Técnicas de Contagem

Exemplo

Para a Copa do Mundo 24 países são divididos em seis grupos, com 4 países cada um. Supondo que a escolha do grupo de cada país é feita ao acaso, calcular a probabilidade de que dois países determinados A e B se encontrem no mesmo grupo. (Na ealidade a escolha não é feita de forma completamente aleatória.)
Fonte: Morgado, Carvalho, Carvalho & Fernandez, Análise Combinatória e Probabilidade, pág 125.

Técnicas de Contagem

Vamos tomar como espaço amostral o conjunto de todas as permutações de 24 elementos; ou seja **o número de casos possíveis é 24!**. Agora, cada um dos 24 times serão divididos em 6 grupos de 4 times.

I	II	III	IV	V	VI
●●●●	●●●●	●●●●	●●●●●	●●●●	●●●●

Quantas permutações existem tais que A e B pertençam ao mesmo grupo? Tome primeiro o grupo I. A pode ser colocado em 4 lugares; restam para B 3 lugares no mesmo grupo, e os times restantes podem ser dispostos de 22! maneiras diferentes.

Técnicas de Contagem

Portanto o número de permutações com A e B no primeiro grupo é

$$4 \cdot 3 \cdot 22!$$

E como temos 6 grupos, a probabilidade procurada é igual ao número de casos favoráveis sobre os possíveis, ou simplesmente

$$\frac{6 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 22!}{24!} = \frac{3}{23} \approx 0{,}13$$

Probabilidade Condicional

Exemplo

Consideremos dois dados: um deles equilibrado, com $P(\{1\}) = \ldots = P(\{6\}) = 1/6$, e outro viciado, com $P(\{1\}) = 1/2$ e $P(\{2\}) = \ldots = P(\{6\}) = 1/10$. Escolhe-se um dos dados ao acaso e se efetuam dois lançamentos, obtendo-se dois uns. Qual a probabilidade condicional de que o dado escolhido tenha sido o viciado?

Fonte: Morgado, Carvalho, Carvalho & Fernandez, Análise Combinatória e Probabilidade, pág 148.

Probabilidade Condicional

Temos que cada dado é escolhido com $1/2$ de probabilidade. A probabilidade de observar $\{1, 1\}$ em dois lançamentos de um dado não viciado é $1/6 \cdot 1/6 = 1/36$. Para o dado viciado, temos que essa probabilidade é igual a $1/2 \cdot 1/2 = 1/4$.

A probabilidade do evento $E =$"observar dois uns" é dada pela união dos eventos $E_1 =$"sortear o dado viciado e observar dois uns" e $E_2 =$"sortear o dado equilibrado e observar dois uns". Ou seja,

$$P(E) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{36} = \frac{5}{36}$$

Probabilidade Condicional

A probabilidade do dado escolhido ser o viciado, dado que se observou dois uns, é dada por

$$\frac{P(\text{“sortear o dado viciado e observar dois uns”})}{P(\text{“observar dois uns”})} = \frac{1/8}{5/36} = \frac{9}{10}$$

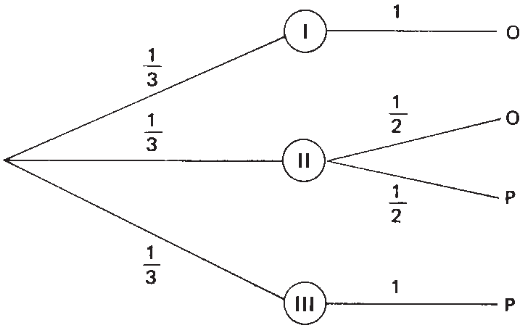
Probabilidade Condicional

Exemplo

Esse problema é conhecido como *Problema da moeda de Bertrand*. Existem três caixas idênticas. A primeira contém duas moedas de ouro, a segunda contém uma de ouro e outra de prata, e a terceira contém duas moedas de prata. Uma caixa é selecionada ao acaso e da mesma é escolhida uma moeda ao acaso. Se a moeda é de ouro, qual a probabilidade de que a outra moeda da caixa escolhida também seja de ouro?
Fonte: Hazzan, Matemática Elementar: Combinatória e Probabilidade, pág 104-E.

Probabilidade Condicional

Considere o diagrama:



Probabilidade Condicional

Note que o problema pode ser reformulado da seguinte forma: "Se a moeda sorteada é de ouro, qual a probabilidade de que ela tenha vindo da caixa I?", pois a caixa I é a única que contém duas moedas de ouro.

Sejam os eventos:

- C_I: A caixa sorteada é a I.
- C_{II}: A caixa sorteada é a II.
- C_{III}: A caixa sorteada é a III.
- O: A moeda sorteada é de ouro.

Probabilidade Condicional

Novamente note que $\Omega = C_I \cup C_{II} \cup C_{III}$, e consequentemente

$$P(O) = P(C_I \cap O) + P(C_{II} \cap O) + P(C_{III} \cap O)$$

$$P(O) = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$$

Como $P(C_I \cap O) = 1/3$, temos simplesmente que

$$P(C_I | O) = \frac{P(C_I \cap O)}{P(O)} = \frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3}$$

Ou seja, a probabilidade de que a outra moeda também seja de ouro é de $2/3$.

