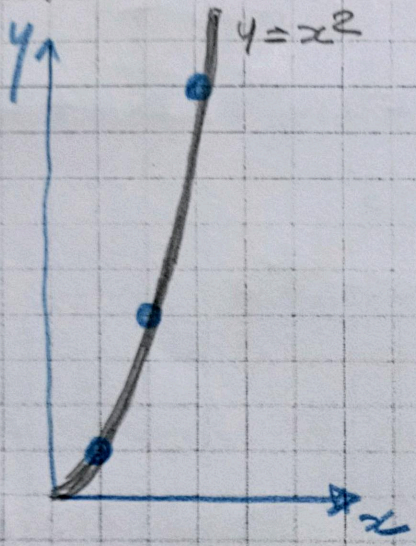
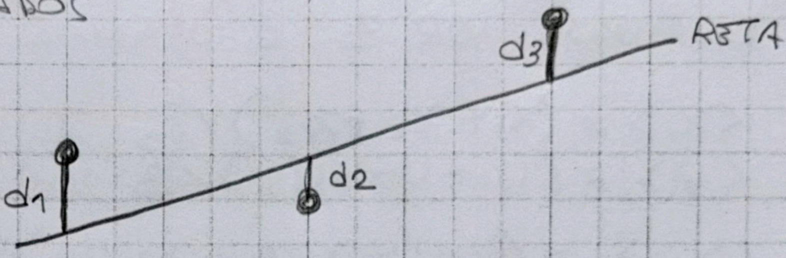
IMAGINAMOS DE TER 3 PONTOS (1,1) (2,4) (3,9)
E QUERETE ENCONTRAR A RETA QUE MELHOR APROXIMA
ESTES PONTOS

SE OBSERVAMOS OS PONTOS NOTAMOS QUE A ORDENADA
É SEMPRE O QUADRADO DA ABSCISSA, ENTÃO ESTES
3 PONTOS PERTENCEM À PARABOLA

$$y = x^2$$



QUEREMOS DETERMINA a E b
EM $y = ax + b$ QUE MELHOR
APROXIMAM OS 3 PONTOS
DADOS



MINIMIZAR $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2$

PONTOS DADOS
(x_1, y_1)
(x_2, y_2)
(x_3, y_3)

ORDENADAS DOS PONTOS	y_1	y_2	y_3
ORDENADAS DAS RETAS	ax_1+b	ax_2+b	ax_3+b

$$d_1 = y_1 - ax_1 - b$$
$$d_2 = y_2 - ax_2 - b$$
$$d_3 = y_3 - ax_3 - b$$

QUEREMOS MINIMIZAR

$$(y_1 - ax_1 - b)^2 + (y_2 - a x_2 - b)^2 + (y_3 - a x_3 - b)^2$$

DERIVANDO COM RESPEITO A a

$$2(y_1 - ax_1 - b)(-x_1) + 2(y_2 - ax_2 - b)(-x_2) + 2(y_3 - a x_3 - b)(-a)$$

DERIVANDO COM RESPEITO A b

$$2(y_1 - ax_1 - b)(-1) + 2(y_2 - ax_2 - b)(-1) + 2(y_3 - ax_3 - b)(-1)$$

UNICAMP
Prof. Stefano De Leo
Department of Applied Mathematics
State University of Campinas
www.ime.unicamp.br/~deleo

IMPONDO QUE AS DERIVADAS SEJAM 0 OBTEMOS AS SEGUINTE EQUAÇÕES

$$(y_1 - ax_1 - b)x_1 + (y_2 - ax_2 - b)x_2 + (y_3 - ax_3 - b)x_3 = 0$$
$$y_1 - ax_1 - b + y_2 - ax_2 - b + y_3 - ax_3 - b = 0$$

LEMBRAR QUE TEMOS QUE DETERMINA a E B ENTÃO REESCREVEMOS AS EQUAÇÕES DA FORMA

$$a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + b(x_1 + x_2 + x_3) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$
$$a(x_1 + x_2 + x_3) + 3b = y_1 + y_2 + y_3$$

