

MI513 - Modelos lineares generalizados
Segundo semestre de 2024
Lista de Exercícios 0

OBS: Nas questões envolvendo a obtenção do teste da razão de verossimilhanças (TRV) você deverá obter a estatística $\Lambda = \frac{L(\hat{\boldsymbol{\theta}}_0)}{L(\hat{\boldsymbol{\theta}})}$, em que $L(\hat{\boldsymbol{\theta}}_0), L(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ são, respectivamente, a verossimilhança maximizada sob H_0 e irrestritamente, depois a estatística $\lambda = -2 \ln \Lambda$, apresentando a respectiva distribuição assintótica desta última, simplificando ambas as estatísticas o máximo possível. Para a versão assintótica do teste, você deverá apresentar as regiões de aceitação e crítica, bem como o p-valor associado ao teste.

1. Seja X_1, X_2, \dots, X_n uma amostra aleatória de $X \sim N(\mu, \sigma^2), \mu \in \mathcal{R}$ e $\sigma^2 \in \mathcal{R}^+$, ambos desconhecidos. Responda os itens:
 - a) Escreva a densidade conjunta da amostra em termos da família exponencial, ou seja, $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = a(\boldsymbol{\theta})b(\mathbf{x}) \exp \left[\sum_{i=1}^2 c_i(\boldsymbol{\theta})d_i(\mathbf{x}) \right]$, em que $\boldsymbol{\theta} = (\mu, \sigma^2)$ e $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)'$.
 - b) Encontre uma estatística suficiente para $\boldsymbol{\theta}$.
 - c) Encontre os estimadores de máxima verossimilhança de (μ, σ^2) .
 - d) Proponha um procedimento estatístico para testar as hipóteses $H_0 : \mu = \mu_0$, vs, $H_1 : \mu \neq \mu_0$ (em que μ_0 é uma constante conhecida), ou seja, proponha um estatística de teste e obtenha: sua distribuição sob H_0 , sua distribuição sob H_1 , as regiões crítica e de aceitação associadas e a função de poder do teste.
 - e) Calcule o teste da razão de verossimilhanças para testar as hipóteses definidas no item d) e encontre sua respectiva distribuição assintótica.
2. Considere o modelo de regressão normal linear em forma matricial, ou seja:

$$\mathbf{Y}_{(n \times 1)} = \mathbf{X}_{(n \times k)}\boldsymbol{\beta}_{(k \times 1)} + \boldsymbol{\xi}_{(n \times 1)},$$

em que

$$\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)' \text{ é o vetor com as variáveis resposta, } \mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & \dots & X_{1k} \\ X_{21} & X_{22} & \dots & X_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{n1} & X_{n2} & \dots & X_{nk} \end{bmatrix} \text{ é}$$

a matriz com as variáveis explicativas, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k)'$ é o vetor de parâmetros e $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)' \sim N(\mathbf{0}_n, \sigma^2 \mathbf{I}_n)$, em que \mathbf{I}_n denota uma matriz identidade de ordem n .

Responda os itens:

- a) Encontre o estimador de mínimos quadrados de β , e denote-o por $\hat{\beta}$.
- b) Encontre a distribuição exata de $\hat{\beta}$.
- c) Proponha uma estatística para testar a hipótese $\beta_k = \beta_{0k}$, em que β_{0k} é uma constante conhecida, e encontre sua distribuição sob H_0 .