Modelagem simultânea da média e da dispersão (MLG's duplos)

Prof. Caio Azevedo

Modelo linear generalizado duplo

- Um MLG duplo (na sua forma mais simples) é dado por:

$$
\begin{aligned}
Y_i \overset{ind.}{\sim} FE(\theta_i, \phi_i) \quad &, \quad \theta_i = h(\mu_i), i = 1, ..., n, \\
g(\mu_i) \quad &= \quad \eta_i = \boldsymbol{X}_i' \boldsymbol{\beta} = \sum_{j=1}^{p} X_{ji}\beta_j; \boldsymbol{X}_i = (X_{1i}, ..., X_{pi})', \\
h(\phi_i) \quad &= \quad \lambda_i = \boldsymbol{Z}_i' \boldsymbol{\gamma} = \sum_{j=1}^{q} Z_{ji}\gamma_j; \boldsymbol{Z}_i = (Z_{1i}, ..., X_{qi})',
\end{aligned}
$$

em que $\boldsymbol{\beta} \in \mathcal{R}^p, \boldsymbol{\gamma} \in \mathcal{R}^q$, $g(.)$ e $h(.)$ são chamadas de função de ligação e η_i, λ_i são preditores lineares (relacionados ao indivíduo i). Eventualmente, $\boldsymbol{X}_i$ e $\boldsymbol{Z}_i$ podem ser iguais, ou ter elementos em comum (i=1,2,..,n).

Cont.

- Note que se $Y_i \sim \text{FE}(\theta_i, \phi_i)$, $i = 1, 2, ..., n$, então:

$$f_{Y_i}(y_i; \theta_i, \phi_i) = exp\left\{\phi_i\left[y_i\theta_i - b(\theta_i)\right] + c(y_i, \phi_i)\right\} \mathbb{1}_A(y_i),$$

em que, com as devidas adaptações, as funções da fdp acima são como descritas aqui.

- Das distribuições (pertencentes à família exponencial) vistas no curso, faz sentido considerar essa estrutura somente para a normal, gama e normal inversa. Nesse caso, temos que (exercício):

$$c(y_i; \phi_i) = d(\phi_i) + \phi_i a(y_i) + u(y_i).$$

Cont.

- Algumas propriedades (exercícios). Defina

$$T_i = Y_i\theta_i - b(\theta_i) + a(Y_i),$$

então

- $\mathcal{E}(T_i) = -\dfrac{d}{d\phi_i} d(\phi)$.
- $\mathcal{V}(T_i) = -\dfrac{d^2}{d\phi_i^2} d(\phi)$.

Estimação

- (Cont.) em que $d(.)$, $a(.)$ e $u(.)$ são funções duplamente diferenciáveis que dependem da distribuição escolhida (exercício).
- Verossimilhança (defina $\boldsymbol{\vartheta} = (\boldsymbol{\beta}', \boldsymbol{\gamma}')$), assim, temos que:

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{\vartheta}) &= \exp\left\{\sum_{i=1}^{n} \{\phi_i \left[y_i\theta_i - b(\theta_i)\right] + d(\phi_i) + \phi_i a(y_i) + u(y_i)\}\right\} \\ &= \exp\left\{\sum_{i=1}^{n} \{\phi_i t_i + d(\phi_i) + u(y_i)\}\right\}. \end{aligned}$$

- Log-verossimilhança

$$l(\boldsymbol{\vartheta}) = \sum_{i=1}^{n} \{\phi_i t_i + d(\phi_i) + u(y_i)\}.$$

Estimação

- Temos que obter $S\left(\beta_j\right) = \frac{\partial}{\partial \beta_j} l(\boldsymbol{\vartheta})$, $j = 1, 2, ..., p$ e $S\left(\gamma_r\right) = \frac{\partial}{\partial \gamma_r} l(\boldsymbol{\vartheta})$, $r = 1, 2, ..., q$ e resolver o que seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} \boldsymbol{S}\left(\widetilde{\boldsymbol{\beta}}\right) = \mathbf{0}_{(p \times 1))} \\ \boldsymbol{S}\left(\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}\right) = \mathbf{0}_{(q \times 1))} \end{cases},$$

em que $\boldsymbol{S}\left(\widetilde{\boldsymbol{\beta}}\right) = \left(S\left(\beta_1\right), ..., S\left(\beta_p\right)\right)'$ e $\boldsymbol{S}\left(\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}\right) = \left(S\left(\gamma_1\right), ..., S\left(\gamma_q\right)\right)'$.

- Como o sistema acima não tem solução analítica, podemos usar algum algoritmo, com o Escore de Fisher, para obter as emv.

Estimação

- Adicionalmente, pode-se provar que $\boldsymbol{S}(\vartheta) = (\boldsymbol{S}(\beta), \boldsymbol{S}(\gamma))'$:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{S}(\beta) &= \boldsymbol{X}'\Phi\boldsymbol{W}^{1/2}\boldsymbol{V}^{-1/2}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{\mu}), \\
\boldsymbol{S}(\gamma) &= \boldsymbol{Z}'\boldsymbol{H}_{\gamma}^{-1}(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{\mu_t}),
\end{aligned}
$$

em que $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{X}_1, ..., \boldsymbol{X}_n)'$, $\boldsymbol{W} = \text{diag}(\omega_1, ..., \omega_n)$, $\omega_i = (d\mu_i/d\eta_i)^2/V_i$, $\boldsymbol{\Phi} = \text{diag}(\phi_1, ..., \phi_n)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, ..., y_n)'$, $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, ..., \mu_n)'$, $\boldsymbol{H}_{\gamma} = \text{diag}(h'(\phi_1), ..., h'(\phi_n))$, $\boldsymbol{t} = (t_1, .., t_n)'$, $\boldsymbol{\mu_t} = (\mathcal{E}(T_1), .., \mathcal{E}(T_n))' = (-d'(\phi_1), ..., -d'(\phi_n))$.

Estimação

- Com relação à informação de Fisher, temos que:

$$\boldsymbol{I}\left(\vartheta\right)\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}(\beta,\beta) & \boldsymbol{I}(\beta,\gamma)=\mathbf{0}_{(p\times q)} \\ \boldsymbol{I}(\gamma,\beta)=\mathbf{0}_{(q\times p)} & \boldsymbol{I}(\gamma,\gamma) \end{bmatrix},$$

em que

$$\boldsymbol{I}\left(\beta,\beta\right)=\boldsymbol{X}'\Phi\boldsymbol{W}\boldsymbol{X};\boldsymbol{I}(\gamma,\gamma)=\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{P}\boldsymbol{Z},$$

e $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{V}_{\gamma}\boldsymbol{H}_{\gamma}^{-2}$, $\boldsymbol{V}_{\gamma}=\text{diag}=\left(-d''\left(\phi_1\right),...,-d''\left(\phi_n\right)\right)$.

