

Modelos de Quase-Verossimilhança

Prof. Caio Azevedo

Introdução

- Nem sempre é viável (factível) considerarmos um modelo probabilístico (usual) para a parte aleatória de um modelo de regressão (MLG, por exemplo).
- Por exemplo, a relação entre a média e a variância em dados de contagem pode não ser adequadamente modelada por nenhuma distribuição conhecida.
- **Wedderburn (1974)** propôs uma função biparamétrica, denominada função de quase-verossimilhança, que engloba algumas funções de verossimilhança da família exponencial.

Introdução

- Todavia, na maioria das situações não é possível através da função de quase-verossimilhança recuperar a verdadeira distribuição da variável resposta.
- Se Y é a variável aleatória de interesse, o logaritmo da função de quase-verossimilhança é definido por

$$Q(\mu; y) = \frac{1}{\sigma^2} \int_y^\mu \frac{y - t}{V(t)} dt,$$

em que $V(t)$ é uma função positiva e conhecida, $-\infty < y, \mu < \infty$ e $\sigma^2 > 0$ é um parâmetro de dispersão.

Introdução

- Como temos acima uma integral definida, segue que

$$\frac{\partial Q(\mu; y)}{\partial \mu} = \frac{y - t}{\sigma^2 V(t)} \Big|_y^\mu = \frac{y - \mu}{\sigma^2 V(\mu)}$$

- Para desenvolver o processo inferencial, Wedderburn (1974) propôs as seguintes condições de regularidade:

$$1 \quad \mathcal{E} \left\{ \frac{\partial Q(\mu; Y)}{\partial \mu} \right\} = 0.$$

$$2 \quad \mathcal{E} \left\{ \left[\frac{\partial Q(\mu; Y)}{\partial \mu} \right]^2 \right\} = -\mathcal{E} \left\{ \frac{\partial^2 Q(\mu; Y)}{\partial \mu^2} \right\}.$$

$$3 \quad -\mathcal{E} \left\{ \frac{\partial^2 Q(\mu; Y)}{\partial \mu^2} \right\} \leq -\mathcal{E} \left\{ \frac{\partial^2 l(\mu; Y)}{\partial \mu^2} \right\}, \text{ (} l \text{ é a logverossimilhança "equivalente").}$$

Introdução

- As condições (1) e (2) implicam que: $\mathcal{E}(Y) = \mu$ e $\mathcal{V}(Y) = \sigma^2 V(\mu)$, à semelhança dos MLGs. Entretanto, $V(\cdot)$ nem sempre é uma função de variância (como nos MLGs).
- A condição (3) implica que a informação a respeito de μ quando se conhece apenas a relação entre a variância e a média é menor do que a informação a respeito de μ quando se conhece a distribuição da resposta (informação de Fisher).

Introdução

- Assim, a quantidade $\mathcal{E} \left(\frac{\partial^2 (1 - Q)}{\partial \mu^2} \right)$ pode ser interpretada como o ganho quando acrescenta-se ao conhecimento da relação média-variância também o conhecimento da distribuição da resposta.
- Dependendo das especificações de σ^2 e $V(\mu)$ poderemos recuperar a distribuição de Y .

Introdução

- Poisson: Vamos supor $V(t) = t$ e $y \geq 0; t > 0$. Logo, obtemos

$$Q(\mu; y) = \int_y^\mu \frac{y-t}{\sigma^2 t} dt = \frac{1}{\sigma^2} \{y \ln \mu - \mu - y \ln y + y\}.$$

- Se assumirmos $\sigma^2 = 1$ e $y > 0$ temos que $Q(\mu; y)$ é proporcional a logverossimilhança de uma $P(\mu)$.
- Para $y = 0$, temos

$$Q(\mu; y) = \int_y^\mu \frac{-t}{\sigma^2 t} dt = \frac{-\mu}{\sigma^2},$$

que coincide, quando $\sigma^2 = 1$, com $\ln P(Y = 0)$, em que $Y \sim P(\mu)$.

Introdução

- Gama: Vamos supor que $V(t) = t^2$ e $y, t > 0$. Logo, obtemos

$$Q(\mu; y) = \int_y^\mu \frac{y-t}{\sigma^2 t^2} dt = \frac{1}{\sigma^2} \left\{ -\frac{y}{\mu} - \ln \mu + 1 + \ln y \right\},$$

- Nesse caso, temos que $Q(y; \mu)$ é proporcional a logverossimilhança de uma gama($\mu; \phi$), em que $\sigma^2 = \phi^{-1}$.
- Para mais exemplos de discussões veja [Paula \(2024\)](#).

Estimação

- Considere que $Y_i \stackrel{ind.}{\sim} Q(\mu_i; V(\cdot))$, $i = 1, 2, \dots, n$ e que

$$g(\mu_i) = \mathbf{X}_i' \boldsymbol{\beta} = \sum_{j=1}^p X_{ji} \beta_j,$$

(em que essas quantidades são como definidas [aqui](#), para os MLGs usuais).

- A (função de) quase-verossimilhança conjunta é dada por:

$$Q(\boldsymbol{\mu}; \mathbf{y}) = \prod_{i=1}^n Q(\mu_i; y_i).$$

- Os MLGs (usuais) são uma caso particular da estrutura acima.

Estimação

- A estimação de β pode ser feita de forma semelhante ao processo de MV empregados nos MLGs.
- Neste caso, teremos o vetor de funções quase-escore e a matriz de quase-informação.
- Quase-escore $Q(\beta) = Q(\mu(\beta); \mathbf{y})$:

$$\mathbf{S}(\beta) = \frac{\partial Q(\beta)}{\partial \beta} = \frac{1}{\sigma^2} \mathbf{D}' \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}),$$

em que $\mathbf{D} = \frac{\partial \boldsymbol{\mu}}{\partial \beta} = \mathbf{W}^{1/2} \mathbf{V}^{1/2} \mathbf{X}$, $\mathbf{V} = \text{diag}(V_1, \dots, V_n)$,

$\mathbf{W} = \text{diag}(\omega_1, \dots, \omega_n)$, $\omega_i = (d\mu_i/d\eta_i)^2 / V_i$.

Estimação

- A estimativa de quase-verossimilhança (QV,qv) de β é obtida através da solução do seguinte sistema de equações:

$$S(\tilde{\beta}) = \mathbf{0}_{(p \times 1)},$$

que não tem solução explícita. Uma forma de obter as estimativas de qv é utilizar algum algoritmo do tipo de Escore de Fisher.

Estimação

- Quase-informação :

$$I(\beta) = -\mathcal{E} \left\{ \frac{\partial^2 Q(\beta)}{\partial \beta \partial \beta'} \right\} = \frac{1}{\sigma^2} \mathbf{D}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{D},$$

- O algoritmo Escore de Fisher resulta no seguinte processo iterativo:

$$\beta^{(t+1)} = \beta^{(t)} + \left\{ \mathbf{D}^{(t)'} \mathbf{V}^{-1(t)} \mathbf{D}^{(t)} \right\}^{-1} \mathbf{D}^{(t)} \mathbf{V}^{-1(t)} \left(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}^{(t)} \right),$$

$t=0,1,2,\dots$ (até que algum critério de convergência seja obtido).

- Note que o processo iterativo acima não depende de σ^2 . Valores iniciais $\beta^{(0)}$ podem ser obtidos de forma semelhante aos MLGs.

