

EXERCÍCIOS DE FUNÇÕES GERADORAS

① QUANTAS SOLUÇÕES POSSUI A EQUAÇÃO $x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4$ DE $2 \leq x_1 \leq 5$, $2 \leq x_2 \leq 4$, $5 \leq x_3 \leq 7$ E $0 \leq x_4$

RESOLUÇÃO: VALE LEMBRAR QUE NAS AULAS DOS DIAS 03 E 04 DESTE MÊS (TAMBÉM DISPONÍVEIS NESTA PÁGINA) FOI INTRODUIDO O CONCEITO E ALGUNS EXEMPLOS DE EXERCÍCIOS SOBRE FUNÇÕES GERADORAS. LOGO, ABORDAREMOS AS RESOLUÇÕES DESTE E DOS PRÓXIMOS EXEMPLOS, DE UMA MANEIRA MAIS PRÁTICA.

TEMOS ENTÃO:

$$\text{PARA } 2 \leq x_1 \leq 5 \Rightarrow \{x^2 + x^3 + x^4 + x^5\}$$

$$2 \leq x_2 \leq 4 \Rightarrow \{x^2 + x^3 + x^4\}$$

$$5 \leq x_3 \leq 7 \Rightarrow \{x^5 + x^6 + x^7\}$$

$$0 \leq x_4 \Rightarrow \text{teríamos } \{x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + \dots\} \text{ mas, como na equação o coeficiente de } x_4 \text{ é } 4, \text{ ou seja } 4x_4, \text{ teremos então } \{1 + x^4 + x^8 + \dots\} = \frac{1}{1-x^4}$$

(SE ALGUM ALUNO AINDA ESTIVER COM DÚVIDAS NESTA PARTE DO PROBLEMA, ACONSELHO REVER OS EXEMPLOS ① E ② DA AULA DO DIA 04/10/11)

A FIM DE FACILITAR A RESOLUÇÃO, COLOCAREMOS EM EVIDÊNCIA O x^2 E O x^5 ,

ASSIM:

$$x^2(1+x+x^2+x^3)$$

$$x^2(1+x+x^2)$$

$$x^5(1+x+x^2)$$

$$\text{MULTIPLICANDO, TEREMOS: } x^2(1+x+x^2+x^3) \cdot x^2(1+x+x^2) \cdot x^5(1+x+x^2) \cdot \frac{1}{1-x^4} =$$

$$= \frac{x^2(1+x+x^2+x^3) x^2(1+x+x^2) x^5(1+x+x^2)}{(1-x^2)(1+x^2)} = \frac{x^9(1+x+x^2)^2(1+x+x^2+x^3)}{(1-x)(1+x)(1+x^2)} = \frac{x^9(1+x+x^2)^2}{1-x}$$

$$= \frac{x^9(1+2x+3x^2+2x^3+x^4)}{1-x}$$

$$\text{observe que } \frac{1}{1-x} = (1+x+x^2+\dots)$$

9	10	11	12	13	14	15
1	2	3	2	1		
	1	2	3	2	1	
		1	2	3	2	1
			1	2	3	2 ...
				1	2	3
					1	2 ----
						1 ----
1	3	6	8	9	9	9

Assim, as soluções para a equação $x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4$ são as seguintes:

$$\begin{aligned}
 x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 9 &\rightarrow 1 \text{ solução} \\
 &= 10 \rightarrow 3 \text{ soluções} \\
 &= 11 \rightarrow 6 \text{ soluções} \\
 &= 12 \rightarrow 8 \text{ soluções} \\
 &\geq 13 \rightarrow 9 \text{ soluções}
 \end{aligned}$$

Vamos ser no prático para $x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 9$.

as menores valores assumidos são $2 + 2 + 5 + 0$, ou seja, 1 (uma) solução para $x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 10$ temos:

$$\left. \begin{array}{l} 2 + 2 + 6 \quad 4 \cdot 0 \\ 2 + 3 + 5 \quad 4 \cdot 0 \\ 3 + 2 + 5 \end{array} \right\} \text{ ou seja, 3 (três) soluções}$$

RELEMBRANDO:

$$(1-x)^{-u} = \sum_{\pi=0}^{\infty} \binom{u}{\pi} x^{\pi} (-1)^{\pi}$$

CORRETO

e não $(1 \oplus x^{\alpha})^{-u} = \sum_{\pi=0}^{\infty} \binom{u}{\pi} x^{\pi\alpha} (-1)^{\pi}$

ERRADO

ERRATA

$$\frac{1}{(1-x^p)^m} = \sum_{\pi=0}^{\infty} \binom{m+\pi-1}{\pi} \cdot x^{\pi p}$$

$$\frac{1}{1-x^m} = 1 + x^m + x^{2m} + x^{3m} + \dots$$

3

② DE QUANTAS MANEIRAS DIFERENTES PODEMOS ESCOLHER 12 LATAS DE CERVEJA SE EXISTEM 5 MARCAS DIFERENTES?