Estimação

- Similarmente aos MLG's (usuais) pode-se desenvolver um processo iterativo escore de Fisher para encontrar as estimativas de máxima verossimilhança $(\widetilde{\beta}', \widetilde{\gamma}')'$, ou seja:

$$
\begin{aligned}
\beta^{(m+1)} &= \left(\boldsymbol{X}'\Phi^{(m)}\boldsymbol{W}^{(m)}\boldsymbol{X}\right)^{-1}\boldsymbol{X}'\Phi^{(m)}\boldsymbol{W}^{(m)}\boldsymbol{y}^{*(m)}, \\
\gamma^{(m)} &= \left(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{P}^{(m)}\boldsymbol{X}\right)^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{P}^{(m)}\boldsymbol{z}^{*(m)},
\end{aligned}
$$

$m = 0, 1, 2...$ (até que algum critério de convergência seja alcançado), em que $\boldsymbol{y}^* = \boldsymbol{X}\beta + \boldsymbol{W}^{-1/2}\boldsymbol{V}^{-1/2}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\mu})$, $\boldsymbol{z}^* = \boldsymbol{Z}\gamma + \boldsymbol{V}_{\gamma}^{-1}\boldsymbol{H}_{\gamma}(\boldsymbol{t} - \boldsymbol{\mu_t})$.

Estimação

- Sob certas condições de regularidade (veja Seção 1.6.3 de Paula (2024)) temos, para n suficientemente grande, que:

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} \approx N_p\left(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{I}^{-1}(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})\right), \widehat{\boldsymbol{\gamma}} \approx N_q\left(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{I}^{-1}(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\gamma})\right), \widehat{\boldsymbol{\beta}} \perp \widehat{\boldsymbol{\gamma}}$$

- Testes de hipótese, com as devidas adaptações, podem ser implementados com visto aqui.
- Seleção e comparação de modelos, com as devidas adaptações, podem ser implementadas como visto aqui.

Análise residual e desvio

- Na classe dos MLGs duplos pode-se definir desvios para tanto para a média e para a precisão.
- O desvio para a média assume a mesma expressão da classe dos MLGs em que somente a média é ajustada (aqui), com ϕ_i no lugar de ϕ, ou seja

$$D_1^*\left(\boldsymbol{y};\widehat{\boldsymbol{\mu}},\boldsymbol{\phi}\right)=\sum_{i=1}^{n}d_1^*\left(y_i;\widehat{\mu}_i,\phi_i\right), \tag{1}$$

em que $d_1^*\left(y_i;\widehat{\mu}_i,\phi_i\right)=2\phi_i\left[y_i\left(\widehat{\theta}_i^{(0)}-\widehat{\theta}_i\right)+\left(b\left(\widehat{\theta}_i\right)-b\left(\widehat{\theta}_i^{(0)}\right)\right)\right]$.

Análise residual e desvio

- Para ϕ_i grande $\forall i$ o desvio (Equação (1)) pode ser comparado com os quantis da distribuição qui-quadrado com $(n-p)$ graus de liberdade.

- O resíduo componente do desvio para a média fica dado como

$$T_{D_{1i}} = \text{sinal}(Y_i - \widehat{\mu}_i)\sqrt{\frac{d_1^*\left(Y_i; \widehat{\mu}_i, \widehat{\phi}_i\right)}{1 - \widehat{h}_{ii}}},$$

em que $\widehat{h}_{ii} = \widehat{\phi}_i \widehat{\omega}_i \boldsymbol{X}_i' \left(\boldsymbol{X}' \widehat{\boldsymbol{\Phi}} \widehat{\boldsymbol{W}} \boldsymbol{X}\right)^{-1} \boldsymbol{X}_i$, $i = 1, 2..., n$.

Análise residual e desvio

- Sob o bom ajuste do modelo e, sob certas condições, espera-se que

$$T_{D_i} \xrightarrow[n \to \infty]{D} N(0,1).$$

- Pode-se fazer, essencialmente, os mesmos gráficos considerados para o caso do RCD para o MLG usual (aqui).

Análise residual e desvio

- Por outro lado, o desvio para a precisão é dado por

$$D_2^*\left(\boldsymbol{y};\boldsymbol{\mu},\widehat{\boldsymbol{\phi}}\right)=\sum_{i=1}^{n}d_1^*\left(y_i;\mu_i,\widehat{\phi}_i\right), \qquad (2)$$

em que $d_2^*\left(y_i;\mu_i,\widehat{\phi}_i\right)=2\left[t_i\left(\widehat{\phi}_i^{(0)}-\widehat{\phi}_i\right)+\left(d\left(\widehat{\phi}_i\right)-d\left(\widehat{\phi}_i^{(0)}\right)\right)\right]$ e $\widehat{\phi}_i^{(0)}$ é o estimador para ϕ sob o modelo saturado.

- Aqui também, para ϕ_i grande $\forall i$ o desvio (Equação (2)) pode ser comparado com os quantis da distribuição qui-quadrado com $(n-q)$ graus de liberdade.

Análise residual e desvio

- O resíduo componente do desvio para a precisão fica dado como

$$T_{D_{2i}} = \text{sinal}(\widehat{T}_i + d''\widehat{\phi}_i)\sqrt{\frac{d_2^*\left(Y_i;\widehat{\mu}_i,\widehat{\phi}_i\right)}{1-\widehat{r}_{ii}}},$$

em que $\widehat{r}_{ii} = \widehat{p}_i \boldsymbol{Z}_i'\left(\boldsymbol{Z}'\widehat{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{Z}\right)^{-1}\boldsymbol{Z}_i$, $\widehat{p}_i = -d''\left(\widehat{\phi}_i\right)\left\{h'\left(\widehat{\phi}_i\right)\right\}^{-2}$ $i = 1, 2..., n$.

Análise residual e desvio

- Sob o bom ajuste do modelo e, sob certas condições, espera-se que

$$T_{D_2} \xrightarrow[n \to \infty]{D} N(0,1).$$

- Pode-se fazer, essencialmente, os mesmos gráficos considerados para o caso do RCD para o MLG usual (aqui).

Análise de influência

- Para avaliar a sensibilidade das estimativas dos parâmetros que modelam a média pode-se usar a medida vista aqui com $\widehat{\phi}_i$ no lugar de $\widehat{\phi}$, ou seja:

$$LD_i^{\boldsymbol{\beta}} = \left\{ \frac{\widehat{h}_{ii}}{1 - \widehat{h}_{ii}} \right\} T_{S_i}^2,$$

em que $T_{S_i}^2 = \dfrac{\sqrt{\widehat{\phi}_i}\,(Y_i - \widehat{\mu}_i)}{\sqrt{\widehat{V}_i \left(1 - \widehat{h}_{ii}\right)}}$.