DIVIDIMOS POR 3 E USAMOS A NOTAÇÃO

$$\langle x \rangle = (x_1 + x_2 + x_3)/3$$
$$\langle y \rangle = (y_1 + y_2 + y_3)/3$$
$$\langle xy \rangle = (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)/3$$
$$\langle x^2 \rangle = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)/3$$

E CHEGAREMOS AO SEGUINTE SISTEMA

$$a\langle x^2 \rangle + b\langle x \rangle = \langle xy \rangle$$
$$a\langle x \rangle + b = \langle y \rangle$$

$$a\langle x \rangle^2 + b\langle x \rangle = \langle x \rangle\langle y \rangle$$
$$a\langle x^2 \rangle + b\langle x \rangle = \langle xy \rangle$$

SUBTRAINDO A SEGUNDA DA PRIMEIRA OBTEMOS

$$\boxed{a = \frac{\langle xy \rangle - \langle x \rangle\langle y \rangle}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}} \qquad \boxed{b = \langle y \rangle - a\langle x \rangle}$$

PODEMOS AGORA USAR AS FÓRMULAS OBTIDAS NO CASO DOS PONTOS $(1,1)$ $(2,4)$ $(3,9)$

$x_1 = 1$ $x_2 = 2$ $x_3 = 3$ $y_1 = 1$ $y_2 = 4$ $y_3 = 9$

$x_1y_1 = 1$ $x_2y_2 = 8$ $x_3y_3 = 27$

$x_1^2 = 1$ $x_2^2 = 4$ $x_3^2 = 9$

$$\langle x \rangle = \frac{1+2+3}{3} = 2 \qquad \langle y \rangle = \frac{1+4+9}{3} = \frac{14}{3}$$

Prof. Stefano De Leo
Department of Applied Mathematics
State University of Campinas
www.ime.unicamp.br/~deleo

$$\langle xy \rangle = \frac{1+8+27}{3} = \frac{36}{3} = 12$$

$$\langle x^2 \rangle = \frac{1+4+9}{3} = \frac{14}{3}$$

$$a = \frac{12 - 2\,\frac{14}{3}}{\frac{14}{3} - 4} = \frac{36-28}{14-12} = \frac{8}{2} = 4$$

$$b = \frac{14}{3} - 4\cdot 2 = \frac{14-24}{3} = -\frac{10}{3}$$

$$\boxed{y = 4x - \frac{10}{3}}$$

CALCULAMOS A SOMA DOS QUADRADOS

PONTOS DADOS $(1,1)$ $(2,4)$ $(3,9)$

PONTOS ~~A~~PROXIMADOS $\left(1, 4\cdot 1 - \frac{10}{3}\right)$ $\left(2, 4\cdot 2 - \frac{10}{3}\right)$ $\left(3, 4\cdot 3 - \frac{10}{3}\right)$

$\left(1, \frac{2}{3}\right)$ $\left(2, \frac{14}{3}\right)$ $\left(3, \frac{26}{3}\right)$

SOMA DOS QUADRADOS $\left(1 - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(4 - \frac{14}{3}\right)^2 + \left(9 - \frac{26}{3}\right)^2$

$$\underbrace{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2}$$

$$\frac{6}{9} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

QUALQUER OUTRA RETA DARÁ COMO SOMA DOS QUADRADOS UM VALOR SUPERIOR A 2/3

COM EXEMPLO MUDAS O $-\frac{10}{3}$ EM $-\frac{9}{3} = -3$

E ANALISAMOS A RETA $\boxed{y = 4x - 3}$

PONTOS DADOS $(1,1)$ $(2,4)$ $(3,9)$

PONTOS OBTIDO A PARTIR DA RETA $y=4x-3$ $(1,1)$ $(2,5)$ $(3,10)$

SOMA DOS QUADRADOS $0^2+(-1)^2+1^2 = \boxed{2}$

UNICAMP
Prof. Stefano De Leo
Department of Applied Mathematics
State University of Campinas
www.ime.unicamp.br/~deleo