Introdução aos modelos lineares generalizados

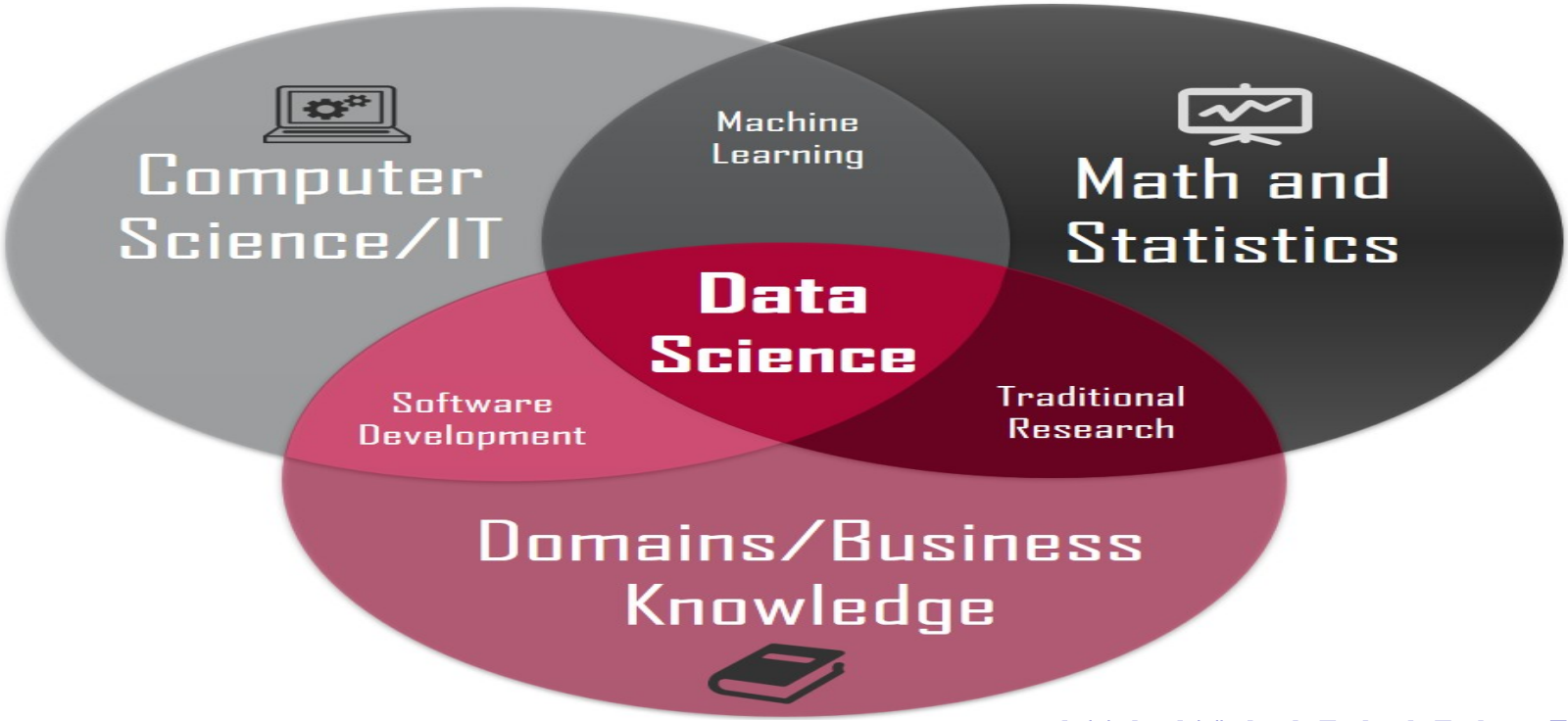
Prof. Caio Azevedo

Introdução

- Estatística (link 1, link 2, link 3) (ciência de dados): área do conhecimento/Ciência que trata de metodologias (estatísticas/matemáticas/computacionais) apropriadas para se coletar, organizar e analisar dados.
- A Estatística é uma ferramenta muito importante na resolução de problemas levantados nas diversas áreas: Biologia, Psicometria, Educação, Medicina, Física, Computação entre outras.
- É importante que o Estatístico (Cientista de Dados) participe de todas as etapas de um estudo (pesquisa/consultoria).

Introdução

- Em geral a Estatística considera aspectos (amostragem, planejamento de experimentos) que não são considerados em Ciências de Dados e vice-versa (certos algoritmos).



Etapas para a resolução de um problema

1. Determinação do problema/objeto de estudo (incluindo a população de interesse).
2. Determinação dos objetivos (gerais e específicos).
3. Determinação do tamanho da amostra-delineamento amostral/experimental.
4. Levantamento dos dados: entrevistas, experimento, coleta de dados etc.
5. Análise Descritiva.
6. Análise Inferencial (Modelos de regressão).
7. Conclusões e elaboração dos relatórios/artigos/trabalhos pertinentes.

Pode-se retornar a pontos anteriores ou mesmo avançar, desconsiderando-se alguns pontos, consoante a necessidade.

Introdução

- Foram vistas (?) ou estão sendo vistas (?) até o momento, diversas ferramentes de análise: descritiva, probabilística, inferencial e modelos de regressão normais lineares.
- Estudaremos algumas extensões dos modelos de regressão normais lineares, tendo como base e ponto de partida os modelos lineares generalizados.

Comentários

- (Alguns dos) Objetivos da Estatística
  1. Identificar e estudar padrões (similaridade e dissimilaridade).
  2. Explicar variabilidade.
  3. Identificar e estudar estruturas de dependência.
  4. Realizar comparações, identificando e quantificando diferenças.
  5. Estabelecer conclusões para uma (ou mais) população(ões) de interesse com base em uma (ou mais) amostra(s) dela(s) retirada(s).
  6. Fazer previsões.
  7. Criar mecanismos de classificação e/ou de formação de grupos ("clusterização")
  8. Estabelecer relações de causa e efeito.
- Em geral, os modelos de regressão se prestam ao objetivos de 1 a 7.