- Pode-se considerar um gráfico índice $\times$ $LD_i^{\boldsymbol{\beta}}$.

Análise de influência

- Por outro lado, para avaliar a sensibilidade das estimativas dos parâmetros que modelam a precisão pode-se usar

$$LD_i^{\gamma} = \left\{ \frac{\widehat{r}_{ii}}{1 - \widehat{r}_{ii}} \right\} T_{T_i}^2,$$

em que $T_{T_i}^2 = \dfrac{\sqrt{\widehat{\phi}_i}\left(T_i + d'\left(\widehat{\phi}_i\right)\right)}{\sqrt{-d''\left(\widehat{\phi}_i\right)(1 - \widehat{r}_{ii})}}$.

- Pode-se considerar um gráfico índice $\times$ LD_i^{γ}.
- Em ambos os casos, assim como no caso dos MLGs usuais, não há um ponto de corte. A ideia e avaliar as observações com valores de $LD^{(\cdot)}$ que se destacam em relação as demais.

Análise no R

- No R, com uma sintaxe bem parecida com a da função *glm*, podemos usar a função *dglm* do pacote *dglm*. Com efeito

```
dglm(Y~X1 + X2 + ... + Xp,
~Z1 + Z2 + ... + Zq,family=Gamma(link="log"),
dlink = "log")


(sem intercepto)
dglm(Y~-1+X1 + X2 + ... + Xp,
~-1+ Z1 + Z2 + ... + Zq,family=Gamma(link="log"),
dlink = "log")
```

Análise no R

- No gamlss

```
gamlss(Y~X1 + X2 + ... + Xp,
sigma.formula~Z1 + Z2 + ... + Zq,
family=GA(mu.link="log",sigma.link ="log"))


(sem intercepto)
gamlss(Y~-1+X1 + X2 + ... + Xp,
sigma.formula~-1+Z1 + Z2 + ... + Zq,
family=GA(mu.link="log",sigma.link ="log"))
```

Análise no R

- Observação, tanto no pacote *dglm* quanto no *gamlss* modela-se ϕ^{-1} (dispersão), ao invés de ϕ (precisão).
- Nos desenvolvimentos apresentados se, por exemplo, $h \equiv \ln(.)$, então

$$
\begin{aligned}
\ln(\phi) &= \sum_{j=1}^{q} Z_{ij}\gamma_j, \\
\ln(\phi^{-1}) &= -\ln(\phi) \rightarrow \ln(\phi) = \sum_{j=1}^{q} Z_{ij}\left(-\gamma_j\right).
\end{aligned}
$$

- Para mais detalhes veja (aqui), (aqui) e (aqui).

Exemplo 13: diferentes de um novo tipo de snack

- Os dados aqui considerados são parte de um experimento desenvolvido no Departamento de Nutrição da Faculdade de Saúde Pública da USP em que 5 (cinco) formas diferentes de um novo tipo de snack ("lanche"), com baixo teor de gordura saturada e de ácidos graxos, foram comparados ao longo de 20 semanas.
- Neste novo produto a gordura vegetal hidrogenada, responsável pela fixação do aroma do produto, foi substituída, total ou parcialmente, por óleo de canola.

Exemplo 13: diferentes de um novo tipo de snack

- As formas são as seguintes: A (22% de gordura, 0% de óleo de canola), B (0% de gordura, 22% de óleo de canola), C (17% de gordura, 5% de óleo de canola), D (11% de gordura, 11% de óleo de canola) e E (5% de gordura, 17% de óleo de canola).
- O experimento foi conduzido de modo que nas semanas pares, 15 embalagens de cada um dos produtos A, B, C, D e E fossem analisadas em laboratório e observadas diversas variáveis.

Exemplo 13: diferentes de um novo tipo de snack

- Em particular, temos o interesse de estudar o comportamento da textura dos produtos através da força necessária para o cisalhamento (resposta).
- As variáveis explicativas são: 1) formas do snack (qualitativa nominal), 2) semana na qual ocorreu a medição (quantitativa)
- Os dados referentes a esta variável estão disponíveis no arquivo *snack.txt*.
- Veja também Paula (2024).

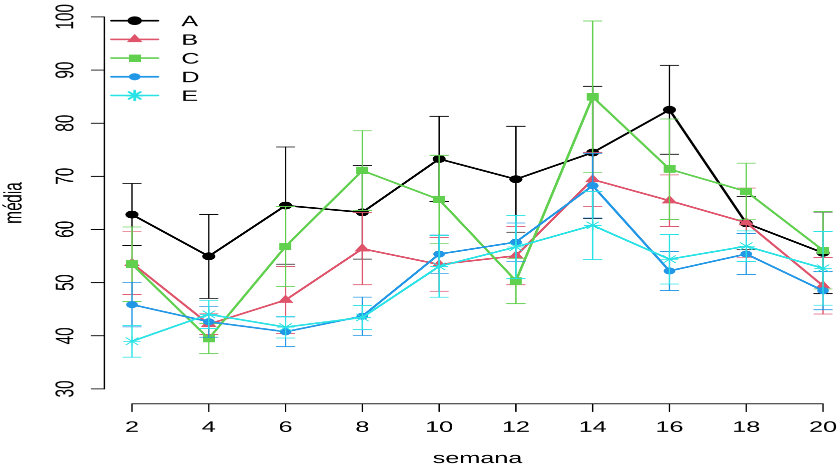
Medidas resumo por formas de snack

snack	média	dp	var.	cv (%)	ca	curt	min	max
A	66,20	18,71	349,97	28,26	0,21	2,68	29,02	118,83
B	55,29	13,14	172,73	23,77	0,37	2,44	30,29	87,08
C	61,63	19,60	384,21	31,80	0,94	3,95	30,06	132,62
D	51,03	10,96	120,13	21,48	0,81	4,33	29,48	95,95
E	50,26	11,40	130,00	22,69	0,92	3,94	26,69	91,17

