Família exponencial

Prof. Caio Azevedo

Introdução aos MLG

- A classe (mais simples) dos MLG é definida, essencialmente, por duas componentes, a saber:
  - A distribuição da variável resposta, a qual deve pertencer à família exponencial (parte aleatória).
  - Uma função de ligação, a qual associa, de forma adequada, a média da variável resposta (μ_i) à um preditor linear ($g(\mu_i) = \boldsymbol{X}_i'\boldsymbol{\beta}$).
  - Portanto, a classe de MRNLH é uma caso particular dos MLG (exercício).

Família exponencial (FE) bi-paramétrica

- Dizemos que uma v.a. Y (discreta ou contínua) pertence à família exponencial biparamétrica, nesse caso usaremos a notação

$$Y \sim FE(\theta, \phi),$$

se sua fdp é dada por:

$$f_Y(y; \theta, \phi) = exp\left\{\phi\left[y\theta - b(\theta)\right] + c(y, \phi)\right\} \mathbb{1}_A(y). \quad (1)$$

Família exponencial (FE) bi-paramétrica

- (cont.) em que $\theta \in \Theta \subset \mathcal{R}$ (espaço paramétrico de θ), $b(\theta) : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$, $c(y, \phi) : A \times \mathcal{R}^{+} \rightarrow \mathcal{R}$, A é um conjunto que não depende nem de θ nem de ϕ (esta é uma das condições de regularidade) e, por sua vez, $\phi \, (\phi > 0)$ é o parâmetro de precisão.
- Também trabalharemos com distribuições pertencentes à família exponencial uniparamétrica, ou seja, se $\phi = 1$. Nesse caso usamos $Y \sim FE(\theta)$.

Comentários

- Diversas distribuições pertencem à essa classe, p.e.: normal, normal inversa, gama (exponencial), Poisson, binomial (Bernoulli), binomial negativa (sob certas circunstâncias), dentre outras.
- Há diversas outras classes de distribuições: família Tweedie, família de localização-escala, mistura de escala, mistura de localização-escala, família elíptica, dentre outras.
- Na maior parte do curso, nos concentraremos em distribuições pertencente à FE.

Comentários

- Quando a média (valor esperado) não aparecer explicitamente na fdp (função de probabilidade, caso discreto; função densidade de probabilidade, ou simplesmente, densidade, caso contínuo), reparametrizaremos-na de modo a deixar a média explícita.
- Podemos também utilizar a notação $f_Y(.)$ para designar uma fdp, ou seja, sem especificar seus parâmetros.

Propriedades

- Se $Y \sim FE(\theta, \phi)$, então:
  - $\mathcal{E}(Y) = \mu = b'(\theta) = \dfrac{\partial b(\theta)}{\partial \theta}$.
  - $\mathcal{V}(Y) = \phi^{-1} V(\mu)$, em que $V(\mu) = \dfrac{d\mu}{d\theta} = b''(\theta) = \dfrac{\partial^2 b(\theta)}{\partial \theta^2}$ (por isso ϕ é chamado de parâmetro de precisão, pois quanto maior seu valor, menor será a variância). $V(.)$ é chamada de função de variância.
- Vamos provar as duas propriedades acima, para o caso contínuo. A prova para o caso discreto é análoga, substituindo-se as integrais por somatórios. Utilizaremos a notação $f_Y(y; \theta, \phi) \equiv f_Y(y)$

Propriedades

- Sob certas condições de regularidade, temos que
$\mathcal{E}\left(\frac{\partial \ln f_Y(Y)}{\partial \theta}\right) = 0$ e $\mathcal{E}\left(\frac{\partial^2 \ln f_Y(Y)}{\partial \theta^2}\right) = -\mathcal{E}\left[\left(\frac{\partial \ln f_Y(Y)}{\partial \theta}\right)^2\right]$.
- (Primeira igualdade) Temos que :

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}\left(\frac{\partial \ln f_Y(Y)}{\partial \theta}\right) &= \int_A \frac{\partial \ln f_Y(y)}{\partial \theta} f_Y(y)dy \\
&= \int_A \frac{\partial f_Y(y)}{\partial \theta}\frac{1}{f_Y(y)} f_Y(y)dy = \int_A \frac{\partial f_Y(y)}{\partial \theta} dy \\
&\overset{*}{=} \frac{\partial}{\partial \theta}\underbrace{\int_A f_Y(y)dy}_{1} = \frac{\partial}{\partial \theta} 1 = 0.
\end{aligned} \tag{2}
$$

* sob as condições de regularidade.