Motivação

- Toda metodologia de análise estatística de dados está baseada em suposições, sobre as quais construímos os resultados inferenciais.
- Se as suposições associadas à uma metodologia, que se pretende utilizar, não são satisfeitas, para o conjunto de dados que se quer analisar, podemos:
  - Verificar/pesquisar o quão robusta é tal metodologia. Se for satisfatoriamente robusta, podemos utilizá-la.
  - Caso não o seja, devemos utilizar uma alternativa, se existir.
  - Caso não exista, devemos desenvolver uma metodologia alternativa.

Motivação

- Durante muitos anos os modelos de regressão normais lineares homocedásticos (MRNLH) foram utilizados na tentativa de descrever a maioria dos fenômenos aleatórios.
- Com efeito, a grande maioria das metodologias vistas na maioria das disciplinas regulares dos Bacharelados, Mestrados e Doutorados em Estatística, baseia-se na normalidade (e homocedasticidade) da variável resposta.

Motivação

- Mesmo quando uma dessas duas suposições não se verificava (verifica), transformações na variável resposta eram (as vezes são) utilizadas a fim de que os dados transformados tivessem (tenham) comportamento aproximadamente normal/homocedástico, para então utilizar as metodologias que pressupõem tais características.
- As principais transformações utilizadas (ainda) são: logaritmica, raiz quadrada, arcoseno e Box-Cox (Paula, 2024).
- Exemplo de transformação. Se Y é a variável resposta então defini-se $Y^* = \ln(Y)$ como a nova variável resposta.

Motivação

- Problemas: perda de interpretabilidade dos parâmetros, aumento do viés e erros-padrão das estimativas, desrespeito da natureza dos dados, impossibilidade, em alguns casos, de se obter normalidade/homocedasticidade.
- Transformações também são utilizadas para se obter uma relação linear entre a resposta e as covariáveis.
- Deve-se incorporar o máximo possível de características do experimento (conjunto de dados).

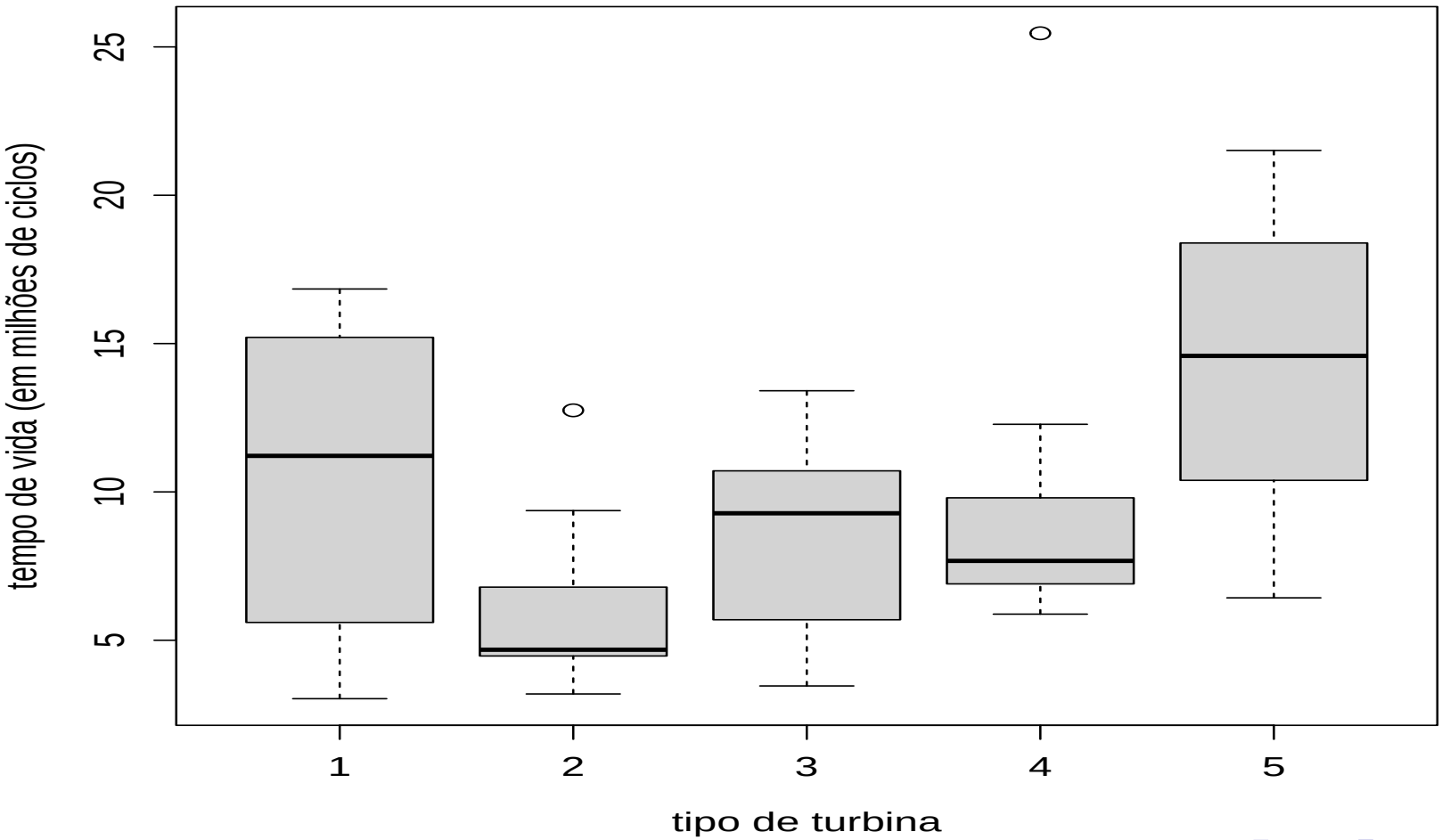
Exemplo 1: dados da potência de turbina de aviões

