$$

$$\frac{x-2}{x^2+1} \sim \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x} \rightarrow 0^+$$

$$x \rightarrow -\infty$$

$$\frac{x-2}{x^2+1} \sim \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x} \rightarrow 0^-$$

4) ASSÍNTOTAS VERTICAIS

QUANDO O DENOMINADOR É ZERO

x^2+1 SEMPRE DIFERENTE DE ZERO

NÃO TEMOS ASSÍNTOTAS VERTICAIS

5) MAX / MIN

DERIVADA DE $\frac{f(x)}{g(x)}$ É $\frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

$$f(x) = x-2 \quad f'(x) = 1$$

$$g(x) = x^2+1 \quad g'(x) = 2x$$

$$f'(x)g(x) - f(x)g'(x)$$

$$1 \cdot (x^2+1) - (x-2)2x$$



$$x^2 + 1 - 2x^2 + 4x = 0$$

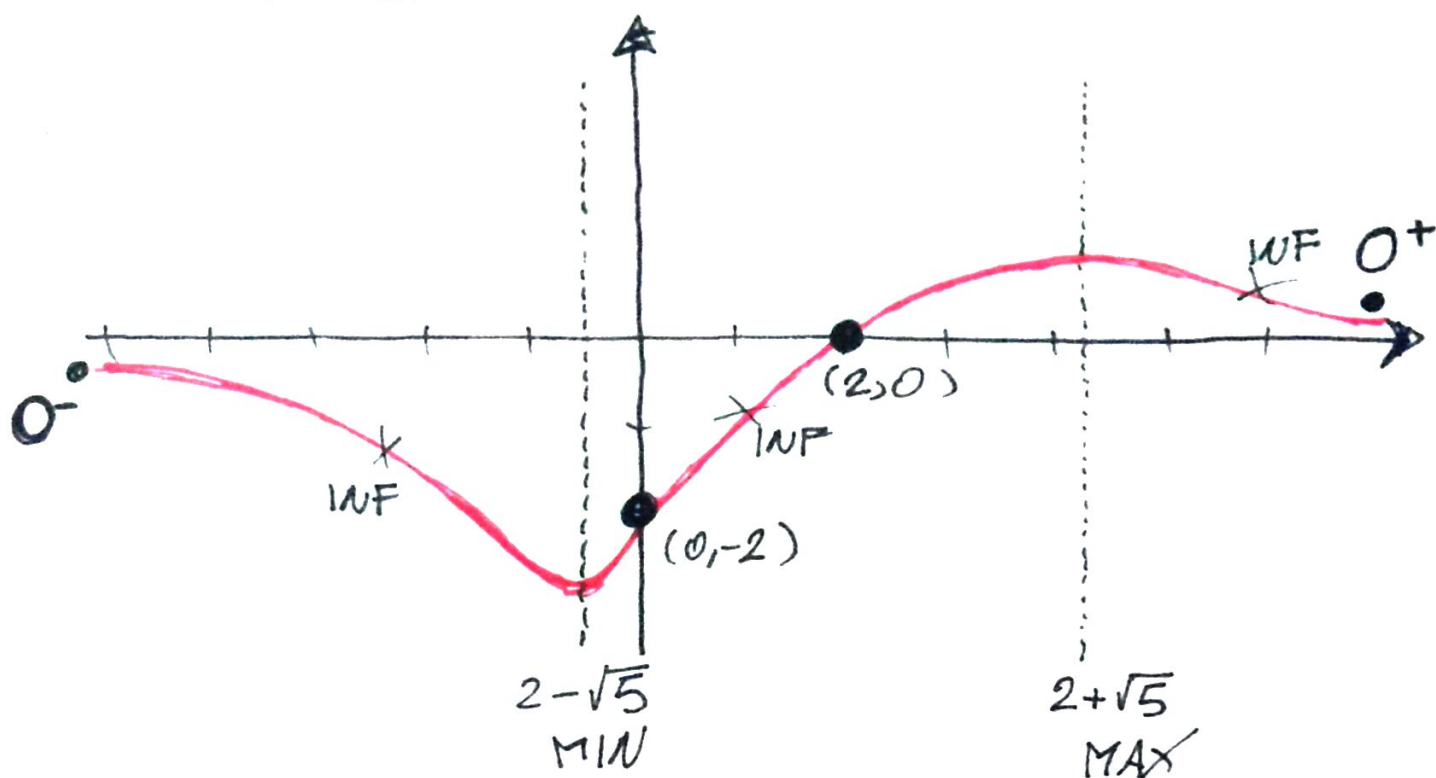
$$-x^2 + 4x + 1 = 0$$

$$x^2 - 4x - 1 = 0$$

$$x = 2 \pm \sqrt{5}$$



PODEMOS COLOCAR AS INFORMAÇÕES NUM GRÁFICO E TENTAR ESBOÇAR A FUNÇÃO



x PONTOS DE INFLEXÃO

QUANDO A FUNÇÃO MUDA DE CONCAVIDADE

O QUE ACONTECE SE MUDAMOS O DENOMINADOR DE $x^2 + 1$ A $x^2 - 1$?

