MI513 - Modelos lineares generalizados
Segundo semestre de 2024
Lista de Exercícios 1

OBS: A menos que o contrário seja mencionado, considere a forma da FE vista em sala de aula.

1. Resolva todos os exercícios deixados em classe.
2. Prove todos os resultados não demonstrados em classe e/ou apresente os detalhes omitidos.
3. Para a forma da FE apresentada em sala encontre a respectiva fgm (função geradora de momentos) associada à Y e, partir dela, obtenha $\mathcal{E}(Y)$ e $\mathcal{V}(Y)$. Compare esses resultados com aqueles apresentados em sala.
4. Considere $Y_i \overset{i.i.d.}{\sim} FE(\theta, \phi), i = 1, 2, ..., n$. Apresente o sistema de equações de verossimilhança para estimar θ e ϕ, indicando como ele deve ser resolvido numericamente, caso a solução analítica não seja possível. Particularize os resultados para cada um dos cinco membros da FE vistos em sala.
5. Repita a questão anterior, considerando o estimador pelo método dos momentos.
6. Verifique qual(is) das distribuições abaixo pertencem à família exponencial, identificando cada uma das funções $\theta, b(.), c(.,.), V(.)$, obtendo também $\mathcal{E}(Y)$ e $\mathcal{V}(Y)$.

   a) $f_Y(y) = \rho^y/(-y\ln(1-\rho))\mathbb{1}_{\{1,2,....\}}(y), \rho \in (0,1)$.
   b) $f_Y(y) = p(1-p)^x \mathbb{1}_{\{}0, 1, 2, ...\}(x), p \in (0,1)$.
   c) $f_Y(y) = \dfrac{\phi a(y,\phi)}{\pi(1+y^2)^{1/2}} \exp\left\{\phi\left[y\theta + (1-\theta^2)^{1/2}\right]\right\} \mathbb{1}_{(-\infty,\infty)}(y), \theta \in (0,1), \phi > 0$ e $a(.,.)$ é uma função normalizadora.
   d) $f_Y(y) = a(y,\phi)\exp\{\phi[\theta(y+1) - \theta\ln(\theta)]\}\mathbb{1}_{(-\infty,\infty)}(y), \theta > 0, \phi > 0$ e $a(.,.)$ é uma função normalizadora.
   e) $Y \sim \text{beta}(a, b)$ com "b" conhecido (escreva a densidade em função da média).
   f) $Y \sim \text{beta}(a, b)$ com "a" conhecido (escreva a densidade em função da média).
   g) $Y \sim$ geométrica(p) em dois casos: $A = \{0, 1, 2, ...\}$ e $A = \{1, 2, ...\}$ (em ambos os casos escreva a densidade em função da média).
   h) $Y \sim \text{Rayleigh}(\sigma), \sigma > 0,\ f_Y(y) = \dfrac{x}{\sigma^2} e^{-x^2/(2\sigma^2)} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$ (escreva a densidade em função da média).
   i) $Y \sim \text{Maxwelll}(\sigma), \sigma > 0, f_Y(y) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \dfrac{x^2}{\sigma^3} \exp\left(\dfrac{-x^2}{2\sigma^2}\right) \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$ (escreva a densidade em função da média).

7. Para as distribuições da questões anterior, que pertencem à FE, encontre a função desvio.

8. Suponha que queremos testar (nos MLG) $H_0 : \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}_0$ vs $H_1 : \boldsymbol{\beta} \neq \boldsymbol{\beta}_0$. Encontre a estatística do TRV bem como sua respectiva distribuição sob H_0, em sua versão assintótica. Repita o procedimento para as seguintes hipóteses: $H_0 : \phi = \phi_0$ vs $H_1 : \phi \neq \phi_0$

9. Repita o item anterior considerando agora a o teste de Escore de Rao.