- Conjuntos de dados relativos ao desempenho de 5 tipos de turbina de avião (ver Paula, 2024 e Lawless 1982, p. 201).
- Foram considerados dez motores de cada tipo nas análises e observado para cada um o tempo (em unidades de milhões de ciclos) até a perda da velocidade.
- Resposta: tempo até a perda de velocidade.
- Variável explicativa: tipos de turbina.
- Objetivo: comparar os tipos de turbinas.

Banco de dados

U.E.	potência	tipo de turbina
1	3,03	1
⋮	⋮	⋮
11	3,19	2
⋮	⋮	⋮
21	3,46	3
⋮	⋮	⋮
40	25,46	4
⋮	⋮	⋮
50	21,51	5

Análise descritiva



Análise descritiva

Tipo	Média	DP	Var.	CV(%)	Min.	Max.	CA	Curt.
1	10,69	4,82	23,23	45,07	3,03	16,84	-0,24	1,72
2	6,05	2,92	8,50	48,18	3,19	12,75	1,40	3,82
3	8,64	3,29	10,83	38,10	3,46	13,41	-0,10	1,83
4	9,80	5,81	33,71	59,26	5,88	25,46	2,21	6,60
5	14,71	4,86	23,65	33,07	6,43	21,51	-0,15	2,05

Observações

- A resposta é positiva, assimétrica e heterocedástica (em função dos tipos de turbina). Além disso, tende apresentar assimetria e caudas mais leves ou pesadas do que as da normal.
- Considerar um modelo de regressão normal linear homocedástico (MRNLH) e conduzir uma ANOVA pode ser problemático, uma vez que tais metodologias requerem normalidade e homocedasticidade da resposta.

Observações

- Ademais, assumir normalidade para a resposta levará à um modelo que atribui probabilidades positivas de ocorrência a valores negativos para resposta (os quais não podem ser observados).
- Além disso, a linearidade imposta entre a média e a variável explicativa (fator) pode levar à valores negativos para as médias preditas.

Exemplo 2: Estudo sobre vasoconstrição

- Dados sobre um estudo de vasoconstrição (veja Paula, 2024, Finney, 1978 e Pregibon, 1981).
- Nesse estudo, foram medidos de 3 pacientes o volume e a razão de ar inspirado, como também a ocorrência ou não de vasoconstrição (contração de vasos sanguíneos) na pele dos dedos da mão. O primeiro paciente contribuiu com 9 observações, o segundo com 8 e o terceiro com 22.
- Em princípio, não seria razoável assumir independência entre as observações. Contudo, por enquanto, assumiremos independência (metodologias mais apropriadas: modelos mistos, modelos hierárquicos).

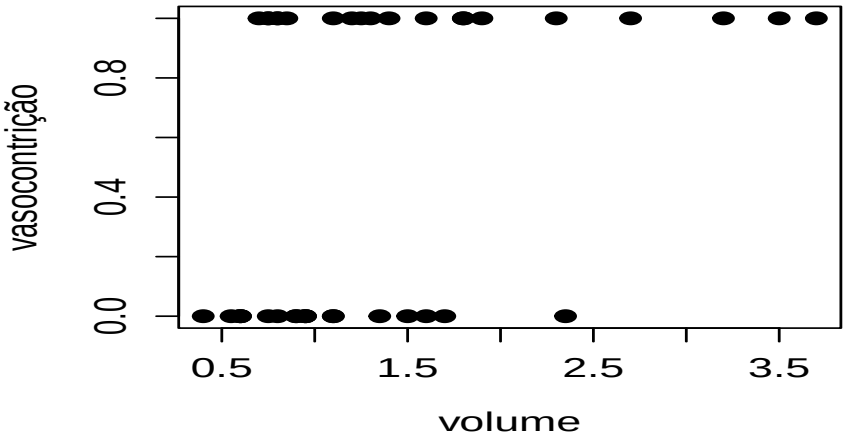
Banco de dados

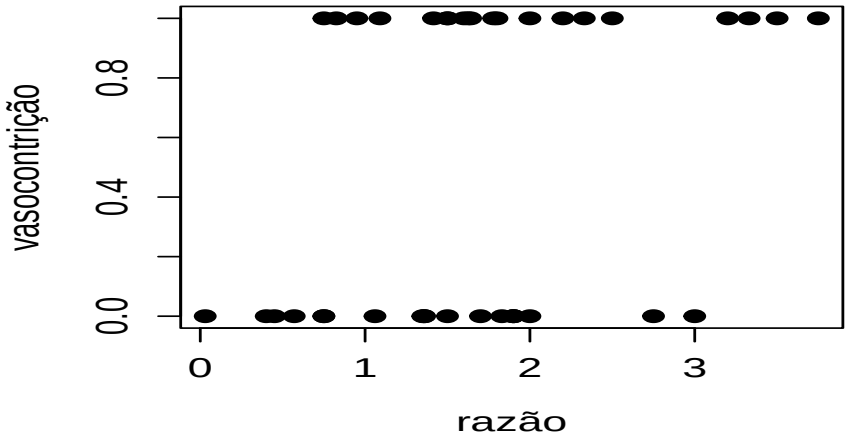
Medida	Ocorrência	Volume	Razão
1	1,00	3,70	0,82
2	1,00	3,50	1,09
⋮	⋮	⋮	⋮
7	0,00	0,60	0,75
8	0,00	1,10	1,70
⋮	⋮	⋮	⋮
39	1,00	1,30	1,62