$$\frac{x-2}{x^2+1}$$



$$\frac{x-2}{x^2-1}$$





1) PONTOS DE ENCONTRO COM O EIXO X
($y=0$)

$$\frac{x-2}{x^2-1} = 0 \Rightarrow x=2$$

$$(2, 0)$$

2) PONTOS DE ENCONTRO COM O EIXO Y
($x=0$)

$$\frac{0-2}{0^2-1} = 2$$

$$(0, 2)$$

3) ASSÍNTOTAS HORIZONTAIS

$$\left| \begin{array}{ll} x \rightarrow +\infty & 0^+ \\ x \rightarrow -\infty & 0^- \end{array} \right|$$

4) ASSÍNTOTAS VERTICAIS (DENOMINADOR ZERO)

$$x^2-1=0 \Rightarrow x=\pm 1$$

NESTES PONTOS A FUNÇÃO DIVERGE

$$\begin{array}{cc} -1 & 1 \\ x/x & x/x \\ -1.1 \mid -0.9 & 0.9 \mid 1.1 \end{array} \quad \text{"}\infty\text{"}$$

PRECISAMOS SABER O SINAL DO "∞"

$$\begin{array}{lll} -1.1 & \frac{-1.1-2}{(-1.1)^2-1} = \frac{-}{+} = - & -\infty \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} -0.9 & \frac{-0.9-2}{(-0.9)^2-1} = \frac{-}{-} = + & +\infty \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} 0.9 & \frac{0.9-2}{(0.9)^2-1} = \frac{-}{-} = + & +\infty \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} 1.1 & \frac{1.1-2}{(1.1)^2-1} = \frac{-}{+} = - & -\infty \end{array}$$



