Questão 1

Calcule o número de anagramas de 2 até 8 letras, contendo pelo menos um B e um C, que podem ser formador a partir do conjunto de 2A, 3B e 3C.

Questão 2

Determine o número de combinações que levam ao total de 50 nos lançamentos de dados do tipo:

a) 7 dados de 9 faces.

b) 8 dados de 8 faces.

Questão 3

3.1) Com 3 blocos laranjas (l_1, l_2 e l_3) de 1 cm e 4 verdes de 2 cm (v_1, v_2, v_3 e v_4). Determine a fórmula geral para obter o número de blocos diferentes de n cm.

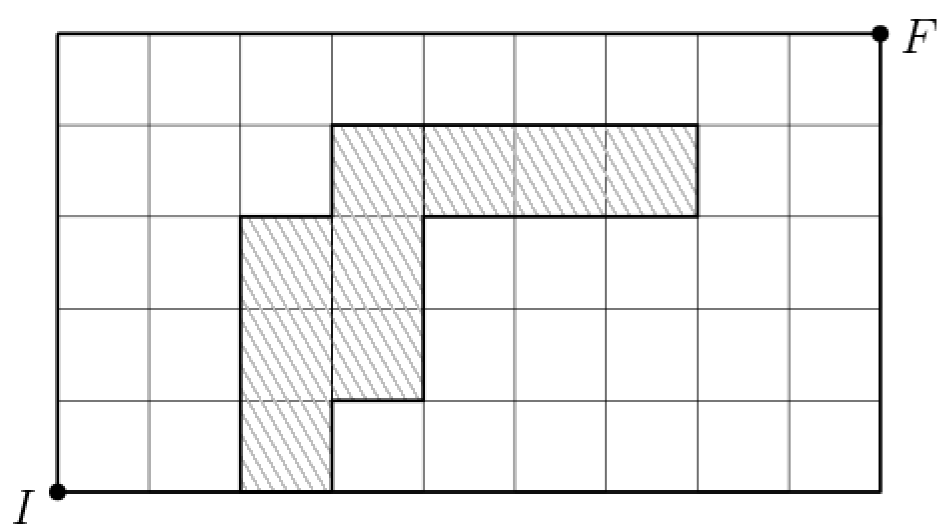
3.2) Dada a fórmula de recocrrência

$$b_n - 4\,b_{n-1} + 4\,b_{n-2} = 0$$

com $b_1 = b_2 = 1$ e $n \geq 3$. Encontre a fórmula fechada para b_n.

Questão 4

Calcule o número de caminhos superiores e inferiores do ponto I até F.



Questão 1. Representando a função geradora de cada letra para a quantidade de anagramas, temos que:

$$F(A) = x^0 + x^1 + \frac{x^2}{2!} = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$
$$F(B) = x^1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$
$$F(C) = x^1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$

** observe que ao fixar um B e um C devemos tirar $1 = x^0$ da função geradora de cada letra **

Dessa forma, temos que a função geradora do problema é dada pelo produto $F(A) \cdot F(B) \cdot F(C)$, logo:

$$\begin{aligned} F(A) \cdot F(B) \cdot F(C) &= \left(1 \,+\, x \,+\, \frac{x^2}{2}\right)\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right)^2 \\ &= \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right)\left(x + \frac{3x^2}{2} + \frac{7x^3}{6} + \frac{5x^4}{12} + \frac{x^5}{12}\right) \end{aligned}$$

Representando o produto acima através de uma tabela, temos os fatores

	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8
x	1	3/2	7/6	5/12	1/12		
$x^2/2$		1/2	3/4	7/12	5/24	1/24	
$x^3/6$			1/6	3/12	7/36	5/72	1/72
Soma	1	2	25	5/4	35/72	1/9	1/72
Fatorial i $\rightarrow x^i/i!$	2!	3!	4!	5!	6!	7!	8!
# Anagramas	2	12	50	150	350	560	560

** * * A tabela acima condiz com o resultado da expressão:*
$$F(A) \cdot F(B) \cdot F(C) = x^2 + 2x^3 + \frac{25x^4}{12} + \frac{5x^5}{4} + \frac{35x^6}{72} + \frac{x^7}{9} + \frac{x^8}{72}$$

No caso, a tabela acima representa o valor de $F(A) \cdot F(B) \cdot F(C)$ com os coeficientes dos fatores de $\frac{x^i}{i!}$ (e.g. $2x^3 = 2 \cdot 3!\, \frac{x^3}{3!} = 12\, \frac{x^3}{3!} \rightarrow$ 12 anagramas com 3 letras).