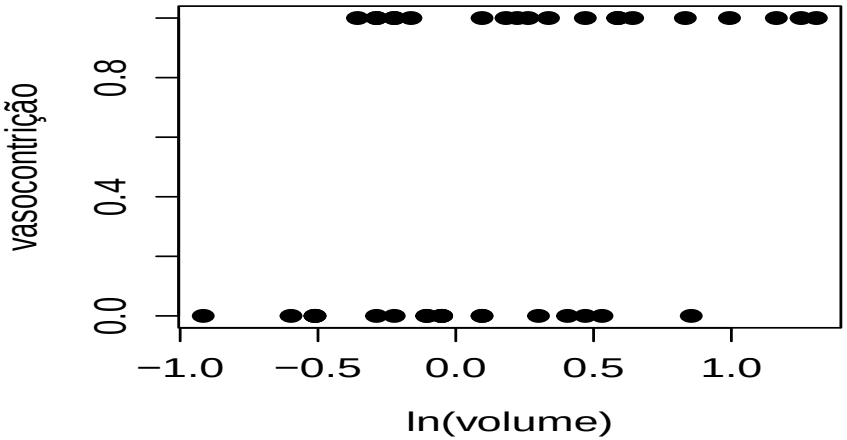
Cont.

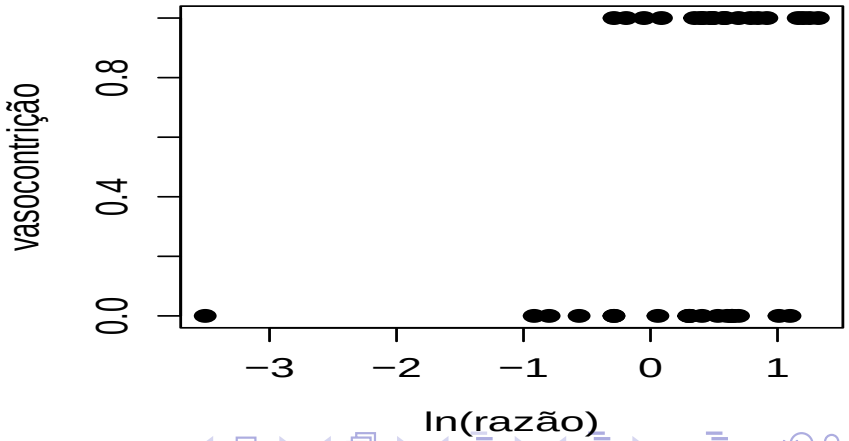
- Resposta: assume valor 1, se ocorreu vasocontrição no $i-$ésimo paciente e 0, caso contrário.
- Variáveis explicativas: volume e razão de ar inspirado.
- Objetivo: verificar se a quantidade de ar (volume e razão) influencia(m) a ocorrência de vasoconstrição.
- As vezes é mais apropriado trabalhar como o ln (logaritmo natural) das variáveis explicativas (para, por exemplo, medir melhor o impacto de cada uma na variável resposta, principalmente se esta não for contínua).