MAX, MIN

$$f(x) = x - 2$$

$$f'(x) = 1$$

$$g(x) = x^2 - 1$$

$$g'(x) = 2x$$



$$f'(x)g(x) - f(x)g'(x) = 1 \cdot (x^2 - 1) - (x - 2)2x$$

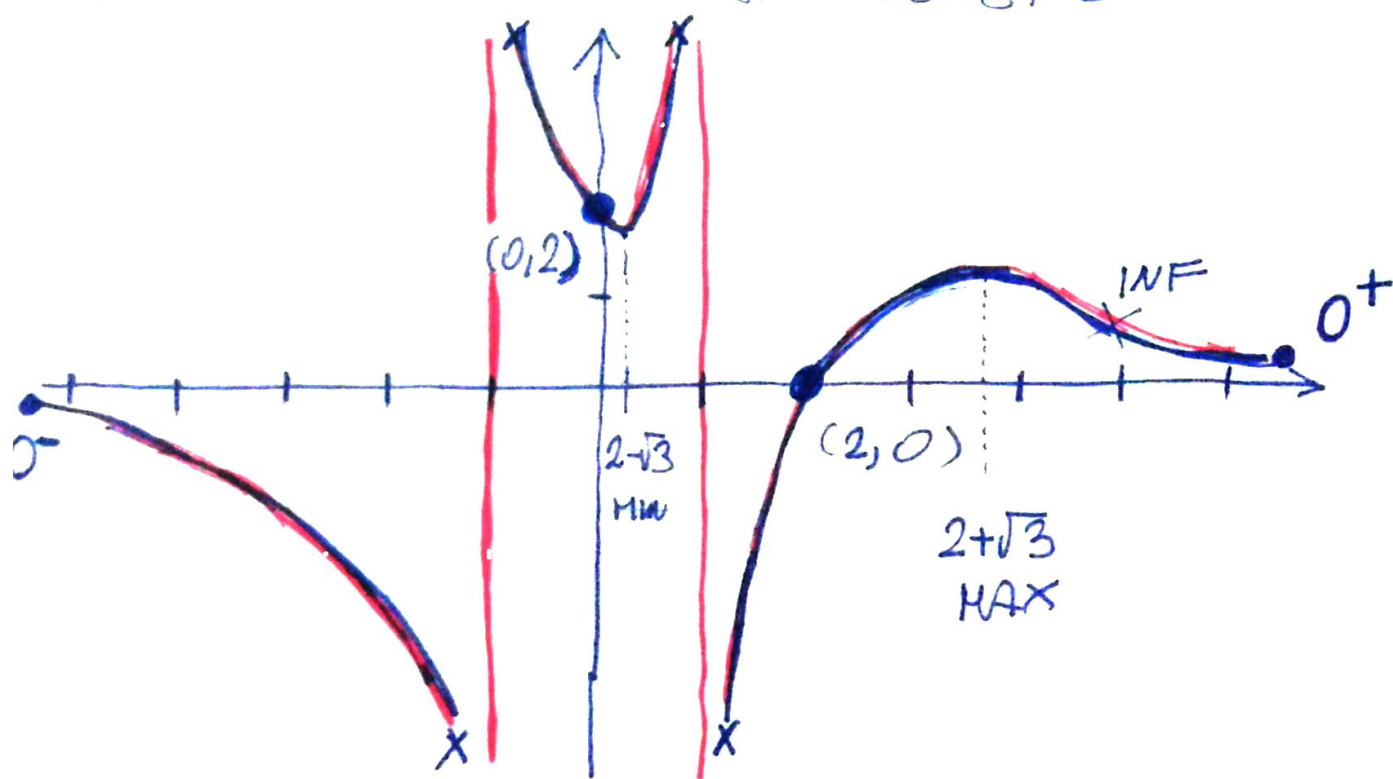
$$= x^2 - 1 - 2x^2 + 4x$$

$$= -x^2 + 4x - 1 = 0$$

$$x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$x = 2 \pm \sqrt{3}$$

PODEMOS, COM AS INFORMAÇÕES OBTIDAS
GRATIFICAR A NOSSA FUNÇÃO



ESTUDO DA FUNÇÃO



$$F(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - x - 2}$$

- 1) DETERMINAR QUANDO A FUNÇÃO CRUZA O EIXO X [NUM=0]
- 2) DETERMINAR QUANDO A FUNÇÃO CRUZA O EIXO Y [X=0] {0, F(0)}
- 3) ASSÍNTOTAS HORIZONTAIS [x → ±∞]
- 4) ASSÍNTOTAS VERTICAIS [DEN=0]
- 5) PONTOS DE MAX E MIN
- 6) PONTOS DE INFLEXÃO
- 7) TANGENTE NO PONTO (4, 3/10)

FÓRMULA A SEREM USADAS PARA DETERMINAR MAX, MIN E TANGENTE

$$F(x) = f(x)/g(x)$$

$$F'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

$$y = F'(x_0)(x - x_0) + y_0$$

|||||



ANTES DE RESOLVER MELHOR ESCRVER A FUNÇÃO (DENOMINADOR E NUMERADOR) EM TERMOS DOS ZEROS



$$x^2 - 4x + 3 = 0 \quad x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \begin{matrix} 1 \\ 3 \end{matrix}$$

$$x^2 - x - 2 = 0 \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \begin{matrix} -1 \\ 2 \end{matrix}$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - x - 2} = \frac{(x-1)(x-3)}{(x+1)(x-2)}$$

1) NUM = 0 (1, 0) (3, 0)
Pontos no Eixo X

2) x = 0 $F(0) = \frac{+3}{-2} = -\frac{3}{2}$

$(0, -\frac{3}{2})$ ponto no eixo Y

3) ASSÍNTOTAS HORIZONTAIS $x \rightarrow \pm \infty$

$$\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - x - 2} \sim \frac{x^2 - 4x}{x^2 - x} \rightarrow 1$$

IMPORTANTE: QUANDO A POTÊNCIA É IGUAL PRECISAMOS DO SEGUNDO TERMO PARA DETERMINAR SE ESTAMOS POUCO ACIMA DE 1 OU POUCO EM BAIXO DE 1

$x \rightarrow +\infty$ NUM < DEN então teremos 1-
 $x \rightarrow -\infty$ NUM > DEN então teremos 1+