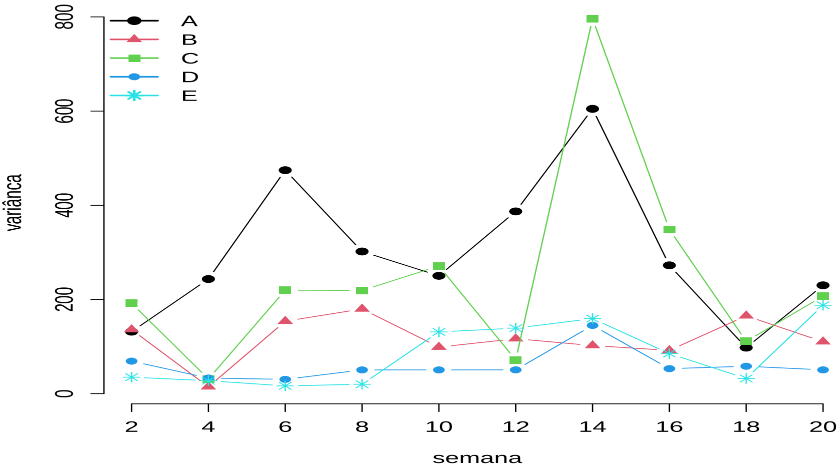
Medidas resumo pelas semanas

semana	média	dp	var.	cv (%)	ca	curt	min	max
2	50,95	13,12	172,22	25,76	0,65	2,90	26,69	86,32
4	44,66	9,76	95,22	21,85	1,86	7,06	32,73	82,19
6	50,08	15,97	255,00	31,88	1,42	4,51	29,48	101,15
8	55,57	16,28	265,06	29,30	0,71	2,91	30,06	104,70
10	60,15	14,72	216,65	24,47	1,01	4,02	32,89	104,24
12	57,84	13,61	185,26	23,53	0,74	3,64	30,91	99,90
14	71,57	20,17	406,76	28,18	0,52	3,56	29,02	132,62
16	65,18	16,95	287,36	26,01	1,09	3,78	40,31	120,20
18	60,37	10,25	105,03	16,97	0,80	3,16	42,80	87,84
20	52,46	12,58	158,37	23,99	0,70	3,32	30,09	91,17

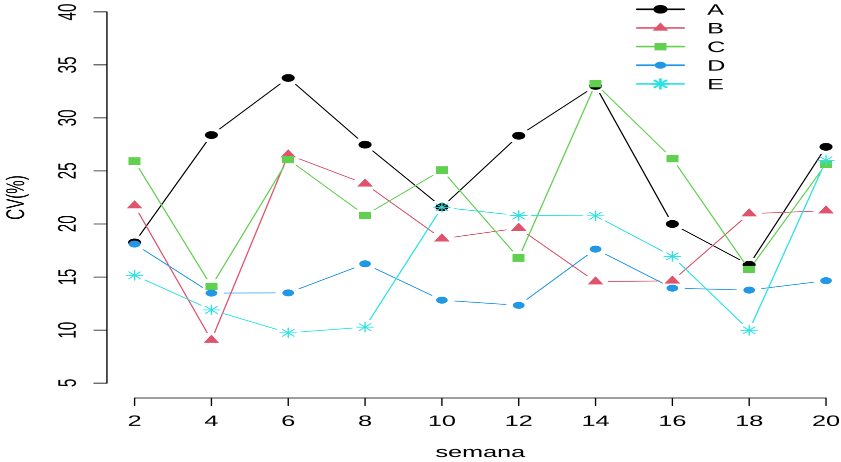
Gráficos de perfis médios (amostrais)