Gráficos de dispersão individuais

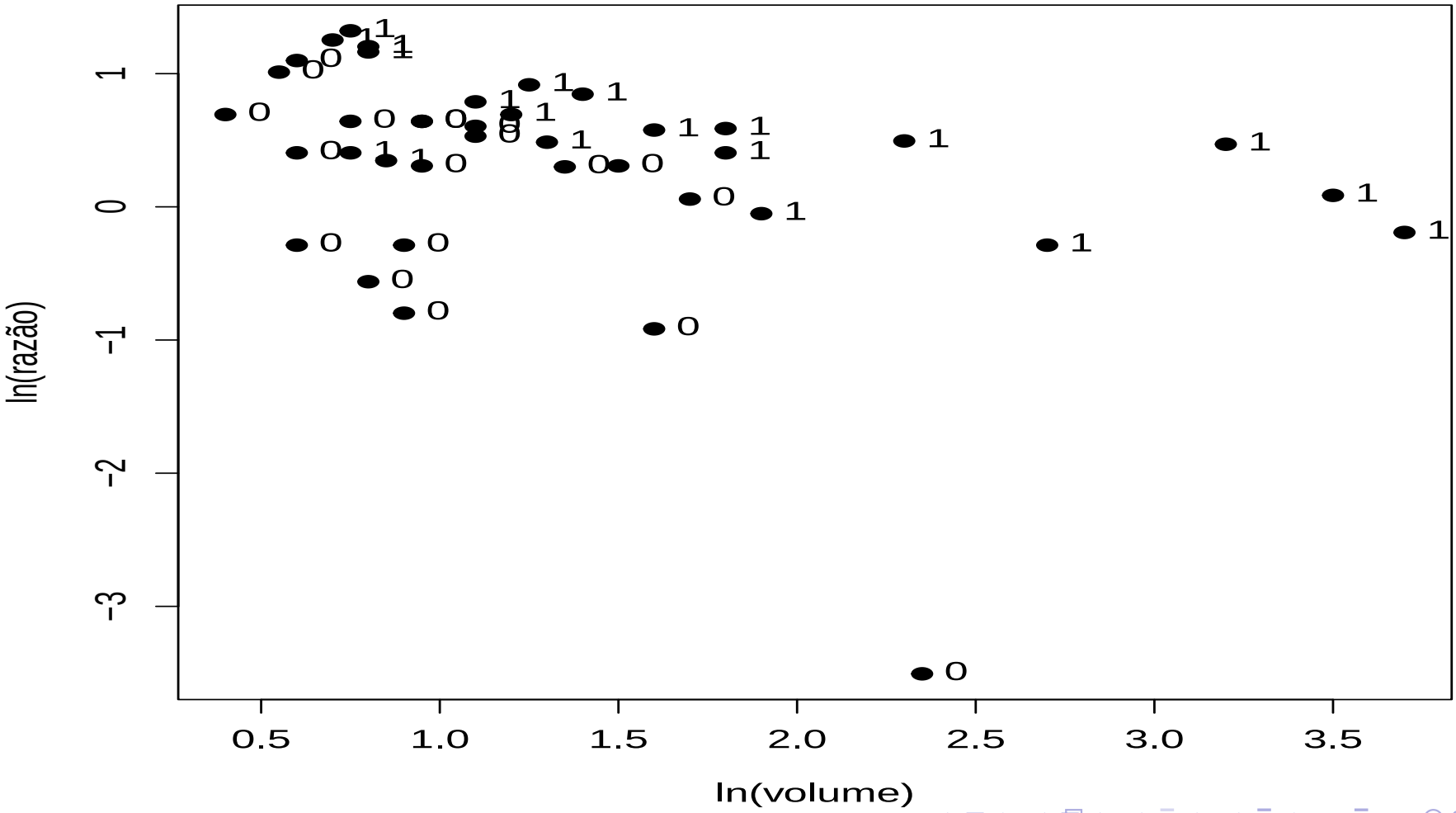




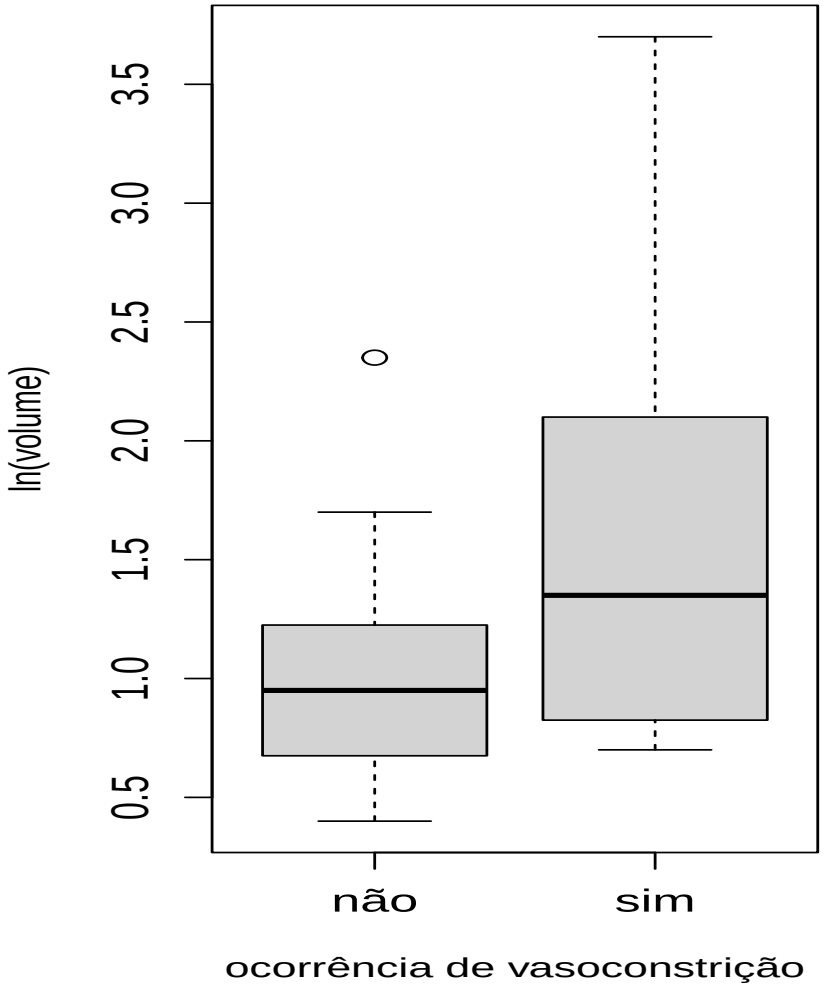


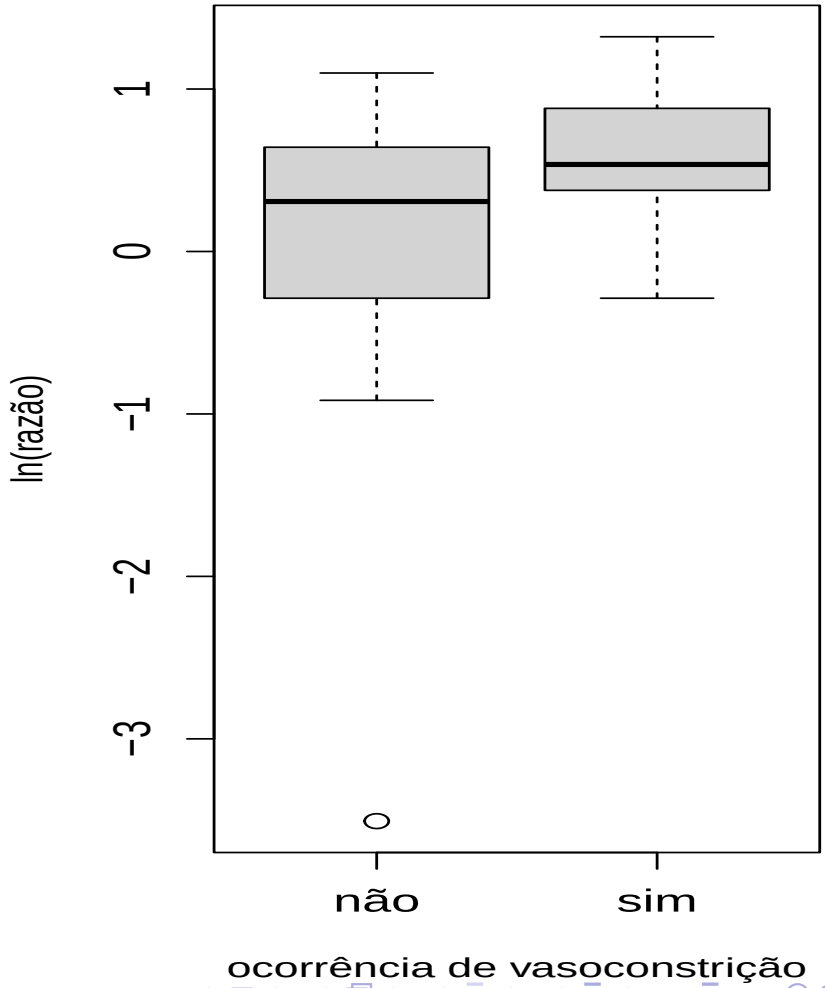


Gráficos de dispersão: ln (razão) $\times$ ln(volume)



Distribuições: ln (razão) × ln(volume)





Medidas resumo ln (razão) e ln(volume)

	ln(volume)		ln(razão)	
	Resposta			
Medida resumo	0	1	0	1
Média	-0,06	0,37	0,05	0,58
Mediana	-0,05	0,30	0,31	0,54
DP	0,45	0,54	1,03	0,46
Var.	0,20	0,29	1,07	0,22
|CV(%)|	723,00	147,00	2223,00	81,00
Min.	-0,92	-0,36	-3,51	-0,29
Max.	0,85	1,31	1,10	1,30
ca	0,14	0,29	-2,23	-0,13
curt	2,5	1,9	8,4	2,3

Observações

- A resposta é binária, logo é inviável não assumir distribuição Bernoulli para a variável resposta.
- O ajuste de um MRNLH levará a inferências inapropriadas.
- Ademais a média da variávei resposta jaz no intervalo (0,1). Tal característica deve, necessariamente, ser considerada.

Exemplo 3: tempo de sobrevivências de bactérias

- Os dados correspondem ao número de bactérias sobreviventes em amostras de um produto alimentício segundo o tempo (em minutos) de exposição do produto à uma temperatura de $300^{o}F$.
- Resposta: número (contagem) de bactérias sobreviventes.
- Variável explicativa: tempo de exposição.
- Nessas amostras foram feitas 12 medições, a cada minuto, contabilizando a quantidade de bactérias vivas (do total original) sobreviventes.
- Novamente temos uma situação de medidades repetidas e, assim, as observações podem ter algum tipo de dependência.