Estimação

- Mostra-se, sob certas condições de regularidade (vide, por exemplo, **McCullagh e Nelder**, 1989, p. 333), que $\hat{\beta}$ é consistente e assintoticamente normal com matriz de variâncias e covariâncias dada por $\text{Cov}(\hat{\beta}) = \sigma^2 (\mathbf{D}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{D})^{-1}$.
- Para estimar σ^2 (necessário para se construir alguns resultados inferenciais para β) pode-se usar um emm (estimador pelo método dos momentos), ou seja:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-p} \sum_{i=1}^n \frac{(Y_i - \hat{\mu}_i)^2}{V(\hat{\mu}_i)}.$$

Inferência

- Utilizando o fato de que $\hat{\sigma}^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \sigma$, sob certas condições de regularidade, temos que

$$\left| \widehat{Cov}(\hat{\beta}) - Cov(\hat{\beta}) \right| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \mathbf{I}_{(p \times p)}, \quad (1)$$

em que $\widehat{Cov}(\hat{\beta}) = \hat{\sigma}^2 (\hat{\mathbf{D}}' \hat{\mathbf{V}}^{-1} \hat{\mathbf{D}})^{-1}$.

Função Quase-desvio

- É possível definir uma função tipo desvio para os modelos de quase-verossimilhança de forma similar aos **MLGs**.
- Sejam $Q(\mathbf{y}; \mathbf{y})$ e $Q(\hat{\boldsymbol{\mu}}; \mathbf{y})$, respectivamente, as funções de quase-verossimilhança do modelo saturado e do modelo sob investigação.
- A função quase-desvio não escalonada é definida por

$$\begin{aligned} D(\mathbf{y}; \hat{\boldsymbol{\mu}}) &= 2\sigma^2 [Q(\mathbf{y}; \mathbf{y}) - Q(\hat{\boldsymbol{\mu}}; \mathbf{y})] = -2\sigma^2 Q(\hat{\boldsymbol{\mu}}; \mathbf{y}) \\ &= -2\sigma^2 \sum_{i=1}^n Q(\hat{\mu}_i; y_i) = 2 \sum_{i=1}^n \int_{\hat{\mu}_i}^{y_i} \frac{y_i - t}{V(t)} dt, \end{aligned}$$

que não depende de σ^2 .

Função Quase-desvio

- Apesar de ser natural que se compare a função quase-desvio escalonada $D^*(\mathbf{y}; \hat{\boldsymbol{\mu}}) = \sigma^{-2}D(\mathbf{y}; \hat{\boldsymbol{\mu}})$ com os percentis da distribuição $\chi^2_{(n-p)}$.
- Entretanto, em geral a distribuição sob a hipótese nula de $D^*(\mathbf{y}; \hat{\boldsymbol{\mu}})$ não é conhecida.

Intervalos de confiança e teste de hipótese

- Intervalos de confiança e testes de hipótese podem ser conduzidos de forma semelhante aos MLGs ([aqui](#) e [aqui](#)), considerando a normalidade assintótica de $\hat{\beta}$ e a Equação (1).
- Exercício: propor formas para os intervalos de confiança para cada componente β , bem como testes para cada componente e testes para hipóteses $H_0 : \mathbf{C}\beta = \mathbf{M}$.

Diagnóstico

- O não conhecimento da verdadeira verossimilhança de β dificulta o desenvolvimento de alguns métodos de diagnóstico.
- Tanto o estudo de resíduos como de medidas de influência dependem, em geral, do conhecimento de $l(\beta)$.
- Dois resíduos tem sido comumente utilizados para os modelos de quase-verossimilhança. O primeiro é o resíduo de Pearson:

$$R_{P_i} = \frac{Y_i - \hat{\mu}_i}{\hat{\sigma} \sqrt{V(\hat{\mu}_i)}}.$$

Diagnóstico

- (Cont.) e o resíduo do “tipo” componente do desvio:

$$RCD_i = \text{ sinal } (Y_i - \hat{\mu}_i) \frac{\sqrt{D(y_i; \hat{\mu}_i)}}{\hat{\sigma} \sqrt{1 - \hat{h}_{ii}}}.$$

- Embora não exista uma distribuição de referência conhecida, podemos construir alguns dos gráficos feitos para o RCD sem esperar, no entanto, normalidade.

Influência

- Uma versão da distância de Cook para os modelos de quase-verossimilhança é dada por

$$LD_i = \frac{\hat{h}_{ii}}{1 - \hat{h}_{ii}^2} R_{P_i},$$

em que \hat{h}_{ii} denota o i -ésimo elemento da diagonal principal da matriz:

$$\mathbf{H} = \mathbf{V}^{-1/2} \mathbf{D} (\mathbf{D}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{D})^{-1} \mathbf{D}' \mathbf{V}^{-1/2}.$$

- Gráficos de LD_i contra a ordem das observações ou contra os valores ajustados podem revelar pontos possivelmente influentes nos parâmetros do preditor linear.

Seleção e comparação de modelos

- Os métodos de seleção e comparação de modelos procedimentos podem ser feito como descritos [aqui](#), usando os critérios de informação mencionadas nesse materail.
- No entanto, a logverossimilhança tem de ser substituída pela quase-logverossimilhança.
- A utilização desses critérios de informação permanece como para os MLGs.

Exemplo 14: moscas do chifre

- O objetivo é estudar a distribuição do número de ácaros em placas de esterco de gado bovino no estado de S. Paulo.
- Essas placas são depósitos de ovos da mosca do chifre (*Haematobia irritans*), uma das pragas mais importantes da pecuária brasileira.
- Os ácaros são inimigos naturais da mosca do chifre uma vez que se alimentam de ovos e larvas dessas moscas.

Exemplo 14: moscas do chifre

- Aqui, consideraremos como a resposta o número de ácaros da espécie 2 ($N_{acaroscE2}$) e como explicativas (i) N_{partes} , número de partes da posição da placa onde foram coletados os ácaros, (ii) posição, posição na placa onde foram coletados os ácaros (1: lateral, 0: central), (iii) região, região onde a placa foi coletada (1: São Roque, 2: Pindamonhangaba, 3: Nova Odessa, 4: Ribeirão Preto) e (iv) temp, temperatura no local da coleta (em °C).
- Como o tamanho da placa pode interferir, consideraremos, nas análises descritivas, a variável $N_{acaroscE2}/N_{partes}$, como resposta.

