

Questão 1: Quantos anagramas podemos formar com 2A, 2B e 3C sabendo que B e C devem aparecer pelo menos uma vez?

Representando a função geradora de cada letra para a quantidade de anagramas, temos que:

$$\begin{aligned}F(A) &= x^0 + x^1 + \frac{x^2}{2!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} \\F(B) &= x^1 + \frac{x^2}{2!} = x + \frac{x^2}{2} \\F(C) &= x^1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\end{aligned}$$

** observe que ao fixar B e C devemos tirar 1 da função geradora de cada letra **

Dessa forma, temos que a função geradora do problema é dada por: $F(A) \cdot F(B) \cdot F(C)$, logo:

$$\begin{aligned}F(A) \cdot F(B) \cdot F(C) &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) \left(x + \frac{x^2}{2}\right) \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right) \\&= \left(x + \frac{3x^2}{2} + x^3 + \frac{x^4}{4}\right) \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right)\end{aligned}$$

Representando o produto acima através de uma tabela, temos os fatores

	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7
x	1	3/2	1	1/4		
$x^2/2$		1/2	3/4	1/2	1/8	
$x^3/6$			1/6	1/4	1/6	1/24
Soma	1	2	23/12	1	7/24	1/24
Fatorial	2!	3!	4!	5!	6!	7!
# Anagramas	2	12	46	120	210	210

** * * A tabela acima condiz com o resultado da expressão:*

$$F(A) \cdot F(B) \cdot F(C) = x + 2x^3 + \frac{23x^4}{12} + x^5 + \frac{7x^6}{24} + \frac{x^7}{24}$$

No caso, a tabela acima representa o valor de $F(A) \cdot F(B) \cdot F(C)$ com os coeficientes dos fatores de $\frac{x^i}{i!}$. Portanto, temos que:

O número total de anagramas para 2 letras com B e C fixados são 2

O número total de anagramas para 3 letras com B e C fixados são 12

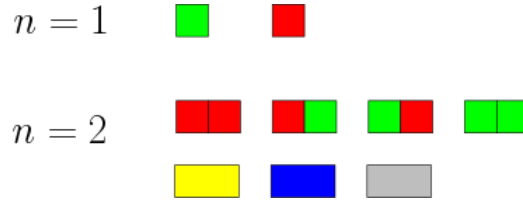
O número total de anagramas para 4 letras com B e C fixados são 62

O número total de anagramas para ... letras são ...

Questão 2: Suponha que você tenha bandeiras de cinco cores diferentes (A, B, C, D, E) e que A e B tenham 1 cm de tamanho e C, D e E tenham 2 cm. Quantas bandeiras de n centímetros podemos formar?



Tamanho (n)	# de possibilidades	possibilidades
1 cm	2	A, B
2 cm	7	AA, AB, BA, BB, $\overline{CC}$, $\overline{DD}$, $\overline{EE}$
3 cm	20	AAA, AAB, BAA, ABA, ABB, BAB, BBA, BBB, $\overline{ACC}$, $\overline{ADD}$, $\overline{AEE}$, $\overline{CCA}$, $\overline{DDA}$, $\overline{EEA}$, $\overline{BCC}$, $\overline{BDD}$, $\overline{BEE}$, $\overline{CCB}$, $\overline{ddb}$, $\overline{EEB}$
...	...	...



Analisando a tabela acima e representando cada cor de bandeira como um termo na relação de recorrência, temos que:

$$C_n = 2C_{n-1} + 3C_{n-2}$$

Em que o termo $\kappa \cdot C_{n-t}$ representa κ possibilidades de pegar uma bandeira de t centímetros (e.g. $2C_{n-1}$: 2 possibilidades de bandeiras com 1 cm).

Reescrevendo a relação em função de alfa α , temos:

$$\alpha^2 = 2\alpha + 3 \iff \alpha^2 - 2\alpha - 3 = 0 \iff (\alpha - 3)(\alpha + 1) = 0$$

Pegando as raízes 3 e -1 , temos a relação de recorrência:

$$C_n = A(3)^n + B(-1)^n$$

Onde $C_1 = 2$ e $C_2 = 7$, logo:

$$\begin{cases} A(3)^1 + B(-1)^1 = 2 \\ A(3)^2 + B(-1)^2 = 7 \end{cases} \iff 12A = 9 \therefore A = \frac{3}{4} \wedge B = \frac{1}{4}$$

Substituindo A por $3/4$ e B por $1/4$, temos:

$$C_n = \frac{3^{n+1} + (-1)^n}{4}$$