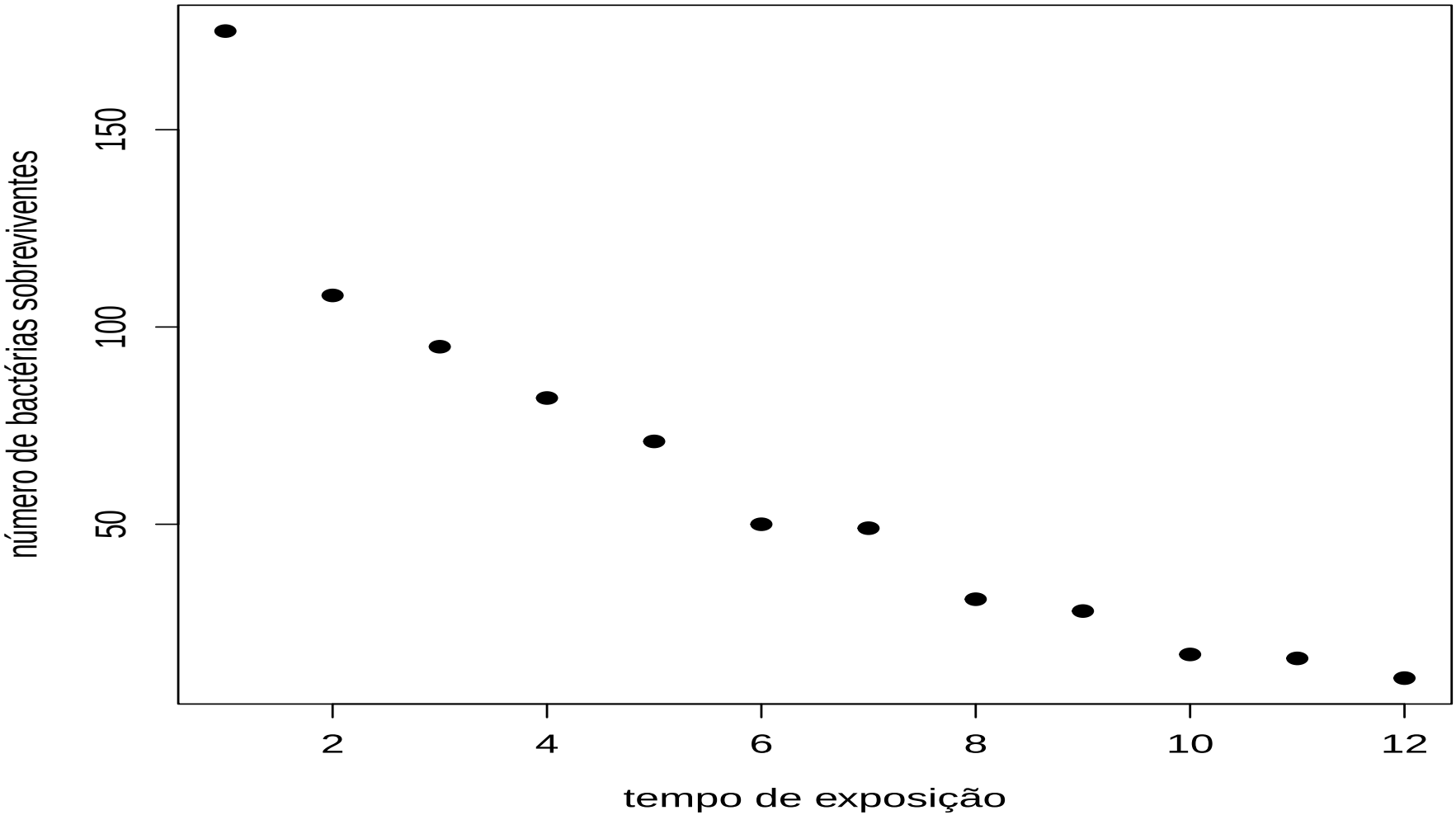
Dados oriundos do experimento

número	175	108	95	82	71	50	49	31	28	17	16	11
tempo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

número: número de bactérias sobreviventes;

tempo: tempo decorrido em minutos.

Gráfico de dispersão



Observações

- A resposta é positiva e discreta. Assim, há possibilidade dela apresentar heterocedasticidade em função da variável explicativa.
- Considerar um MRNLH pode ser problemático uma vez que tal metodologia requer normalidade e homocedasticidade da resposta.

Observações

- Ademais, assumir normalidade para a resposta levará à um modelo que atribui probabilidades positivas de ocorrência a valores os quais não podem ser observados (negativos e não inteiros). Por outro lado, atribui probabilidade zero para eventos que são observados (valores pontuais).
- Além disso, a linearidade imposta entre a média e a variável explicativa (fator) pode levar à valores negativos para as médias preditas.
- Também, a relação entre a resposta e a variável explicativa parecer ser não linear.

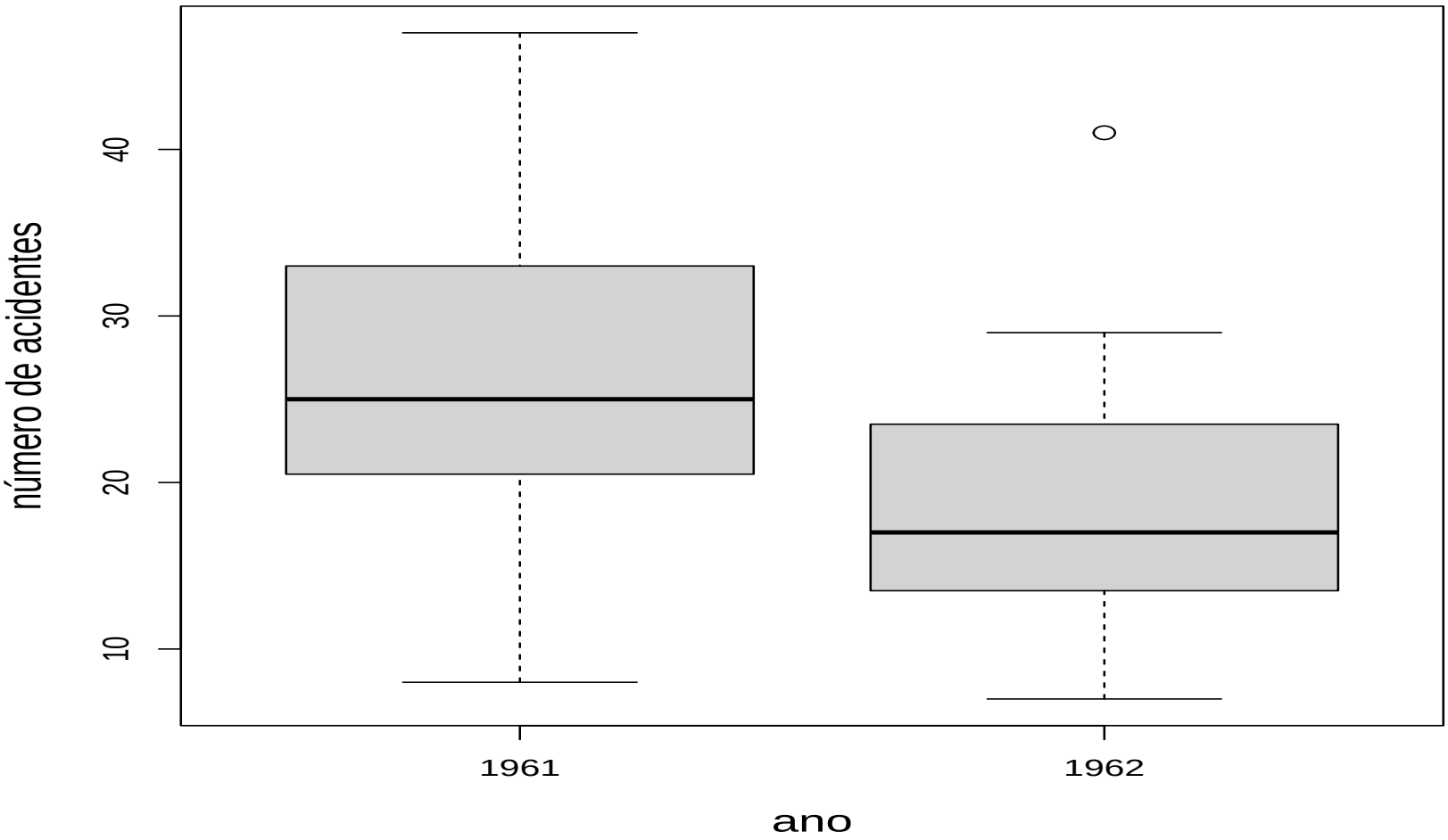
Exemplo 4: comparação do número de acidentes

- Descrição: número de acidentes (com algum tipo de trauma para as pessoas envolvidas) em 92 dias (correspondentes) em dois anos distintos (1961 e 1962), medidos em algumas regiões da Suécia.
- Considerou-se apenas 43 dias, correspondendo a dias de 1961 em que não havia limite de velocidade e de 1962 em que havia limites de velocidade (90 ou 100 km/h).