Como não há nenhuma restrição com relação ao número de latas de uma determinada marca, a função geradora do número de latas de uma dada marca é $(1+x+x^2+\dots+x^{12})$ e como são 5 as marcas, a resposta será o coeficiente de x^{12} na expressão de:

$$(1+x+x^2+x^3+\dots+x^{12})^5 =$$

Sabemos que

$$(1-x)(1+x+x^2+\dots+x^{12}) = 1 + \cancel{x} + \cancel{x^2} + \dots + \cancel{x^{12}} - \cancel{x} - \cancel{x^2} - \dots - \cancel{x^{12}} - x^{13} = 1 - x^{13}$$

Assim temos:

$$(1+x+x^2+\dots+x^{12})^5 = \left(\frac{1-x^{13}}{1-x}\right)^5$$

$$(1-x^{13})^5 = \binom{5}{0}x^0 - \binom{5}{1}x^{13} + \binom{5}{2}x^{26} - \binom{5}{3}x^{39} + \binom{5}{4}x^{52} - \binom{5}{5}x^{65} =$$

$$= 1 - 5x^{13} + 10x^{26} - 10x^{39} + 5x^{52} - x^{65}$$

Como $(1+x+x^2+\dots+x^{12})^5 = \left(\frac{1-x^{13}}{1-x}\right)^5 = (1-x^{13})^5 \cdot \frac{1}{(1-x)^5}$, vemos que o coefi-

ciente de x^{12} é o coeficiente de x^{12} em $\frac{1}{(1-x)^5}$. Assim:

$$\frac{1}{(1-x)^5} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+5-1}{n} x^n \Rightarrow \binom{5+12-1}{12} = \binom{16}{12} = \boxed{1820}$$

③ ENCONTRAR O NÚMERO DE MANEIRAS NAS QUAIS 4 PESSOAS, CADA UMA JOGANDO UM ÚNICO DADO, PODEM OBTER UM TOTAL DE 17.

Como num dado os possíveis resultados variam de 1 a 6 temos a seguinte função geradora: $x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6$ e como são 4 (quatro) dados, temos:

$$(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^4 = x^4(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)^4 = x^4 \left(\frac{1-x^6}{1-x}\right)^4$$

$$x^4 \cdot (1-x^6)^4 = x^4 \left[\binom{4}{0} - \binom{4}{1}x^6 + \binom{4}{2}x^{12} - \binom{4}{3}x^{18} + \binom{4}{4}x^{24} \right] = x^4(1 - 4x^6 + 6x^{12} - 4x^{18} + x^{24})$$

Logo, da multiplicação acima, nos interessa somente os termos com expoentes menores ou iguais a 17 assim, temos então: $\frac{x^4 - 4x^{10} + 6x^{16}}{(1-x)^4}$

$$\frac{1}{(1-x)^4} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{4+n-1}{n} x^n$$

Observando-se a função $x^4 - 4x^{10} + 6x^{16}$ temos

para x^4

para $-4x^{10}$

para $6x^{16}$

$$n=4 \Rightarrow 17-4=13$$

$$n=10 \Rightarrow 17-10=7$$

$$n=16 \Rightarrow 17-16=1$$

$$1 \cdot \binom{4+13-1}{13} - 4 \cdot \binom{4+7-1}{7} + 6 \cdot \binom{4+1-1}{1} = \binom{16}{13} - 4 \binom{10}{7} + 6 \binom{4}{1} = \boxed{104}$$

PARA PRÁTICA EM CASA

1. ENCONTRAR A FUNÇÃO GERADORA DO PROBLEMA $X_1 + X_2 + X_3 + 3X_4 = N$ se $2 \leq X_1 \leq 5$, $2 \leq X_2 \leq 4$, $5 \leq X_3 \leq 7$ e $0 \leq X_4$

*Obs: é semelhante ao exercício n° 1 (Primeira Página) trocando-se o 4×4 por 3×4

Resp:

$$x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 9 \quad (1 \text{ solução})$$

$$= 10 \quad (3 \text{ soluções})$$

$$= 11 \quad (6 \text{ soluções})$$

$$= 12 \quad (9 \text{ soluções})$$

2. ENCONTRAR O NÚMERO DE MANEIRAS NAS QUAIS 4 PESSOAS, CADA UMA JOGANDO UM ÚNICO DADO, PODEM OBTER UM TOTAL DE 18.

*Obs: é semelhante ao exercício n° 2 (Terceira Página) trocando-se o total de 17 para o total de 18.

Resp: 80