Dessa forma, temos que:
O número total de anagramas para 2 letras com B e C fixados são 2
O número total de anagramas para 3 letras com B e C fixados são 12
O número total de anagramas para 4 letras com B e C fixados são 50
O número total de anagramas para ... letras são ...

Questão 2. Ao invés de resolver o problema dos dados de uma maneira direta, ou seja considerando a soma

$$x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n = 50$$

Vamos pensar em uma forma mais simples de resolver, pois as questões 2a) e 2b) vão gerar vários termos para serem calculados, tornando a questão longa e trabalhosa.

Percebemos que no lançamento de dados, o número de possibilidades de se obter o valor mínimo e o valor máximo são iguais, e.g.

* * *No lançamento de 2 dados comuns* ($x_1 + x_2$):

O valor mínimo é 2 (1 + 1) e o valor máximo é 12 (6 + 6). Ou seja, número de combinações possíveis de se obter 2 e 12 são iguais (uma única combinação)! Será que isso é verdadeiro para os outros valores e seus complementares?

Observamos que o número de possibilidades de somar 3 e 11 também são iguais {(1+2),(2+1)} e {(5+6),(6+5)} e podemos verificar que essa propriedade também é válida para as outras combinações (4 e 10, 5 e 9, etc). No caso o valor que queremos obter é o complementar da soma do máximo valor possível mais o mínimo valor possível (que é o mesmo número de dados do problema).

$$N_{max} + N_{min} = V$$

Em que V é o valor que utilizamos para achar o par de valores cuja a probabilidade de ser obtida é igual.

Retomando a ideia com outro exemplo, lançamento de 5 dados de 7 faces ($x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$), temos que:

$$N_{max} + N_{min} = (5 \cdot 7) + (7 \cdot 1) = 40 \therefore V = 40$$

Se o problema pedir a probabilidade de obter a soma 28, podemos simplificar o problema achando o complementar de 28 em relação a V, ou seja: $40 - 28 = 12$. Dessa forma, o número de formas obter a soma 28 é o mesmo de obter 12 (cujo cálculo é bem mais simples).

Agora vamos aplicar essa ideia ao nosso problema:

a) Somar 50 com 7 dados de 9 faces.

O valor V é obtido por: $max + min = 7 \cdot 9 + 7 \cdot 1 = 70$. Portanto a probabilidade de somar 50 é igual a probabilidade de formar 70-50 = 20

$$P(50) = P(20)$$

b) Somar 50 com 8 dados de 8 faces.

O valor V é obtido por: $max + min = 8 \cdot 8 + 8 \cdot 1 = 72$. Portanto a probabilidade de somar 50 é igual a probabilidade de formar 70-50 = 22

$$P(50) = P(22)$$

Escrevendo a função geradora do problema 2a), temos que:

$$F(D_{9F}) = x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9$$

Como o nosso problema envolve 7 dados de 9 faces, temos que a F_G é dada por:

$$\begin{aligned} F_G &= (x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9)^7 \\ &= x^7(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8)^7 \\ &= x^7 \cdot \left[\frac{1 - x^9}{1 - x}\right]^7 \\ &= x^7 \cdot \sum_{r=0}^{20} (-1)^r \binom{7}{r} x^{9r} \cdot \sum_{S=0}^{\infty} \binom{6+S}{6} x^S \end{aligned}$$

Queremos apenas os coeficientes dos fatores x^{20}, logo

$$7 + 9r + S = 20 \iff 9r + S = 13$$

Cuja solução é dada pelos pares (r, S):$\{(0, 13), (1, 4)\}$, portanto a solução é obtida por:

$$(-1)^0 \binom{7}{0}\binom{19}{6} + (-1)^1 \binom{7}{1}\binom{10}{6} = \binom{19}{6} - 7\binom{10}{6} = 25662$$