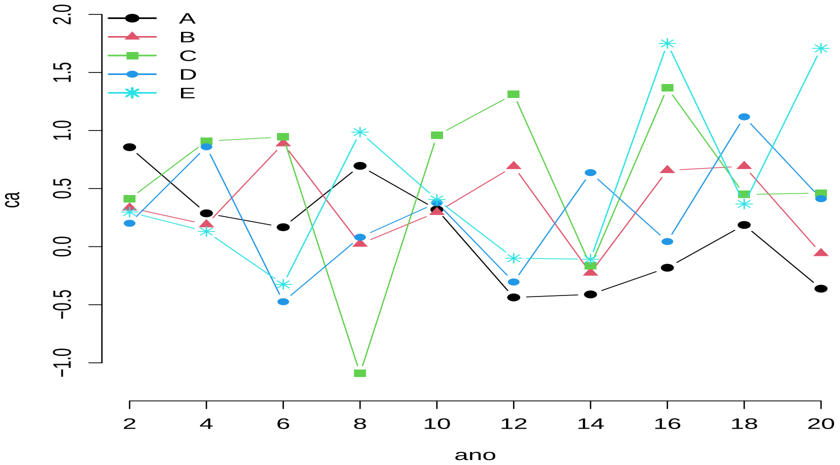
Variâncias amostrais



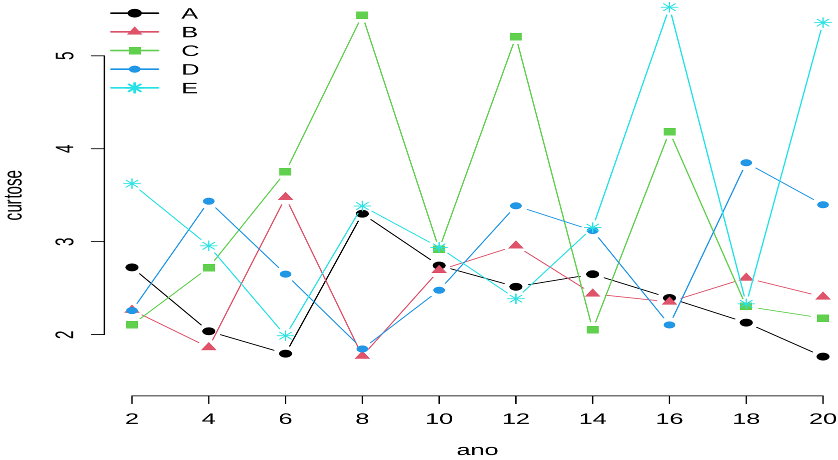
Coeficientes de variação amostrais



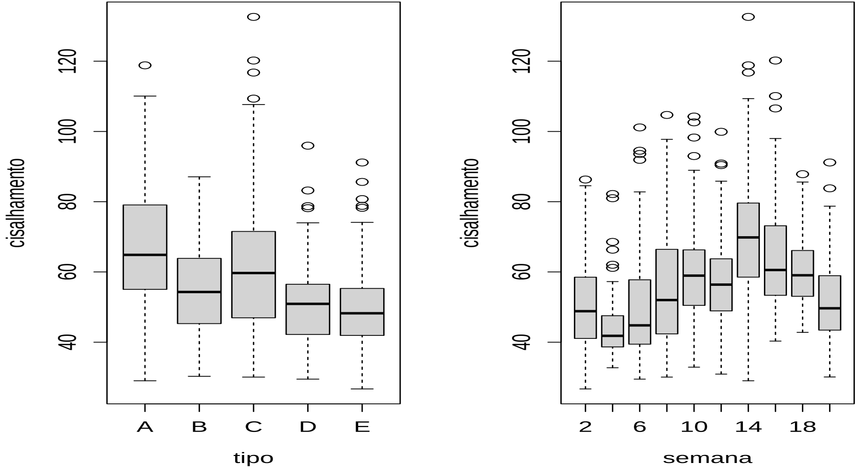
Coeficientes de assimetria amostrais



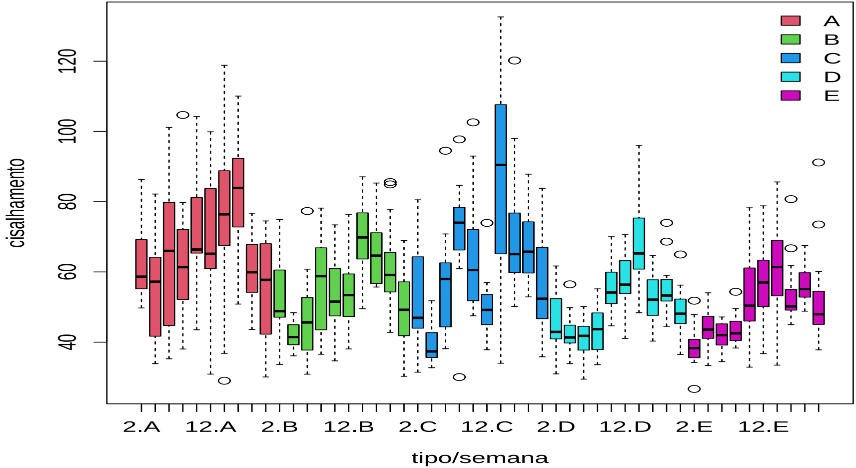
Coeficientes de curtose amostrais



Box plots por snack e semana



Box plots por snack × semana



Modelagem

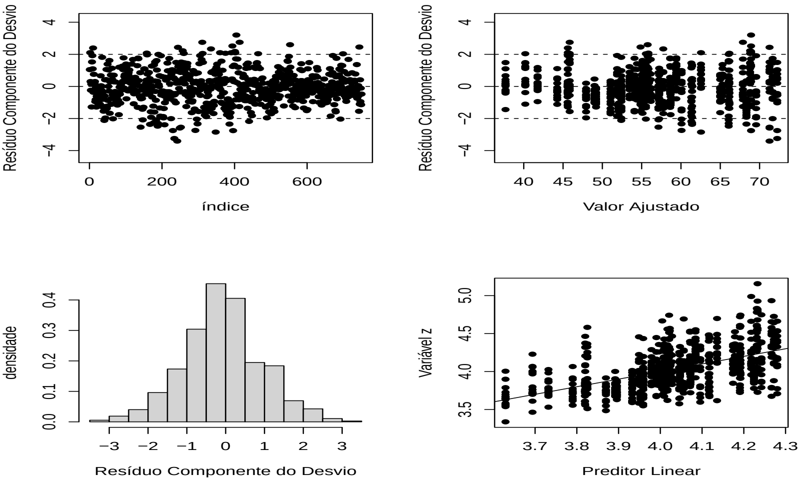
- Modelo 1

$$
\begin{aligned}
Y_{ijk} &\overset{ind.}{\sim} \text{gama}(\mu_{ijk}, \phi) \\
\ln \mu_{ijk} &= \alpha + \beta_i + (\gamma + \gamma_i)\, x_{ijk} + (\delta + \delta_i)\, x_{ijk}^2 \\
\beta_1 &= \gamma_1 = \delta_1 = 0 \\
i &= 1(A), 2(B), 3(C), 4(D), 5(E)(\text{snack}), \\
j &= 1(2), 2(4), 3(6), 4(8), 5(10), 6(12), 7(14), 8(16), 9(18), \\
&\quad 10(20)(\text{semana}) \\
k &= 1, 2, ..., 15
\end{aligned}
$$

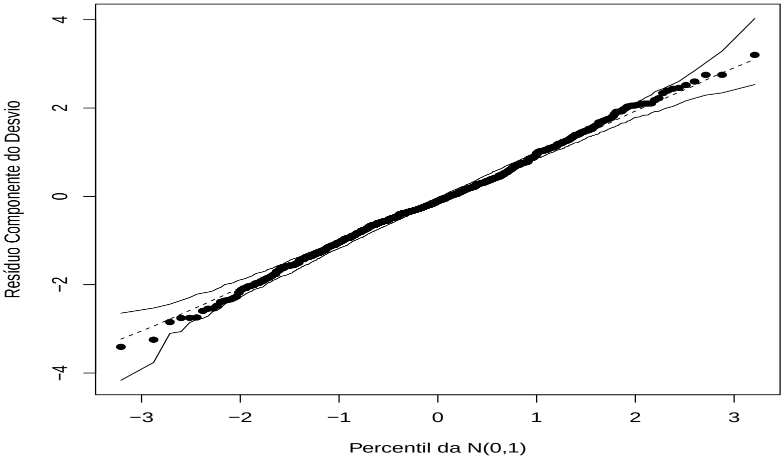
Modelagem

- Y_{ijk}: força de cisalhamento relativa à unidade experimental (UE) k, do tipo de snack i, no índice da semana j.
- $x_{ijk} = x^*_{ijk} - 2$: em que x^*_{ijk} é a semana (2,4,....,20) relativa à unidade experimental (UE) k, do tipo de snack i, no índice da semana j.
- Exercício: obter interpretações para os parâmetros e/ou funções deles.

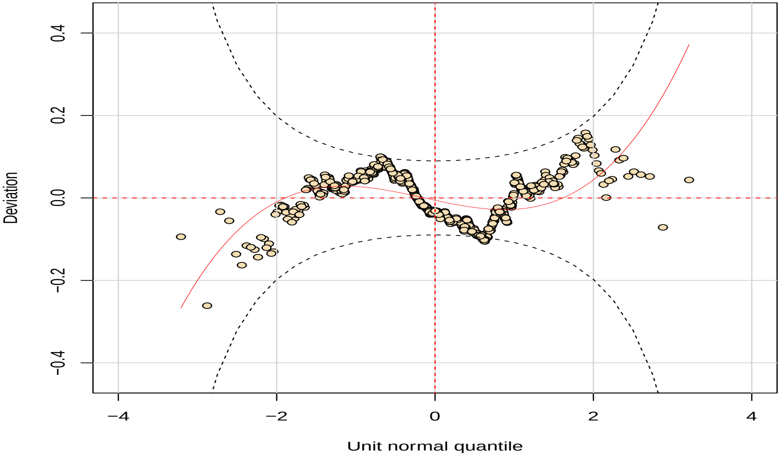
Gráficos de diagnóstico: modelo 1



Envelope para os resíduos: modelo 1



Worm plot para os resíduos: modelo 1



Comentários

- O modelo não se ajustou bem (heterocedastididade do RCD e uma certa tendência no RQ), apesar do desvio indicar um bom ajuste (p = 0,2820) e o TSW indicar normalidade do RCD (p=0,0976), assim como o gráfico de envelopes.
- Resultados para ϕ: 18,74(0,96) [16,86; 20,62].
- Esses resultados indicam que um modelo (gama) com dispersão (precisão) variável, possa ser apropriado (melhor do que o modelo de precisão não variável).
- As estimativas indicam que os efeitos quadráticos não são significativos.