Medidas resumo: região

região	média	dp	var.	cv(%)	ca	curt	min.	max.
São Roque	4,98	6,45	41,64	129,59	1,18	3,07	0,00	21,00
Pindamonhangaba	2,51	2,90	8,42	115,49	1,75	5,32	0,00	11,00
Nova Odessa	6,85	13,99	195,71	204,10	3,54	15,58	0,00	67,00
Ribeirão Preto	2,20	3,70	13,69	168,01	2,36	8,43	0,00	15,83

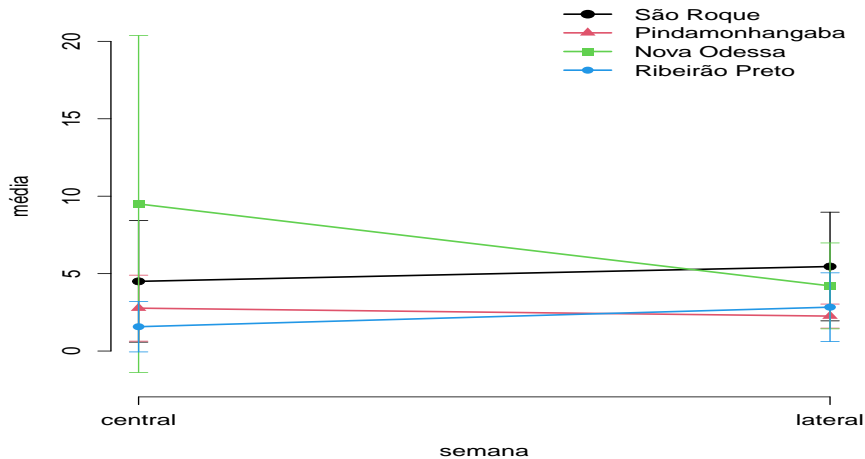
Medidas resumo: posição

posição	média	dp	var.	cv(%)	ca	curt	min.	max.
central	4,43	10,36	107,33	233,79	4,62	27,46	0,00	67,00
lateral	3,63	4,52	20,45	124,67	1,73	5,14	0,00	16,83

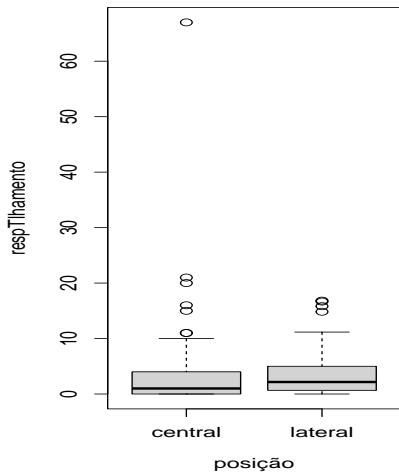
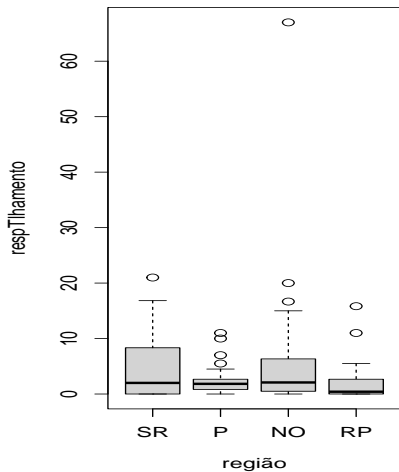
Medidas resumo: região/posição

região	posição	média	dp	var.	cv(%)	ca	curt	min.	max.
SR	central	4,50	6,93	48,09	154,11	1,58	4,02	0,00	21,00
	lateral	5,46	6,20	38,47	113,63	0,70	1,99	0,00	16,83
P	central	2,77	3,92	15,36	141,52	1,29	3,05	0,00	11,00
	lateral	2,26	1,43	2,04	63,37	1,01	3,31	0,50	5,50
NO	central	9,50	19,23	369,91	202,45	2,48	7,97	0,00	67,00
	lateral	4,21	4,90	24,03	116,49	1,51	4,44	0,17	16,67
RP	central	1,57	3,11	9,65	197,67	2,25	7,21	0,00	11,0
	lateral	2,83	4,23	17,93	149,46	2,23	7,46	0,00	15,83

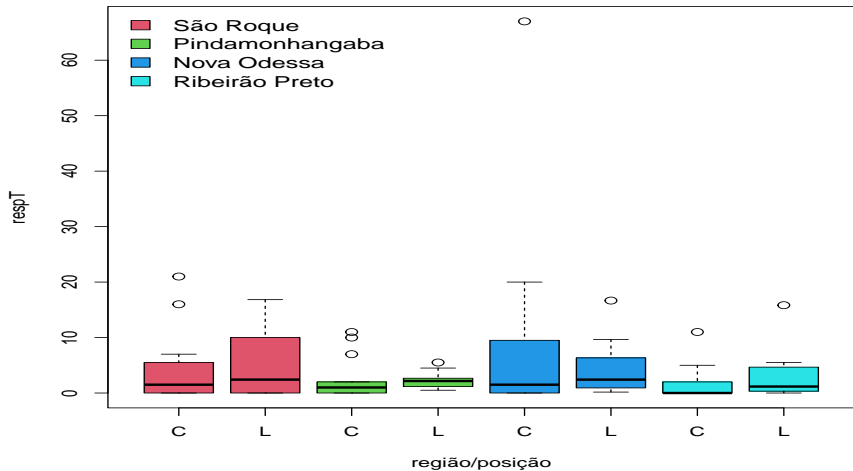
Perfis médios



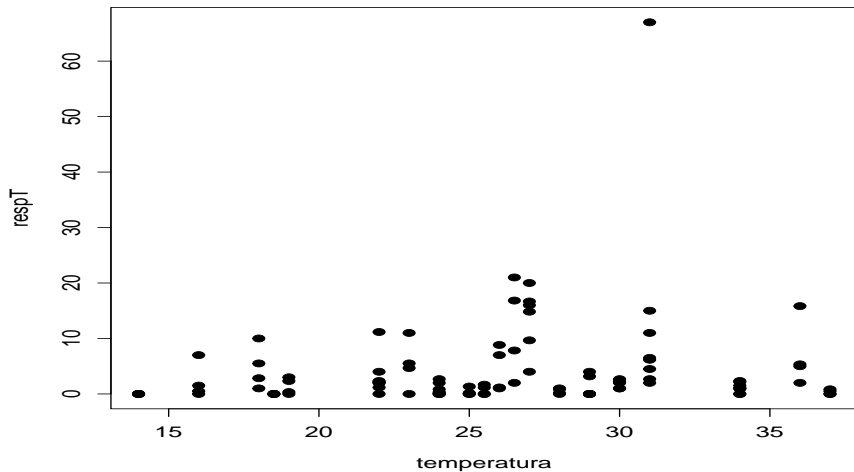
Box plots: região e posição



Box plots: região × posição

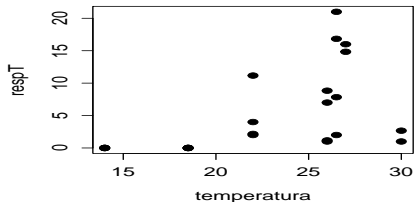


Dispersão: temp \times respT

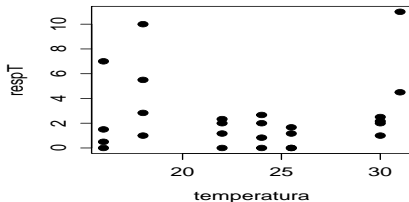


Dispersão: temp \times respT (por região)