Escrevendo a função geradora do problema 2b), temos que:

$$F(D_{8F}) = x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8$$

Como o nosso problema envolve 8 dados de 8 faces, temos que a F_G é dada por:

$$\begin{aligned} F_G &= (x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8)^8 \\ &= x^8(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7)^8 \\ &= x^8 \cdot \left[\frac{1 - x^8}{1 - x}\right]^8 \\ &= x^8 \cdot \sum_{r=0}^{22} (-1)^r \binom{8}{r} x^{8r} \cdot \sum_{S=0}^{\infty} \binom{7+S}{7} x^S \end{aligned}$$

Queremos apenas os coeficientes dos fatores x^{22}, logo

$$8 + 8r + S = 22 \iff 8r + S = 14$$

Cuja solução é dada pelos pares (r, S):$\{(0, 14), (1, 6)\}$, portanto a solução é obtida por:

$$(-1)^0 \binom{8}{0}\binom{21}{7} + (-1)^1 \binom{8}{1}\binom{13}{7} = \binom{21}{7} - 8\binom{13}{7} = 102552$$

Observe que se você fosse fazer o problema acima para soma igual a 50, teriamos os termos

$$2a) \to \binom{49}{6} - 7\binom{40}{6} + 21\binom{31}{6} - 35\binom{22}{6} + 35\binom{13}{6} = 25662$$

$$2b) \to \binom{49}{7} - 8\binom{41}{7} + 28\binom{33}{7} - 56\binom{25}{7} + 70\binom{17}{7} - 56\binom{9}{7} = 102552$$

Portanto, ao invés de desenvolver o problema original da soma de N, obtemos o valor $V = N_{max} + N_{min}$ e a partir dele obtemos o seu complementar. Como $P(N) = P(V - N)$, resolvemos o problema para $P(V - N)$ (cuja solução é mais simples) e por esta relação achamos a proabilidade de somar N.

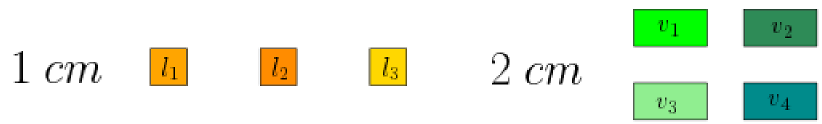
Em 2a) temos que

$$P(50) = P(20) = 25662$$

e em 2b) temos

$$P(50) = P(22) = 102552$$

Questão 3.1)



Tamanho (n)	# de possibilidades	possibilidades
1 cm	3	l_1, l_2, l_3
2 cm	13	$l_1l_1, l_1l_2, l_1l_3, l_2l_1, l_2l_2, l_2l_3\ l_3l_1, l_3l_2, l_3l_3, v_1v_1, v_2v_2, v_3v_3, v_4v_4.$
... cm	...	...

Analisando a tabela acima e representando cada cor de bandeira como um termo na relação de recorrência, temos que:

$$C_n = 3C_{n-1} + 4C_{n-2}$$

Em que o termo $\kappa \cdot C_{n-t}$ representa κ possibilidades de pegar uma bandeira de t centímetros ($e.g.$ *$2C_{n-1}$: 2 possibilidades de bandeiras com 1 cm*).

Reescrevendo a relação em função de alfa α, temos:

$$\alpha^2 = 3\alpha + 4 \iff \alpha^2 - 3\alpha - 4 = 0 \iff (\alpha - 4)(\alpha + 1) = 0$$

Pegando as raízes 4 e -1, temos a relação de recorrência:

$$C_n = A(4)^n + B(-1)^n$$

Onde $C_1 = 3$ e $C_2 = 13$, logo:

$$\begin{cases} A(4)^1 + B(-1)^1 = 3 \\ A(4)^2 + B(-1)^2 = 13 \end{cases} \iff 20A = 16 \therefore A = \frac{4}{5} \text{ e } B = \frac{1}{5}$$

Substituindo A por 4/5 e B por 1/5, temos:

$$\boxed{C_n = \frac{4^{n+1} + (-1)^n}{5}}$$

Questão 3.2)
A partir da fórmula de recorrência dada no enunciado, vamos reescrevê-la com as variáveis alfa. Lembrando que o número de termos de uma fórmula de recorrência indica o grau da expressão com as variáveis α:

(2 termos iniciais (e.g. $f_n = 2f_{n-1} \equiv \alpha = 2$) $\rightarrow$ equação do 1º grau)