Propriedades

- Por outro lado, note que (regra da derivada do quociente)

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \ln f_Y(y)}{\partial \theta^2} &= \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial \ln f_Y(y)}{\partial \theta}\right) = \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial f_Y(y)}{\partial \theta}\frac{1}{f_Y(y)}\right) \\
&= \left[\frac{\partial^2 f_Y(y)}{\partial \theta^2} f_Y(y) - \left(\frac{\partial f_Y(y)}{\partial \theta}\right)^2\right]\frac{1}{f_Y^2(y)} \\
&= \frac{\partial^2 f_Y(y)}{\partial \theta^2}\frac{1}{f_Y(y)} - \left(\frac{\partial f_Y(y)}{\partial \theta}\right)^2 \frac{1}{f_Y(y)^2} \\
&= \frac{\partial^2 f_Y(y)}{\partial \theta^2}\frac{1}{f_Y(y)} - \left(\frac{\partial \ln f_Y(y)}{\partial \theta}\right)^2. \qquad (3)
\end{aligned}
$$

- (Segunda igualdade) Tomando o valor esperado de (3), vem que (* sob as condições de regularidade.):

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}\left(\frac{\partial^2 \ln f_Y(Y)}{\partial\theta^2}\right) &= \int_A \frac{\partial^2 \ln f_Y(y)}{\partial\theta^2} f_Y(y)dy \\
&= \int_A \left(\frac{\partial^2 f_Y(y)}{\partial\theta^2}\frac{1}{f_Y(y)} - \left(\frac{\partial \ln f_Y(y)}{\partial\theta}\right)^2\right) f_Y(y)dy \\
&= \int_A \frac{\partial^2 f_Y(y)}{\partial\theta^2} dy - \int_A \left(\frac{\partial \ln f_Y(y)}{\partial\theta}\right)^2 f_Y(y)dy \\
&\overset{*}{=} \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\underbrace{\int_A f_Y(y)dy}_{1} - \mathcal{E}\left[\left(\frac{\partial \ln f_Y(y)}{\partial\theta}\right)^2\right] \\
&= \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} 1 - \mathcal{E}\left[\left(\frac{\partial \ln f_Y(y)}{\partial\theta}\right)^2\right] = -\mathcal{E}\left[\left(\frac{\partial \ln f_Y(y)}{\partial\theta}\right)^2\right].
\end{aligned} \tag{4}
$$

- Por (2), temos também que:

$$\mathcal{V}\left(\frac{\partial \ln f_Y(Y)}{\partial\theta}\right) = \mathcal{E}\left[\left(\frac{\partial \ln f_Y(Y)}{\partial\theta}\right)^2\right] - \left[\underbrace{\mathcal{E}\left(\frac{\partial \ln f_Y(Y)}{\partial\theta}\right)}_{0}\right]^2$$

$$= \mathcal{E}\left[\left(\frac{\partial \ln f_Y(Y)}{\partial\theta}\right)^2\right] = -\mathcal{E}\left(\frac{\partial^2 \ln f_Y(Y)}{\partial\theta^2}\right) \quad (5)$$

- Voltando à fdp da FE (Equação (1)), temos que

$$\frac{\partial \ln f_Y(y)}{\partial\theta} = \phi\left[y - b'(\theta)\right]. \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 \ln f_Y(y)}{\partial\theta^2} = -\phi b''(\theta). \quad (7)$$

- De (2) em (6), vem que:

$$\mathcal{E}\left(\frac{\partial \ln f_Y(y)}{\partial \theta}\right) = \mathcal{E}\left[\phi\left(Y - b'(\theta)\right)\right] = 0$$
$$\rightarrow \mathcal{E}(Y) = b'(\theta).$$

- De (4) e (5) em (7), temos que:

$$\mathcal{V}\left(\frac{\partial \ln f_Y(Y)}{\partial \theta}\right) = -\mathcal{E}\left(\frac{\partial^2 \ln f_Y(Y)}{\partial \theta^2}\right)$$
$$\rightarrow \mathcal{V}\left[\phi\left(Y - b'(\theta)\right)\right] = -\mathcal{E}\left(-\phi b''(\theta)\right)$$
$$\rightarrow \phi^2 \mathcal{V}(Y) = \phi b''(\theta) \rightarrow \mathcal{V}(Y) = b''(\theta)\phi^{-1}.$$

Exemplo: Poisson

- Seja $Y \sim \text{Poisson}(\lambda)$, $\lambda > 0$, então $A = \{0, 1, 2, ...\}$ e

$$
\begin{aligned}
f_Y(y) &= \frac{e^{-\lambda}\lambda^y}{y!} = exp\left\{y\ln(\lambda) - \lambda - \ln(y!)\right\} \\
&= exp\left\{\phi\left[y\theta - b(\theta)\right] + c(y,\phi)\right\}
\end{aligned}
$$

em que $\theta = \ln(\lambda), b(\theta) = exp(\theta), \phi = 1, c(y,\phi) = -\ln(y!)$