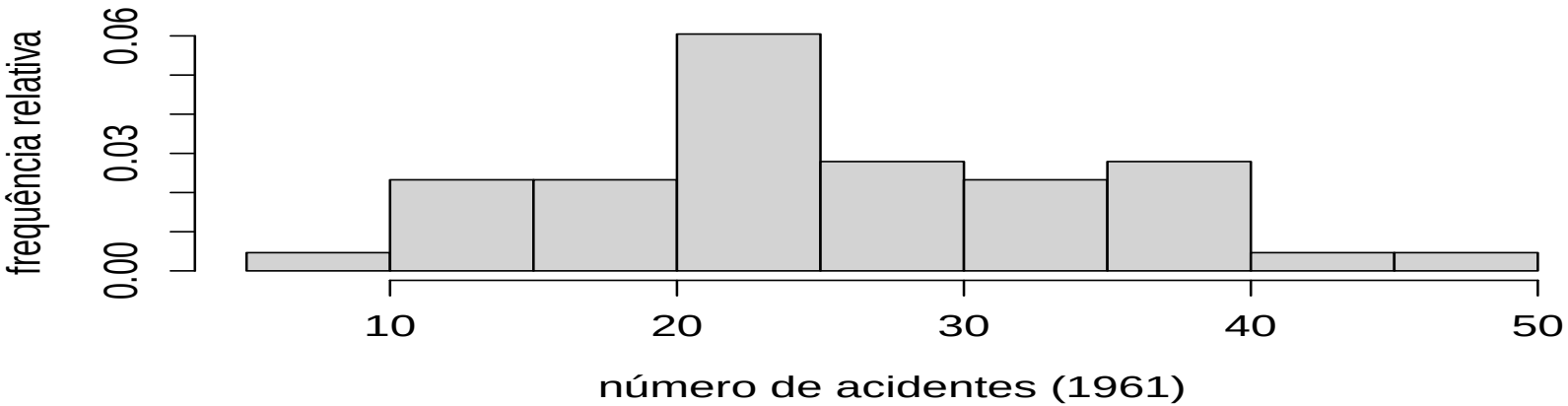
Exemplo 4: comparação do número de acidentes

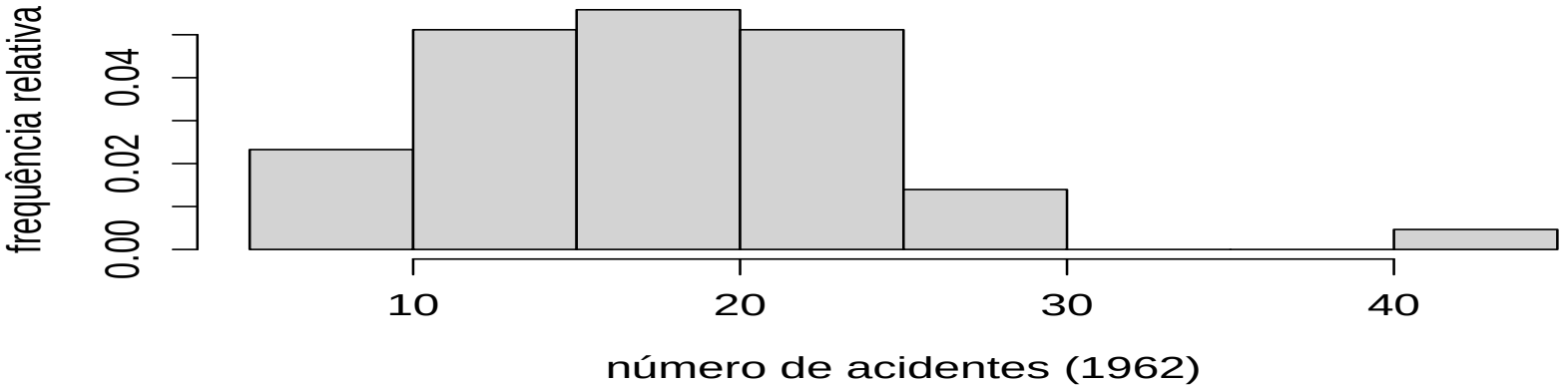
- Resposta: número de acidentes.
- Variável explicativa: ano (presença/ausência de limite de velocidade).
- Questão de interesse: a imposição dos limites de velocidade levou à redução do número de acidentes?

Boxplots do número de acidentes por ano



Histogramas do número de acidentes por ano





Medidas Resumo

Ano	Média	Var.	DP	CV(%)	Mín.	Med.	Máx.	CA	Curt.
1961	26,05	82,66	9,09	34,91	8,00	25,00	47,00	0,31	2,40
1962	18,05	44,71	6,69	37,05	7,00	17,00	41,00	0,90	4,43

Considerações

- Podemos concluir que faz-se necessário a utilização de metodologias (modelos de regressão) mais apropriados para se analisar os conjuntos de dados apresentados anteriormente.
- Nos concetraremos na classe de modelos de regressão lineares generalizados, ou simplesmente modelos lineares generalizados (MLG) (e algumas generalizados/modificações dessa classe), proposta por Nelder e Wedderburn (1972).

Considerações

- Cálculo diferencial integral (Cálculo I, Cálculo II).
- Álgebra de matrizes (livro, livro).
- Métodos computacionais (notas de aula, livro).
- Probabilidade (família exponencial).
- Inferência.