(3 termos iniciais (e.g. $f_n = 2f_{n-1} + f_{n-2} \equiv \alpha^2 = 2\alpha + 1$) $\rightarrow$ equação do 2º grau)

(n+1 termos iniciais $\rightarrow$ equação de nº grau)

Logo, o termo f_n sempre será substituído pela variável de maior grau da equação.
Reescrevendo a fórmula do enunciado, temos que:

$$\alpha^2 - 4\alpha + 4 = 0 \iff (\alpha - 2)^2 = 0$$

Como temos raíz dupla (2,2), reescrevemos a fórmula fechada de b_n como:

$$b_n = A(2)^n + n\,B(2)^n$$

** * * Quando temos raízes duplas, fiquem atentos ao fator n ao reescrever a fórmula fechada.*

Como $b_1 = b_2 = 1$, temos que:

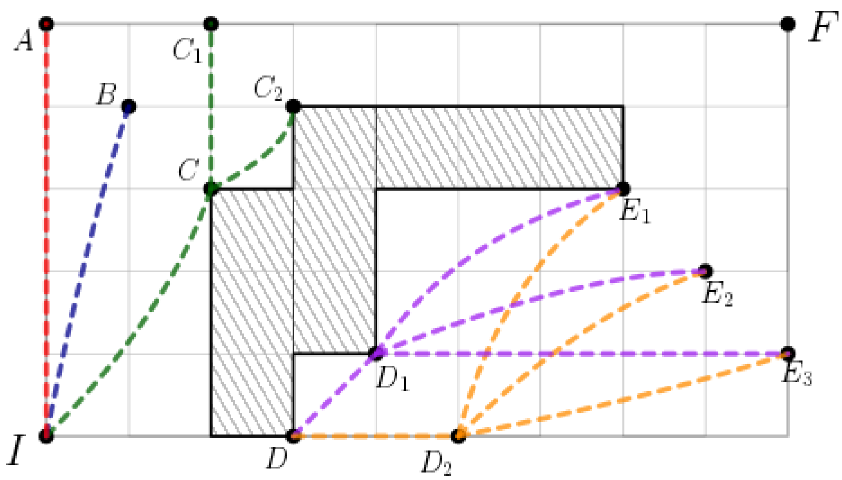
$$\begin{cases} 2A + 2B = 1 \\ 4A + 8B = 1 \end{cases} \iff B = -\frac{1}{4} \text{ e } A = \frac{3}{4}$$

Logo,

$$b_n = \frac{3}{4} \cdot 2^n + n\left(-\frac{1}{4}\right)2^n \iff b_n = \frac{2^n(3-n)}{4}$$

Questão 4

Escrevendo os possíveis caminhos superiores e inferiores, obtemos:



Calculando as possibilidades através da fórmula $\binom{\#C+\#D}{\#D}$, onde #C é o número de passos para cima e #D é o número de passos para a direita.

$$IAF: \binom{5+0}{0}\binom{0+9}{9} = 1$$

$$IBF: \binom{4+1}{1}\binom{1+8}{8} = 45$$

$$ICC_1F: \binom{3+2}{2}\binom{2+0}{0}\binom{0+7}{7} = 10$$

$$ICC_2F: \binom{3+2}{2}\binom{1+1}{1}\binom{1+6}{6} = 140$$

Logo, temos 196 caminhos superiores possiveis.

$$IDD_1E_1F: \binom{0+3}{3}\binom{1+1}{1}\binom{2+3}{3}\binom{2+2}{2} = 120$$

$$IDD_1E_2F: \binom{0+3}{3}\binom{1+1}{1}\binom{1+4}{4}\binom{3+1}{1} = 40$$

$$IDD_1E_3F: \binom{0+3}{3}\binom{1+1}{1}\binom{0+5}{5}\binom{4+0}{0} = 2$$

$$IDD_2E_1F: \binom{0+3}{3}\binom{0+2}{2}\binom{3+2}{2}\binom{2+2}{2} = 60$$

$$IDD_2E_2F: \binom{0+3}{3}\binom{0+2}{2}\binom{2+3}{3}\binom{3+1}{1} = 40$$

$$IDD_2E_2F: \binom{0+3}{3}\binom{0+2}{2}\binom{1+4}{4}\binom{4+0}{0} = 5$$

Logo, temos 267 caminhos inferiores possiveis.