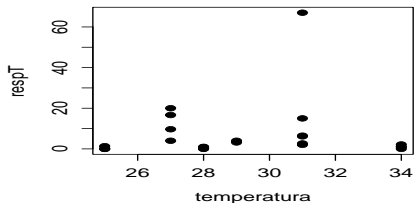
São Roque



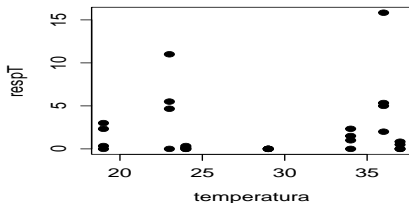
Pindamonhangaba



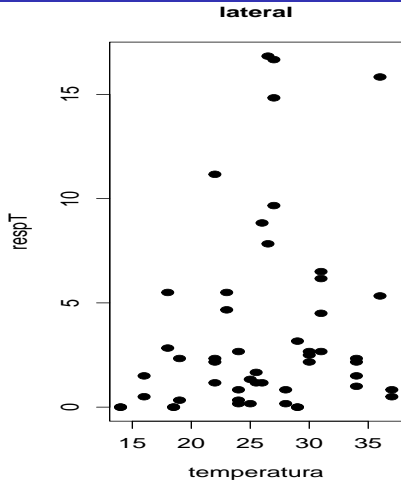
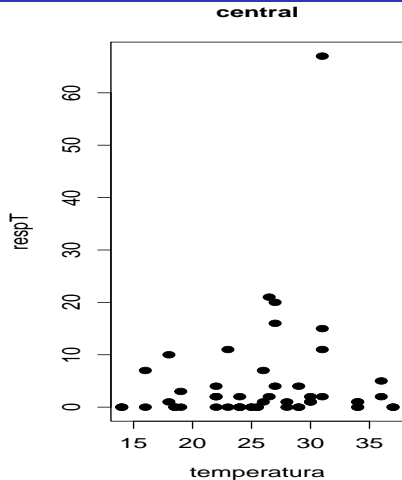
Nova Odessa



Ribeirão Preto

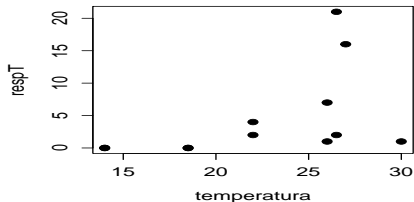


Dispersão: temp \times respT (por posição)

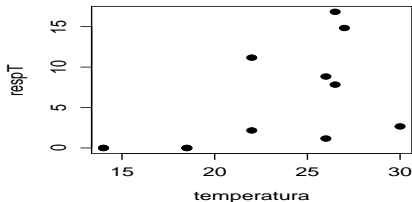


Dispersão: temp \times respT (por região \times posição)

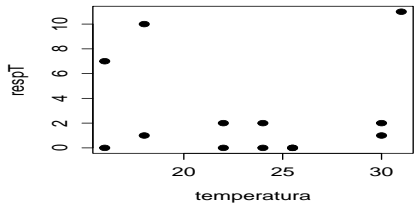
São Roque (central)



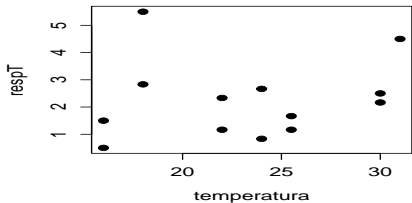
São Roque (lateral)



Pindamonhangaba (central)

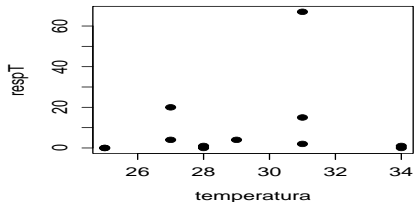


Pindamonhangaba (lateral)

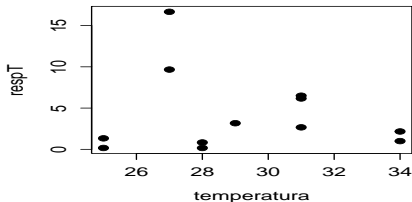


Dispersão: temp \times respT (por região \times posição)

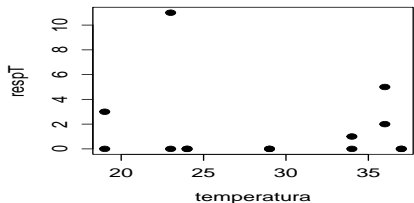
Nova Odessa (central)



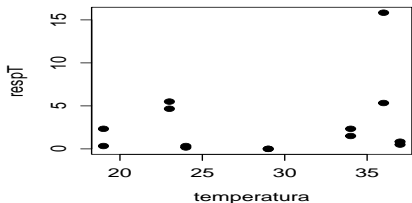
Nova Odessa (lateral)



Ribeirão Preto (central)



Ribeirão Preto (lateral)



Modelo 1

- Assumiremos que $Y_{ijk} \stackrel{ind.}{\sim} \text{Poisson}(\lambda_{ijk} = \lambda_{ijk}/N_{ijk})$, em que

$$\ln \lambda_{ijk} = \alpha + \beta_i + \delta_j + \gamma x_{ijk} + \ln(N_{ijk}),$$

$$\alpha_1 = \beta_1 = 0,$$

$$i = 1(\text{São Roque}), 2(\text{Pindamonhangaba}), 3(\text{Nova Odessa}), \\ 4(\text{Ribeirão Preto})(\text{região}),$$

$$j = 1(\text{central}), 2(\text{lateral})(\text{posição}),$$

$$k = 1, 2, \dots, n_{ij}(\text{placa}).$$

Modelo 1

- Y_{ijk} : número de ácaros encontrados na k -ésima placa, da i -ésima região na j -ésima posição.
- $x_{ijk} = x_{ijk}^* - \bar{x}^*$, em que x_{ijk}^* é a temperatura da k -ésima placa, da i -ésima região na j -ésima posição e $\bar{x}^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^{n_{ij}} x_{ijk}$
- N_{ijk} : número de partes da k -ésima placa, da i -ésima região na j -ésima posição (entra como um *offset*).
- Exercício: Apresente interpretações para os parâmetros e/ou funções deles.

Gráficos de diagnóstico do RCD (modelo 1)