Exemplo: Binomial

- Seja Y^* a proporção de sucessos em n ensaios de Bernoulli independentes. Logo, temos que $nY^* \sim \text{binomial}(n, \mu)$. Nesse caso $\mathcal{E}(Y^*) = \mu, \mu \in (0,1)$. Além disso, em termos da distribuição de Y^* (exercício), temos que $A = \{0, 1/n, 2/n, ..., 1\}$ e

$$\begin{aligned} f_{Y^*}(y^*) &= \binom{n}{ny^*}\mu^{ny^*}(1-\mu)^{n-ny^*} = \exp\left\{\ln\binom{n}{ny^*} + ny^*\ln\left(\frac{\mu}{1-\mu}\right)\right. \\ &+ \left. n\ln(1-\mu)\right\} = \exp\left\{n\left[y^*\ln\left(\frac{\mu}{1-\mu}\right) + \ln(1-\mu)\right]\right. \\ &+ \left.\ln\binom{n}{ny^*}\right\} = \exp\left\{\phi\left[y\theta - b(\theta)\right] + c(y,\phi)\right\} \end{aligned}$$

Exemplo: Binomial

- (Cont.) em que
  $\theta = \ln\left(\frac{\mu}{1-\mu}\right), b(\theta) = \ln(1+e^{\theta}), \phi = n, c(y^*, \phi) = \ln\binom{\phi}{\phi y^*}$.
- Se n $= 1$, $Y^* = Y \sim$ Bernoulli(μ).

Exemplo: Normal

- Seja $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$, temos que $A = (-\infty, \infty)$, $\mu \in (-\infty, \infty), \sigma^2 \in (0, \infty)$ e

$$
\begin{aligned}
f_Y(y) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(y-\mu)^2\right\} \\
&= \exp\left\{\frac{1}{\sigma^2}\left(\mu y - \frac{\mu^2}{2}\right) - \frac{1}{2}\left[\ln(2\pi\sigma^2) + \frac{y^2}{\sigma^2}\right]\right\} \\
&= \exp\left\{\phi\left[y\theta - b(\theta)\right] + c(y,\phi)\right\}
\end{aligned}
$$

em que $\theta = \mu, b(\theta) = \frac{\theta^2}{2}, \phi = \sigma^{-2}, c(y,\phi) = \frac{1}{2}\ln(\phi/2\pi) - \frac{\phi y^2}{2}$.

Exemplo: gama

- Usualmente consideramos $Y \sim \text{gama}(a, b), a, b > 0$, em que $\mathcal{E}(Y) = ab$, $\mathcal{V}(Y) = ab^2$ e $A = (-\infty, \infty)$. Nesse caso $f(Y) = \frac{1}{\Gamma(a)b^a} y^{a-1} e^{-y/b}$.
- Contudo, consideraremos uma outra parametrização que consiste em escrever a fdp de Y em termos de $\mu = \mathcal{E}(Y)$ e do parâmetro de precisão ϕ (exercício), de modo que

$$CV(Y) = DP(Y)/\mathcal{E}(Y) = \phi^{-1/2},$$

o que implica que

$$\mathcal{V}(Y) = V(\mu)/\phi.$$

Exemplo: Gamma

- Assim:

$$
\begin{aligned}
f_Y(y) &= \frac{1}{\Gamma(\phi)}\left(\frac{\phi y}{\mu}\right)^{\phi}\exp\left\{-\frac{\phi y}{\mu}\right\}y^{-1} = \exp\Bigg\{\phi\left[-\frac{y}{\mu}-\ln(\mu)\right] \\
&- \ln\Gamma(\phi)+\phi\ln(\phi y)-\ln(y)\Bigg\} = \exp\Bigg\{\phi\left[-\frac{y}{\mu}-\ln(\mu)\right] \\
&+ (\phi-1)\ln(y)+\phi\ln(\phi)-\ln\Gamma(\phi)\Bigg\} \\
&= \exp\left\{\phi\left[y\theta-b(\theta)\right]+c(y,\phi)\right\}
\end{aligned}
$$

Exemplo: Gamma

- (cont.) em que $\theta = -1/\mu$, $b(\theta) = -\ln(-\theta)$ e $c(y, \phi) = (\phi - 1)\ln(y) + \phi \ln(\phi) - \ln \Gamma(\phi)$.
- Se $\phi = 1$, então $Y \sim exp(\mu)$.
- Se $\phi = k/2$ e $\mu = k$, então $Y \sim \chi^2_{(k)}$.

Exemplo: normal inversa

- Seja $Y \sim NI(\mu, \phi), \mu, \phi > 0$, então $A = (0, \infty)$ e

$$f_Y(y) = \frac{\phi^{1/2}}{\sqrt{2\pi y^3}} \exp\left\{-\frac{\phi(y-\mu)^2}{2\mu^2 y}\right\}.$$

- Exercício: colocar na forma da família exponencial.

Principais distribuições pertencentes à FE

Distribuição	$b(\theta)$	θ	ϕ	$V(\mu)$
Normal	$\theta^2/2$	μ	σ^{-2}	1
Poisson	e^θ	$\ln \mu$	1	μ
Binomial	$\ln(1+e^\theta)$	$\ln(\mu/(1-\mu))$	n	$\mu(1-\mu)$
Gama	$-\ln(-\theta)$	$-1/\mu$	$1/(CV^2)$	μ^2
N.Inversa	$-\sqrt{-2\theta}$	$-1/2\mu^2$	ϕ	μ^3

OBS: θ é chamado de parâmetro canônico.