$$(-\infty, 1^+) \quad (+\infty, 1^-) \quad \text{ASSÍNTOTAS HORIZONTAIS}$$



4) $\text{DEN} = 0$ IMPLICA $x = -1$ $x = 2$

ASSÍNTOTAS VERTICAIS $(-1^-, ? \infty)$

$(-1^+, ? \infty)$

$(2^-, ? \infty)$

$(2^+, ? \infty)$

$$F(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{(x+1)(x-2)}$$

$-1^- [-1.1]$ $\frac{-}{-} = +$ $(-1^-, +\infty)$

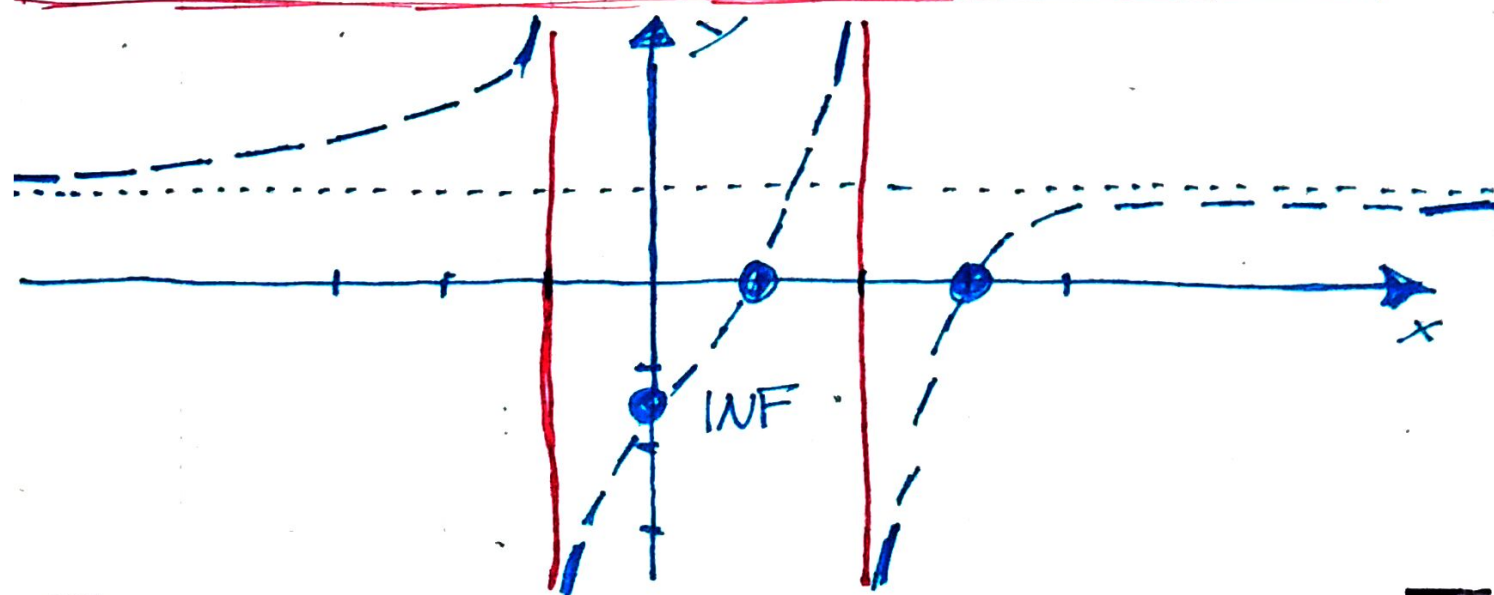
$-1^+ [-0.9]$ $\frac{-}{-} = -$ $(-1^+, -\infty)$

$2^- [1.9]$ $\frac{+}{-} = +$ $(2^-, +\infty)$

$2^+ [2.1]$ $\frac{+}{+} = -$ $(2^+, -\infty)$

$(-1^-, +\infty)$ $(-1^+, -\infty)$ $(2^-, +\infty)$ $(2^+, -\infty)$

ASSÍNTOTAS VERTICAIS



5) CALCULAMOS AGORA $F'(x)$

$$F(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - x - 2}$$

$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$

$$f'(x) = 2x - 4$$

$$g(x) = x^2 - x - 2$$

$$g'(x) = 2x - 1$$

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{(2x - 4)(x^2 - x - 2) - (x^2 - 4x + 3)(2x - 1)}{(x^2 - x - 2)^2} \\ &= \frac{(2x - 4)(x^2 - x - 2) + (-x^2 + 4x - 3)(2x - 1)}{(x^2 - x - 2)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 2x^3 - 2x^2 - 4x \\ - 4x^2 + 4x + 8 \\ - 2x^3 + x^2 \\ + 8x^2 - 4x \\ - 6x + 3 \\ \hline 3x^2 - 10x + 11 \end{array}$$

$$F'(x) = \frac{3x^2 - 10x + 11}{(x^2 - x - 2)^2}$$

$$\frac{5 \pm \sqrt{25 - 33}}{3}$$

NÃO TEMOS MAX OU MIN

6) DO GRÁFICO PODEMOS VER QUE TEMOS UM PUNTO DE INFLEXÃO

7) TANGENTE NO PUNTO $(x_0, y_0) = (4, \frac{3}{10})$

$$F'(x_0) = F'(4) = \frac{48 - 40 + 11}{(16 - 4 - 2)^2} = \frac{19}{100}$$

$$y = \frac{19}{100} (x - 4) + \frac{3}{10}$$



$$\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - x - 2}$$

$$\frac{19(x-4)}{100} + \frac{3}{10}$$