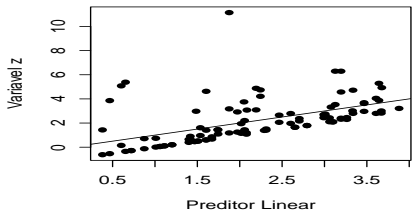
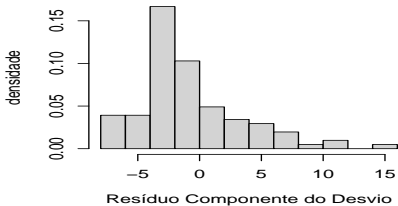
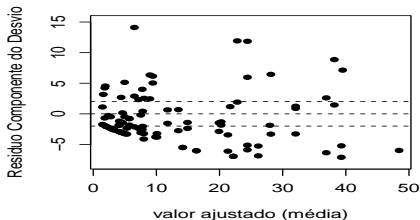
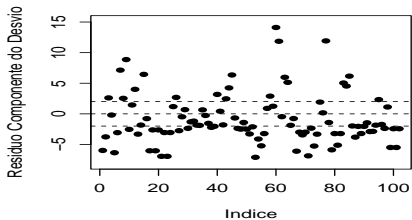
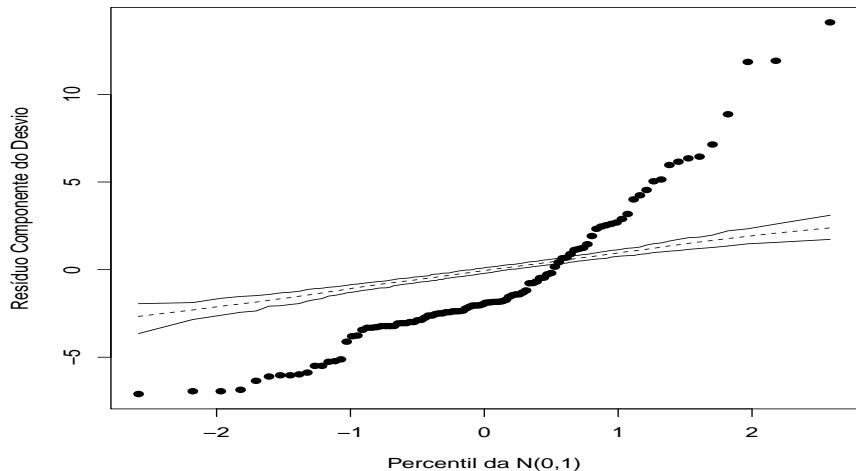
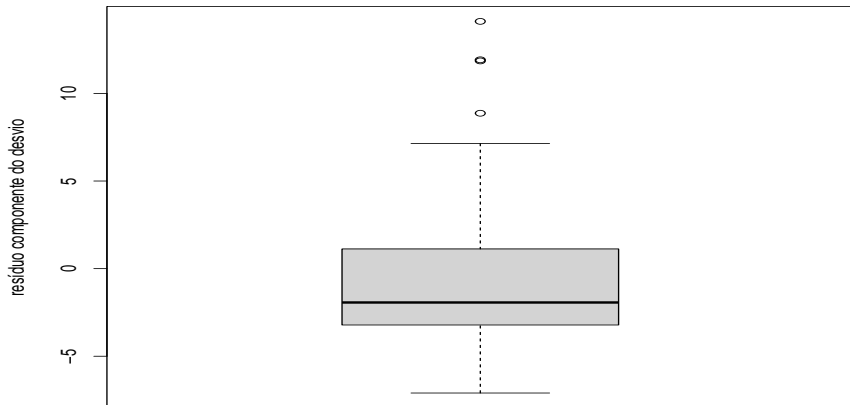


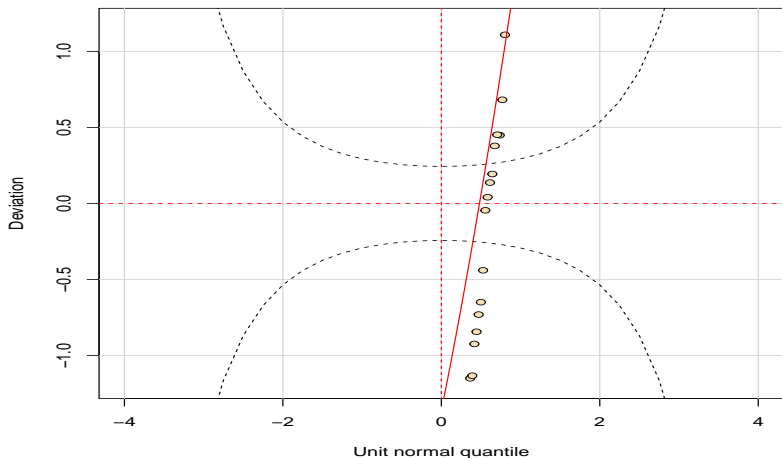
Gráfico de envelope do RCD (modelo 1)



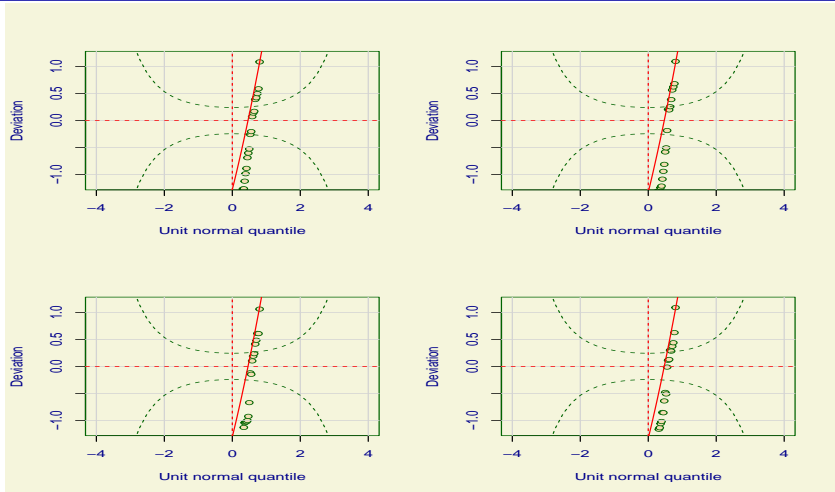
Boxplot do RCD (modelo 1)



Worm plot para os resíduos: Exemplo 4 (modelo 1)



Worm plots para os resíduos: Exemplo 4 (modelo 1)



Estimativas: modelo 1

Par.	Est.	EP	IC(95%)	Estat. Z_t	p-valor
α	2,02	0,08	[1,87;2,17]	25,97	< 0,0001
β_2	-0,8714	0,0835	[-1,04;-0,71]	-10,44	< 0,0001
β_3	-0,48	0,0761	[-0,63;-0,33]	-6,32	< 0,0001
β_4	-1,16	0,0899	[-1,33;-0,98]	-12,91	< 0,0001
δ_2	-0,20	0,0730	[-0,34;-0,06]	-2,74	0,0061
γ	0,07	0,0061	[0,06;0,08]	11,1861	< 0,0001

Modelo 2

- Assumiremos que $Y_{ijk} \stackrel{ind.}{\sim} \text{BN}(\mu_{ijk} = \lambda_{ijk}/N_{ijk}, \phi)$, em que

$$\ln \lambda_{ijk} = \alpha + \beta_i + \delta_j + \gamma x_{ijk} + \ln(N_{ijk})$$

$$i = 1(\text{São Roque}), 2(\text{Pindamonhangaba}), 3(\text{Nova Odessa}), \\ 4(\text{Ribeirão Preto})(\text{região}),$$

$$j = 1(\text{central}), 2(\text{lateral})(\text{posição}),$$

$$k = 1, 2, \dots, n_{ij}(\text{placa})$$

- As outras quantidades são como para o modelo 1.