Estimativas

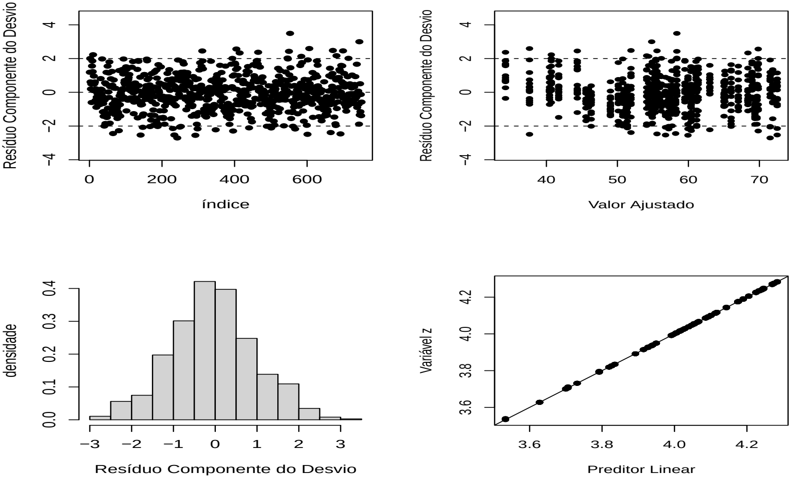
Par.	Est.	EP	IC(95%)	Estat. Z_t	p-valor
α	4,023	0,047	[3,931 ; 4,115]	85,786	$<$ 0,0001
β_2	-0,203	0,066	[-0,333 ; -0,073]	-3,057	0,0022
β_3	-0,198	0,066	[-0,328 ; -0,068]	-2,979	0,0029
β_4	-0,329	0,066	[-0,459 ; -0,199]	-4,961	$<$ 0,0001
β_5	-0,394	0,066	[-0,524 ; -0,264]	-5,936	$<$ 0,0001
γ	0,053	0,012	[0,029 ; 0,077]	4,354	$<$ 0,0001
δ	-0,003	0,001	[-0,004 ; -0,001]	-4,176	$<$ 0,0001
γ_2	-0,012	0,017	[-0,045 ; 0,022]	-0,685	0,4931
γ_3	0,017	0,017	[-0,017 ; 0,050]	0,977	0,3284
γ_4	$<$-0,001	0,017	[-0,034 ; 0,033]	-0,028	0,9773
γ_5	0,002	0,017	[-0,031 ; 0,036]	0,141	0,8879
δ_2	0,001	0,001	[-0,001 ; 0,003]	1,225	0,2205
δ_3	$<$ - 0,001	0,001	[-0,002 ; 0,002]	-0,281	0,7783
δ_4	0,001	0,001	[-0,001 ; 0,002]	0,678	0,4980
δ_5	0,001	0,001	[-0,001 ; 0,003]	0,872	0,3832

Modelagem

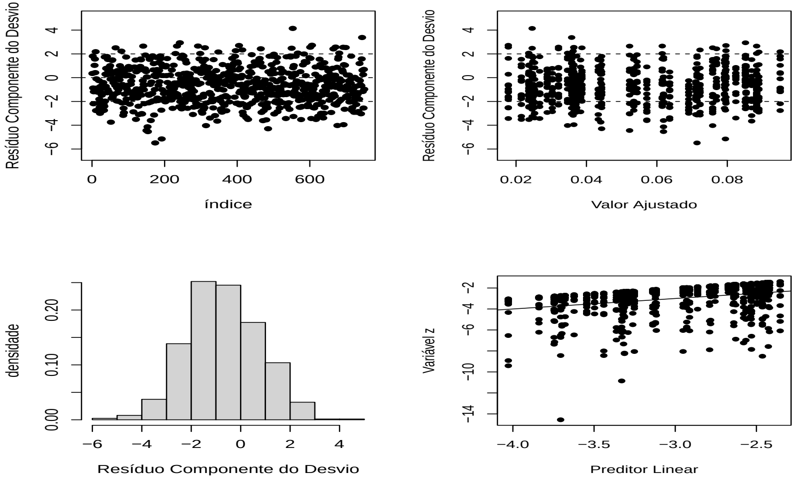
- Modelo 2

$$
\begin{aligned}
Y_{ijk} &\overset{ind.}{\sim} \text{gama}(\mu_{ijk}, \phi_{ijk}^{-1}) \\
\ln \mu_{ijk} &= \alpha^{(\mu)} + \beta_i^{(\mu)} + \left(\gamma^{(\mu)} + \gamma_i^{(\mu)}\right) x_{ijk} + \left(\delta^{(\mu)} + \delta_i^{(\mu)}\right) x_{ijk}^2 \\
\ln \phi_{ijk} &= \alpha^{(\phi)} + \beta_i^{(\phi)} + \left(\gamma^{(\phi)} + \gamma_i^{(\phi)}\right) x_{ijk} + \left(\delta^{(\phi)} + \delta_i^{(\phi)}\right) x_{ijk}^2 \\
\beta_1^{(\mu)} &= \gamma_1^{(\mu)} = \delta_1^{(\mu)} = \beta_1^{(\phi)} = \gamma_1^{(\phi)} = \delta_1^{(\phi)} = 0 \\
i &= 1(A), 2(B), 3(C), 4(D), 5(E)(\text{snack}), \\
j &= 1(2), 2(4), 3(6), 4(8), 5(10), 6(12), 7(14), 8(16), 9(18), \\
&\quad 10(20)(\text{semana}) \\
k &= 1, 2, ..., 15
\end{aligned}
$$

