1. Resoluções/respostas corretas
   (a) Alternativa correta: (ii), (iii), (iv).
   (b) Alternativas corretas: (i), (iv).
   (c) Alternativas corretas: (i), (ii), (iii).
   (d) Alternativas corretas: (iii).
2. Resoluções/respostas corretas
   (a) Alternativa correta: (i), (ii), (iv)
   (b) Alternativas corretas: (ii).

3. Resoluções/respostas corretas

(a) Alternativa correta: (i), (iii), (iv).

(b) Temos que (alternativa correta (ii)):

$$\begin{aligned} L(\sigma^2) &\propto \left(\sigma^2\right)^{-(T-1)/2} exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2(1+\theta^2)}\sum_{t=2}^{T}\left(y_t-\phi y_{t-1}\right)^2\right\} \\ &\rightarrow l(\sigma^2) = -\frac{(T-1)}{2}\ln\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2(1+\theta^2)}\sum_{t=2}^{T}\left(y_t-\phi y_{t-1}\right)^2 \\ &\rightarrow S(\sigma^2) = -\frac{T-1}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\left(\sigma^2\right)^2(1+\theta^2)}\sum_{t=2}^{T}\left(y_t-\phi y_{t-1}\right)^2 \\ &\rightarrow \widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{(T-1)(1+\theta^2)}\sum_{t=2}^{T}\left(Y_t-\phi Y_{t-1}\right)^2 \end{aligned}$$

(c) Temos que (alternativa correta (iii)) :

$$\begin{aligned} Q'(\phi) &= \frac{2}{\sigma^2}\sum_{t=2}^{T}(Y_t-\phi Y_{t-1})Y_{t-1} = \frac{2}{\sigma^2}\sum_{t=2}^{T}(Y_t-\phi Y_{t-1})Y_{t-1} = \frac{2}{\sigma^2}\left(\sum_{t=2}^{T}Y_tY_{t-1} - \sum_{t=2}^{T}\phi Y_{t-1}^2\right) \\ Q'(\widehat{\phi}) &= 0 \rightarrow \widehat{\phi} = \frac{\sum_{t=2}^{T}Y_tY_{t-1}}{\sum_{t=2}^{T}Y_{t-1}^2} \end{aligned}$$

(d) Temos que (alternativa correta (ii)):

$$\begin{aligned} L(\sigma^2) &\propto \left(\sigma^2\right)^{-(T-1)/2} exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2(1+\theta^2)}\sum_{t=2}^{T}\left(y_t-\phi y_{t-1}\right)^2\right\} \\ &\rightarrow l(\sigma^2) = -\frac{(T-1)}{2}\ln\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2(1+\theta^2)}\sum_{t=2}^{T}\left(y_t-\phi y_{t-1}\right)^2 \\ &\rightarrow S(\sigma^2) = -\frac{T-1}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\left(\sigma^2\right)^2(1+\theta^2)}\sum_{t=2}^{T}\left(y_t-\phi y_{t-1}\right)^2 \\ &\rightarrow S(\phi) = \frac{1}{\sigma^2(1+\theta^2)}\sum_{t=2}^{T}\left(y_t-\phi y_{t-1}\right)y_{t-1} = \frac{1}{\sigma^2(1+\theta^2)}\left[\sum_{t=2}^{T}y_ty_{t-1} - \phi\sum_{t=2}^{T}y_{t-1}^2\right] \end{aligned}$$

Dos itens (c) e (d), temos que:

$$
\begin{aligned}
\widehat{\phi} &= \frac{\sum_{t=2}^{T} Y_t Y_{t-1}}{\sum_{t=2}^{T} Y_{t-1}^2} \\
\widehat{\sigma}^2 &= \frac{1}{(T-1)(1+\theta^2)} \sum_{t=2} \left(Y_t - \widehat{\phi} Y_{t-1} \right)^2 = \frac{1}{(T-1)(1+\theta^2)} \sum_{t=2} \left[Y_t - \left(\frac{\sum_{t=2}^{T} Y_t Y_{t-1}}{\sum_{t=2}^{T} Y_{t-1}^2} \right) Y_{t-1} \right]^2
\end{aligned}
$$

4. Questão 4

(a) Sim, totalmente, note que a série original apresenta sazonalidade multiplicativa (há um comportamento periódico da ACF) mas as autocorrelações próximas dos picos, em geral, também são significativas. A ST aparenta ser não estacionária. Além disso, a série diferenciada uam vez se assemelha a um processo MA(1), com apenas a primeira auto-correlação significativa e com acf parcial apresentando um decaimento exponencial.

(b) O modelo se ajusta bem. O gráfico de trajetória indica média próxima de zero e variância constante (sendo este último corroborado pelo gráfico com os resultados do teste de McLeod-Li). O teste de Ljung-Box, bem como o gráfico de auto-correlações indicam que os resíduos são ruído branco. Finalmente, a normalidade é indicada pelo gráfico de quantil-quantil com envelope, em que todos os pontos estão dentro das bandas de confiança, sem apresentar comportamento sistemático.

(c) Para os valores observados a previsão é muito ruim, pois está bem longe da série observada para a grande maioria dos valores. Para os valores futuros, apesar de todos os valores estarem dentro das bandas de confiança (2x o erro de previsão) as predições pontuais oscilam pouco em torno de um mesmo valor, ficando bem longe, em geral, dos valores observados. Em suma, a previsão foi muito ruim.

(d) Podemos notar que tanto a constante, como o Θ_1 (parte sazonal do modelo) são não significativas ($p > 0,10$). Assim, o modelo reduzido seria um $ARIMA(0,1,1)$, ou seja, contaria com θ_1 mas, como a constante (δ) poderia ser diferente no ajuste desse novo modelo, ela seria, em princípio, considerada. Portanto:

$$(1 - B)(Y_t - \delta) = (1 + B\theta_1)\epsilon_t \rightarrow Y_t = \delta + Y_{t-1} + \theta_1\epsilon_{t-1} + \epsilon_t, \epsilon_t \sim NID(0, \sigma^2)$$