Gráficos de diagnóstico do RCD (modelo 2)

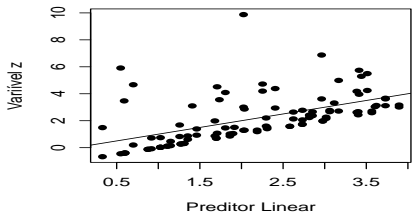
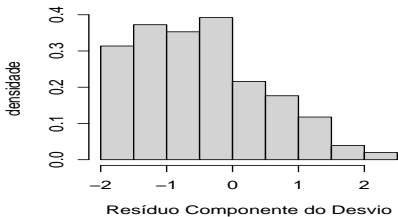
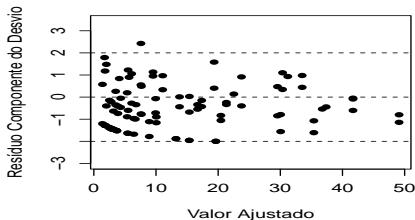
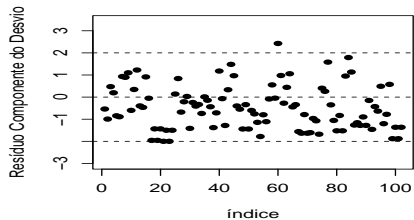
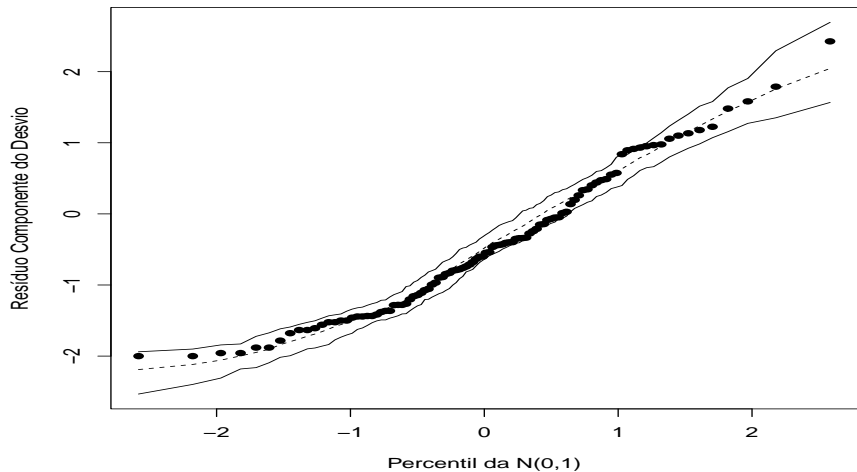
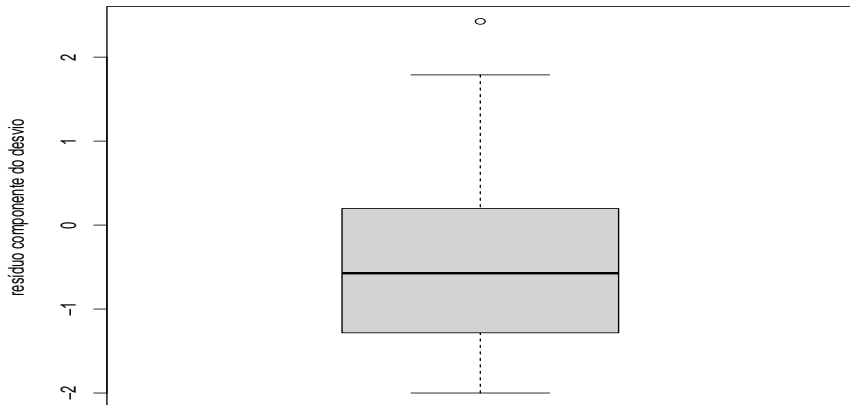


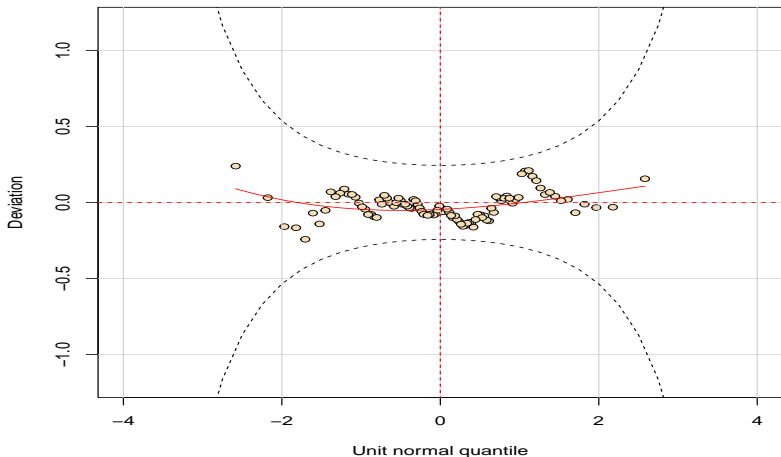
Gráfico de envelope do RCD (modelo 2)



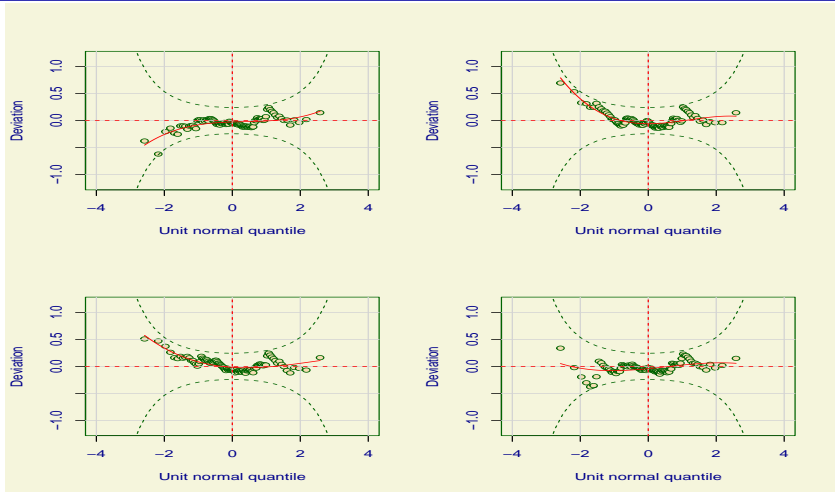
Boxplot do RCD (modelo 2)



Worm plot para os resíduos: Exemplo 4 (modelo 1)



Worm plots para os resíduos: Exemplo 4 (modelo 2)



Estimativas: modelo 2

Par.	Est.	EP	IC(95%)	Estat. Z_t	p-valor
α	1,68	0,34	[1,01;2,36]	4,89	< 0,0001
β_2	-0,54	0,41	[-1,35;0,27]	-1,32	0,1877
β_3	0,07	0,45	[-0,82;0,96]	0,16	0,8747
β_4	-0,97	0,45	[-1,84;-0,09]	-2,17	0,0298
γ_2	-0,09	0,29	[-0,65;0,48]	-0,30	0,7662
δ	0,05	0,03	[-0,00;0,11]	1,92	0,0551

Comentários

- O modelo 1 apresentou um péssimo ajuste (presença de superdispersão).
- O modelo 2 apresentou um ajuste muito melhor do que o modelo 1 mas, ainda assim, não satisfatório (presença de superdispersão).
- O modelo 2 apresentou um ajuste muito melhor do que o modelo 1 mas, ainda assim, não satisfatório (variabilidade dos dados não foi, aparentemente, acomodada de forma satisfatória).
- Ajustaremos dois modelos de quase-verossimilhança para tentar acomodar melhor a variabilidade dos dados, doravante, modelos 3 e 4.

Modelo 3

- Assumiremos que $Y_{ijk} \stackrel{ind.}{\sim} Q(\mu_{ijk}, V(.))(\mu_{ijk} = \lambda_{ijk}/N_{ijk})$, em que

$$\ln \lambda_{ijk} = \alpha + \beta_i + \delta_j + \gamma x_{ijk} + \ln(N_{ijk}),$$

$$V(Y_{ijk}) = \sigma^2 \mu_{ijk},$$

$$i = 1(\text{São Roque}), 2(\text{São Roque}), 3(\text{Pindamonhangaba}), \\ 4(\text{Ribeirão Preto})(\text{região}),$$

$$j = 1(\text{central}), 2(\text{lateral})(\text{posição}),$$

$$k = 1, 2, \dots, n_{ij}(\text{placa}).$$

- As outras quantidades são como para o modelo 1.