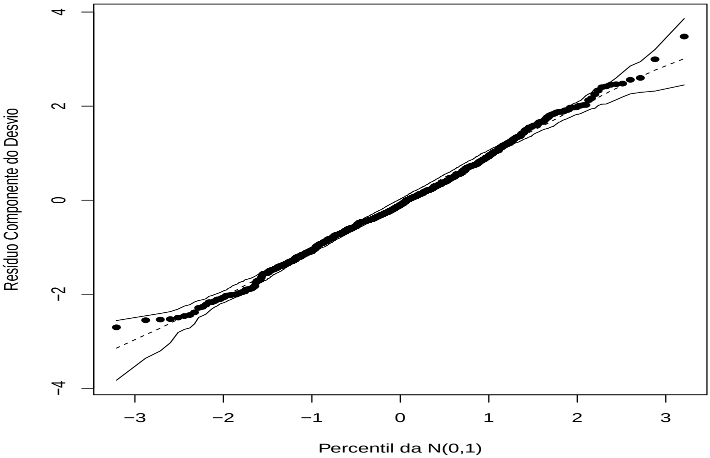
Gráficos de diagnóstico (média): modelo 2



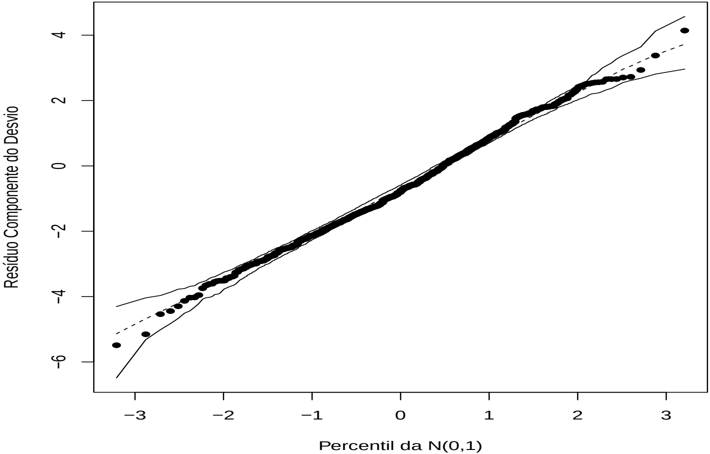
Gráficos de diagnóstico (dispersão): modelo 2



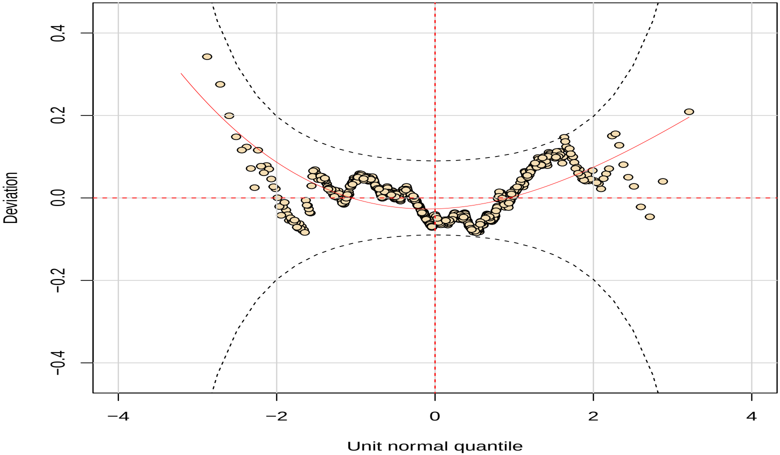
Envelope para os resíduos (média): modelo 2



Envelope para os resíduos (precisão): modelo 2



Worm plot para os resíduos: modelo 2



Estimativas (μ)

Par.	Est.	EP	IC(95%)	Estat. Z_t	p-valor
α	4,015	0,052	[3,912;4,117]	76,710	$<$ 0,0001
β_2	-0,309	0,089	[-0,483;-0,134]	-3,466	0,0006
β_3	-0,223	0,086	[-0,391;-0,055]	-2,599	0,0095
β_4	-0,481	0,090	[-0,657;-0,306]	-5,372	$<$ 0,0001
β_5	-0,387	0,067	[-0,519;-0,256]	-5,779	$<$ 0,0001
γ	0,055	0,013	[0,029;0,081]	4,184	$<$ 0,0001
δ	-0,003	0,001	[-0,004;-0,001]	-4,052	0,0001
γ_2	0,011	0,020	[-0,029;0,050]	0,529	0,5969
γ_3	0,024	0,020	[-0,015;0,064]	1,196	0,2322
γ_4	0,036	0,020	[-0,003;0,074]	1,828	0,0679
γ_5	0,001	0,017	[-0,033;0,034]	0,038	0,9694
δ_2	0,000	0,001	[-0,002;0,002]	0,190	0,8497
δ_3	-0,001	0,001	[-0,003;0,001]	-0,614	0,5396
δ_4	-0,001	0,001	[-0,003;0,001]	-1,092	0,2754
δ_5	0,001	0,001	[-0,001;0,003]	0,983	0,3260

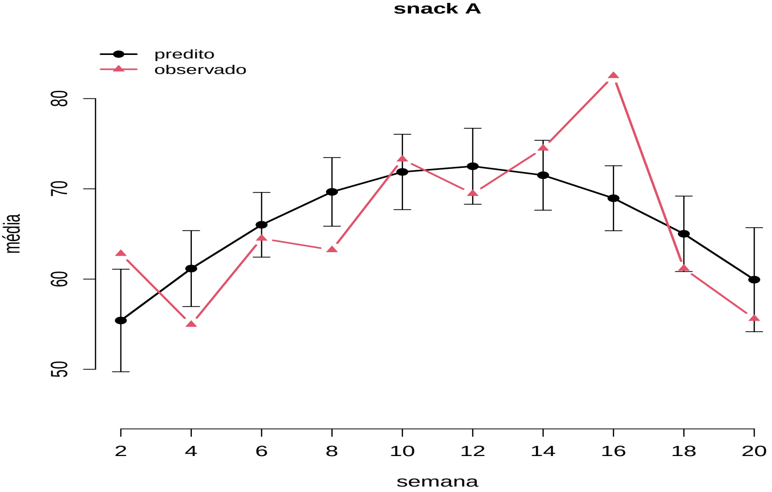
Estimativas (ϕ)