Modelo 4

- Assumiremos que $Y_{ijk} \stackrel{ind.}{\sim} Q(\mu_{ijk}, V(.))(\mu_{ijk} = \lambda_{ijk}/N_{ijk})$, em que

$$\ln \lambda_{ijk} = \alpha + \beta_i + \delta_j + \gamma x_{ijk} + \ln(N_{ijk}),$$

$$\mathcal{V}(Y_{ijk}) = \sigma^2 \mu_{ijk}^2,$$

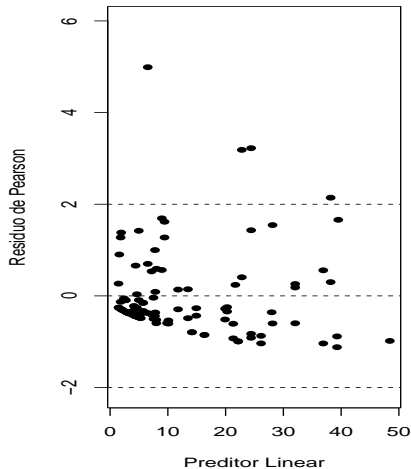
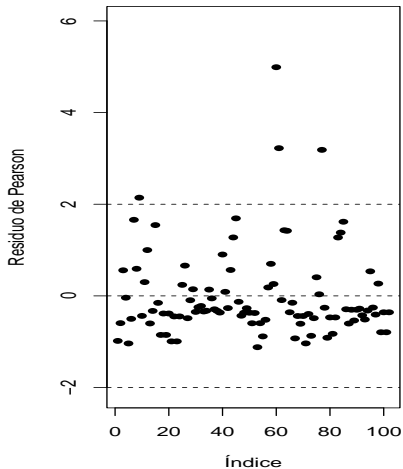
$$i = 1(\text{São Roque}), 2(\text{São Roque}), 3(\text{Pindamonhangaba}), \\ 4(\text{Ribeirão Preto})(\text{região}),$$

$$j = 1(\text{central}), 2(\text{lateral})(\text{posição}),$$

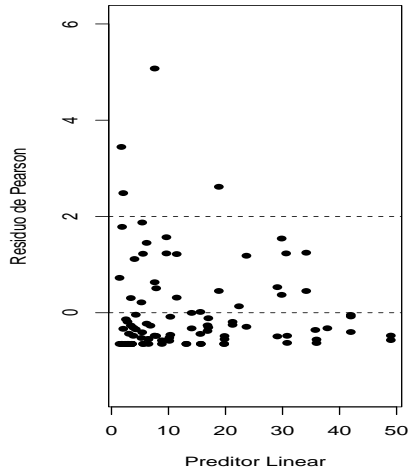
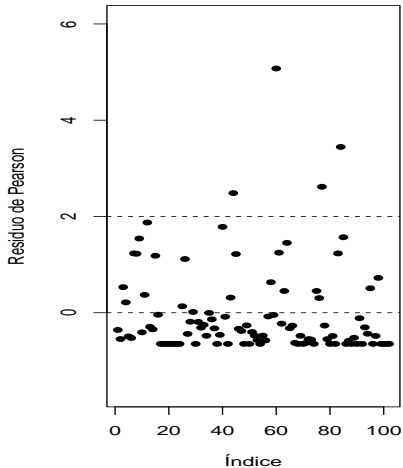
$$k = 1, 2, \dots, n_{ij}(\text{placa}).$$

- As outras quantidades são como para o modelo 1.

Gráficos de diagnóstico do RP (modelo 3)



Gráficos de diagnóstico do RP (modelo 4)



Estimativas: modelo 3

Par.	Est.	EP	IC(95%)	Estat. Z_t	p-valor
α	2,02	0,37	[1,30;2,74]	5,47	< 0,0001
β_2	-0,87	0,40	[-1,65;-0,09]	-2,20	0,0302
β_3	-0,48	0,36	[-1,19;0,23]	-1,33	0,1859
β_4	-1,16	0,43	[-2,00;-0,32]	-2,72	0,0078
δ_2	-0,20	0,35	[-0,88;0,48]	-0,58	0,5645
γ	0,07	0,03	[0,01;0,12]	2,36	0,0204

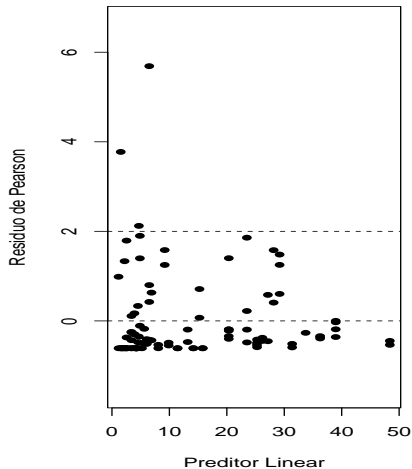
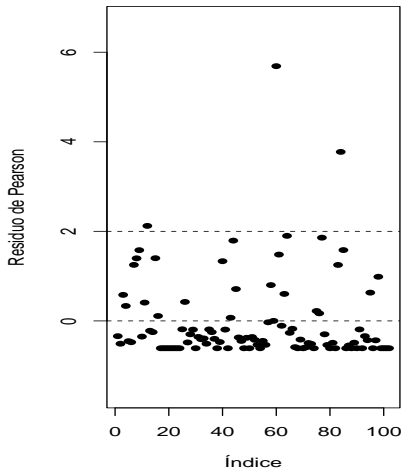
Estimativas: modelo 4

Par.	Est.	EP	IC(95%)	Estat. Z_t	p-valor
α	1,66	0,37	[0,94;2,38]	4,54	< 0,0001
β_2	-0,52	0,44	[-1,38;0,34]	-1,19	0,2373
β_3	0,11	0,49	[-0,85;1,06]	0,22	0,8238
β_4	-0,95	0,47	[-1,87;-0,03]	-2,03	0,0456
δ_2	-0,08	0,31	[-0,68;0,52]	-0,26	0,7950
γ	0,05	0,03	[-0,01;0,11]	1,72	0,0879

Comentários

- Os modelo 3 e 4, de uma forma geral, apresentaremos um melhor ajuste que o modelo 3.
- O modelo 4, apresentou um ajuste melhor do que o modelo 3 (aparentemente por acomodar melhor a variabilidade dos dados).
- Vamos ajustar um modelo reduzido, ou seja, o modelo 4 sem os parâmetros $(\beta_2, \beta_3, \delta_2)'$, apresentou um ajuste melhor do que o modelo 3 (aparentemente por acomodar melhor a variabilidade dos dados).

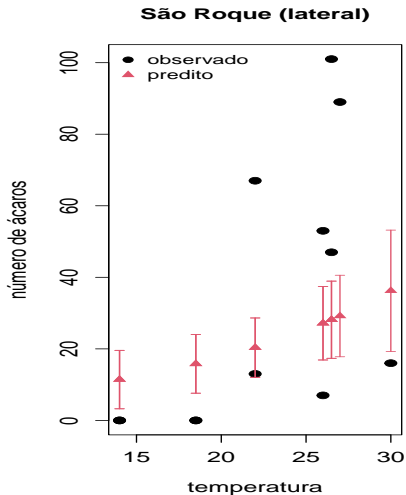
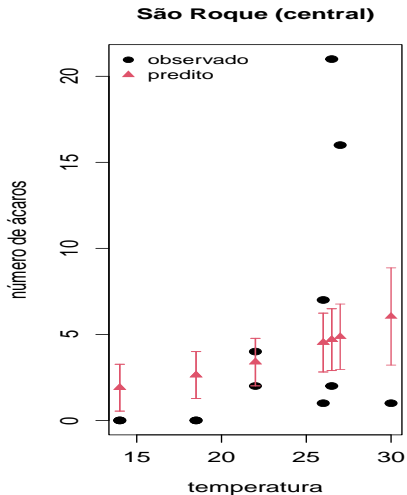
Gráficos de diagnóstico do RP (modelo 5)



Estimativas: modelo 5

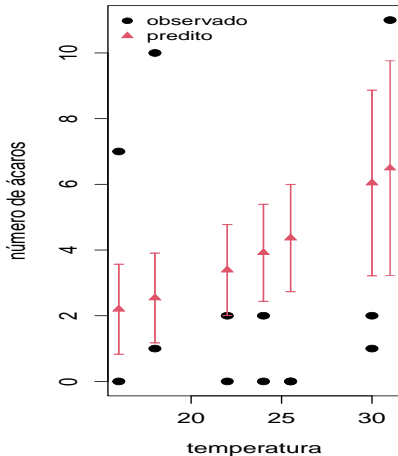
Par.	Est.	EP	IC(95%)	Estat. Z_t	p-valor
α	1,51	0,19	[1,13;1,89]	7,84	< 0,0001
β_4	-0,87	0,38	[-1,61;-0,12]	-2,28	0,0247
γ	0,07	0,03	[0,02;0,13]	2,54	0,0128

Valores preditos e observados (modelo 5)

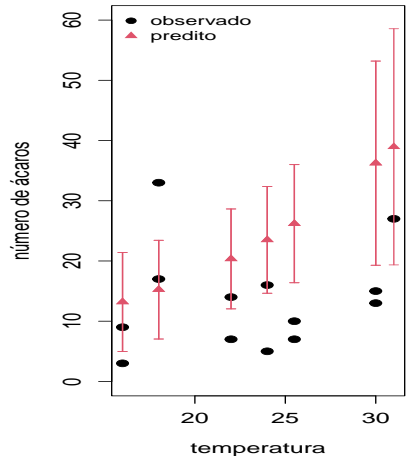


Valores preditos e observados (modelo 5)

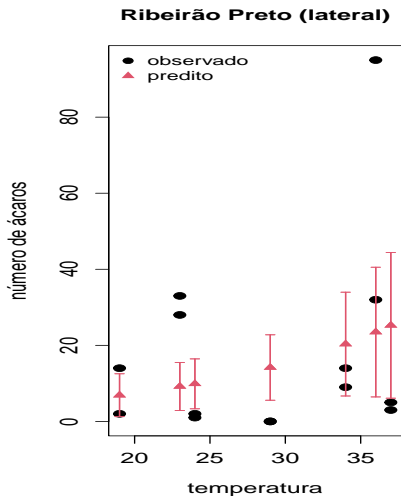
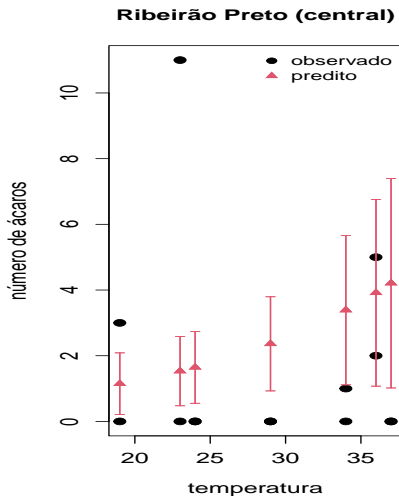
Pindamonhangaba (central)



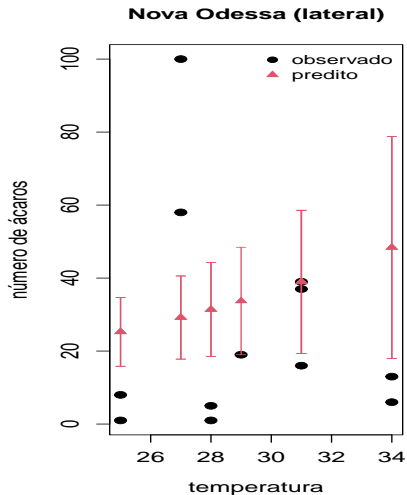
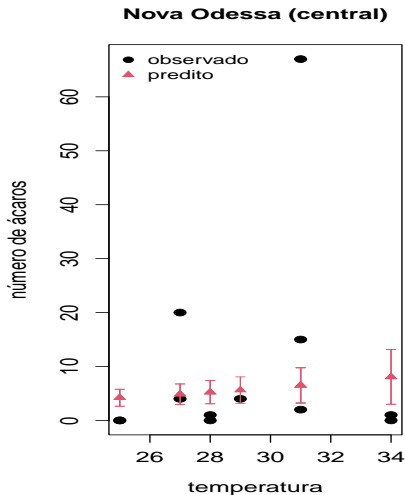
Pindamonhangaba (lateral)



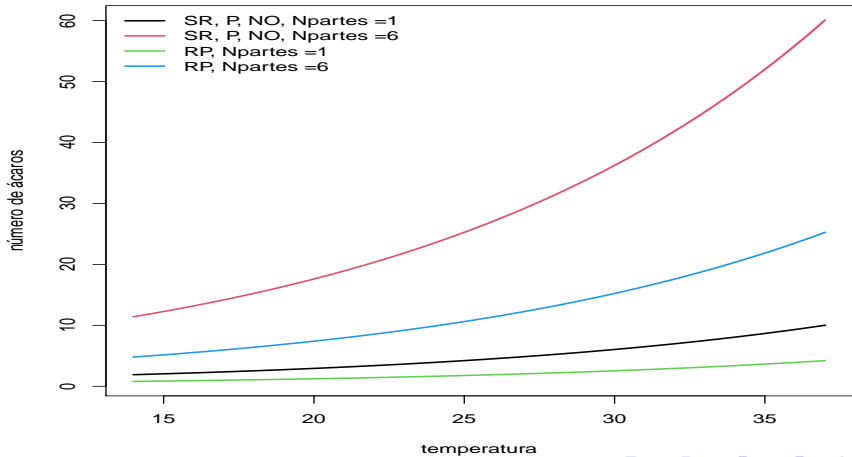
Valores preditos e observados (modelo 5)



Valores preditos e observados (modelo 5)



Valores preditos e observados (modelo 5)



Comentários

- A posição da contagem na placa não afeta o número médio de ácaros.
- A temperatura tem o mesmo efeito positivo, no número de ácaros, independentemente da região e da posição.
- Para uma mesma temperatura, o número médio de ácaros, independentemente da posição, é o mesmo entre as regiões de São Roque, Nova Odessa e Pindamonhangaba, sendo maiores do que aqueles para a região de Ribeirão Preto.