Par.	Est.	EP	IC(95%)	Estat. Z_t	p-valor
α	-2,782	0,284	[-3,339;-2,226]	-9,799	$<$ 0,0001
β_2	0,429	0,401	[-0,357;1,215]	1,069	0,2850
β_3	0,203	0,401	[-0,583;0,990]	0,507	0,6123
β_4	0,218	0,402	[-0,570;1,005]	0,542	0,5880
β_5	-1,246	0,403	[-2,036;-0,456]	-3,090	0,0020
γ	0,080	0,073	[-0,063;0,224]	1,096	0,2730
δ	-0,004	0,004	[-0,012;0,003]	-1,143	0,2529
γ_2	-0,256	0,104	[-0,460;-0,052]	-2,464	0,0137
γ_3	-0,031	0,104	[-0,235;0,172]	-0,302	0,7626
γ_4	-0,240	0,104	[-0,444;-0,036]	-2,306	0,0211
γ_5	0,021	0,104	[-0,183;0,225]	0,200	0,8418
δ_2	0,012	0,006	[0,001;0,023]	2,230	0,0258
δ_3	0,001	0,006	[-0,010;0,012]	0,132	0,8951
δ_4	0,010	0,006	[-0,001;0,021]	1,769	0,0769
δ_5	0,001	0,006	[-0,010;0,012]	0,183	0,8551

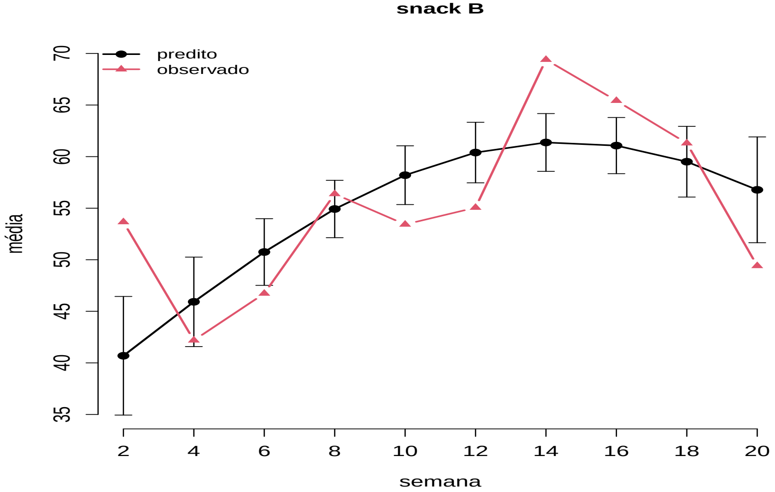
Comentários

- Ajustou-se vários modelos reduzidos (retirando-se parâmetros tanto relativos à μ quanto à ϕ não significativos).
- Em todos os casos o ajuste piorou (tendo, em muitos casos, ficando ruim) em termos de resíduos, predição e critérios de informação.
- Portanto, optou-se por utilizar o modelo (duplo) inicial, que mostrou um ajuste muito bom (resíduos e predição).
- A seguir, comparemos as médias observadas com as preditas pelo modelo em questão. Em geral, as previsões pontuais e intervalares foram muito boas.
- Exercício: fazer uma análise de influência dos pontos destacados.

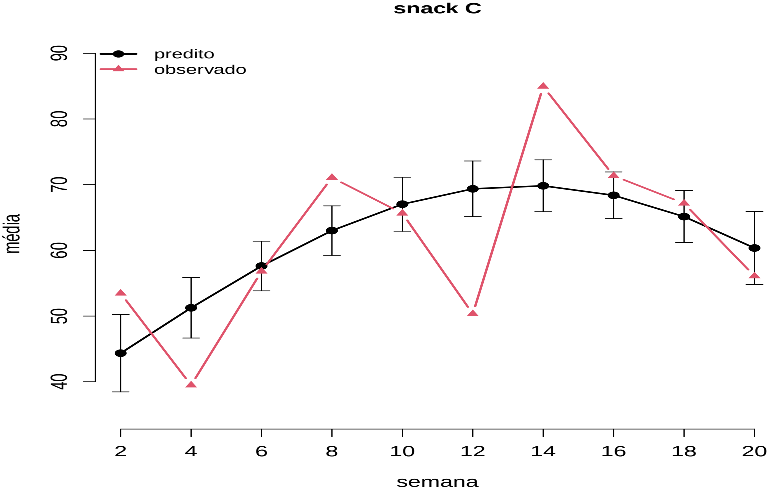
Previsão para as médias



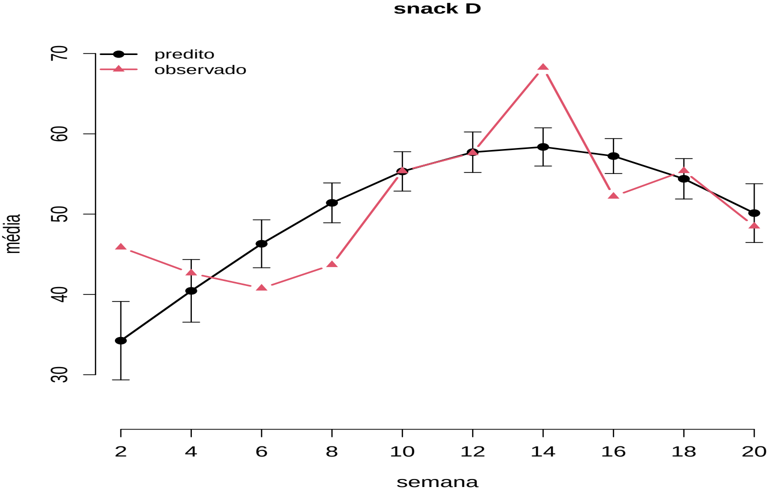
Previsão para as médias



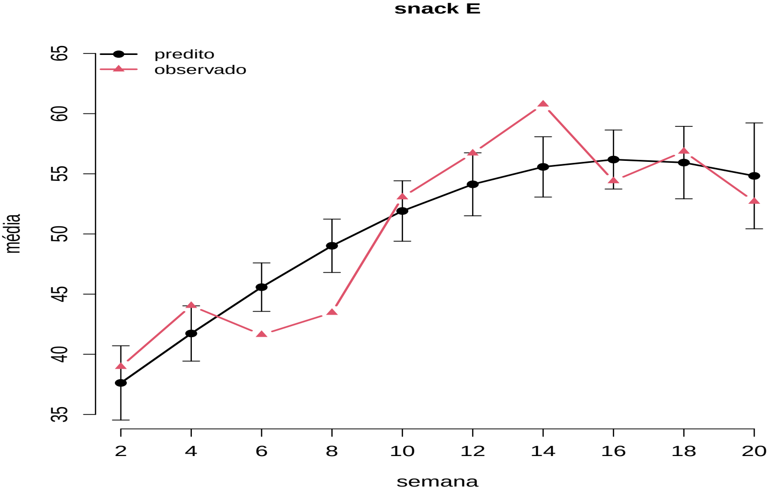
Previsão para as médias



Previsão para as médias



Previsão para as médias



Análise de influência