Independência

Exemplo

Dizemos que os eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são independentes se $P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \ldots P(A_{i_k})$. Para apenas dois eventos, A e B, isso significa que A e B são independentes se $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Mostre um caso $n = 3$ onde vale a independência 2 a 2, mas os eventos não são independentes. *Fonte: Morgado, Carvalho, Carvalho & Fernandez*, Análise Combinatória e Probabilidade, pág 154.

Independência

Considere o espaço amostral $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, e defina $P(\omega_i) = 1/4$, para $i = 1, 2, 3, 4$. Defina agora os eventos $A = \{\omega_1, \omega_3\}$, $B = \{\omega_2, \omega_3\}$ e $C = \{\omega_3, \omega_4\}$. Temos que $P(A) = P(B) = P(C) = 1/2$. Além disso,

$$P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = \frac{1}{4}$$

ou seja, os eventos são, dois a dois, independentes. Contudo,

$$P(A \cap B \cap C) = P(\{\omega_3\}) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = P(A)P(B)P(C)$$

Independência

Exemplo

Um jogador deve enfrentar, em um torneiro, dois outros, chamados A e B. Os resultados dos jogos são independentes e as probabilidades dele ganhar de A e de B são $1/3$ e $2/3$, respectivamente. O jogador vencerá o torneio se ganhar dois jogos consecutivos, de uma série de 3. Que série de jogos é mais favorávl para o jogador: ABA ou BAB?
Fonte: Morgado, Carvalho, Carvalho & Fernandez, Análise Combinatória e Probabilidade, pág 155.

Independência

A probabilidade do jogador vencer se escolher a primeira série é (i) ganha de A, ganha de B ou (ii) perde para A, ganha de B e ganha de A. Ou seja,

$$P(ABA) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{10}{27}$$

A probabillidade do jogador vencer se escolher a segunda série BAB é

$$P(BAB) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$$

Independência

A primeira série é mais favorável. Este resultado parece surpreendente pois A é um adversário mais difícil, e o jogador deve enfrentá-lo duas vezes na primeira série.

O que acontece intuitivamente é que o jogo com A na segunda série é decisivo. Na primeira série, o jogador tem duas chances para derrotar A.

Independência

Exemplo

(a) Um dado equilibrado é lançado quatro vezes. Os lançamentos são independentes. Qual a probabilidade de observar a face 6 pelo menos uma vez?

(b) Dois dados equilibrados são lançados simultaneamente, 10 vezes. Os lançamentos são independentes. Qual a probabilidade de observar a dupla de 6 pelo menos uma vez?

Independência

(a) Seja A o evento "observar a face 6 pelo menos 1 vez". Temos que

$$P(A) = 1 - P(A^c),$$

onde A^c é o evento "não observar a face 6 nenhuma vez". Esse evento é mais fácil de determinar a probabilidade, pois cada lançamento é independente, e a probabilidade de não observarmos 6 em algum lançamento é igual a $5/6$.

Aí $P(A^c) = (5/6)^4$, pela independência, e consequentemente $P(A) = 1 - (5/6)^4$.

(b) Considere A o evento "dupla de 6 pelo menos uma vez". Novamente, é mais fácil considerar $A^c =$ "dupla de 6 não é observada nenhuma vez". É sabido que $P(A) = 1 - P(A^c)$. Considere a probabilidade conjunta dos lançamentos $P(\{6, 6\}) = 1/36$, então

$$P(A^c) = (35/36)^{10}$$

E aí $P(A) = 1 - (35/36)^{10}$.

Independência

Exemplo

Peças são produzidas em uma linha de produção. A probabilidade de observar uma peça defeituosa é 0,10. Selecionamos uma amostra de tamanho 10. Qual a probabilidade de obter duas peças defeituosas nesta amostra? As peças são selecionadas independentemente.

Independência

Seja D o evento "peça é defeituosa", e B o evento "peça é boa". Então $P(D) = 0{,}1$ e $P(B) = 0{,}9$. Seja $A =$ "duas peças defeituosas na amostra". Como a ordem em que essas peças são sorteadas não importa, temos que são favoráveis os casos

$$\{DDBBBBBBBB, DBDBBBBBBB, \ldots, BBBBBBBBDD\},$$

ao todo $\binom{10}{2}$ casos. Pela independência, todos tem probabilidade $0{,}1^2 0{,}9^8$. Então $P(A)$ é dada por

$$P(A) = \binom{10}{2} 0{,}1^2 0{,}9^8 = 0{,}19371$$

Exercícios Complementares: Contagem

Exercício

(1) Quantos números diferentes de 4 algarismos distintos existem no sistema decimal de enumeração?

(2) Quantos números impares diferentes de 4 algarismos distintos existem no sistema decimal de enumeração?

(3) Quantos números, compreendidos entre 3000 e 4000, formados de algarismos distintos, podemos formar com os algarismos 2, 3, 4, 6, 8 e 9, de modo que não sejam algarismos repetidos?

Exercícios Complementares: Contagem

Exercício

(4) Num grupo de 5 pessoas, duas são irmãs. O número de maneiras distintas pelas quais elas podem ficar em fila, de modo que as duas irmãs sempre fiquem juntas é igual a?

(5) Quantos números ímpares compreendidos entre 2000 e 7000 podemos formar com os algarismos 2, 3, 4, 6, 8 e 9, de modo que não tenham números repetidos?

Exercícios Complementares: Contagem

Exercício

(6) Sobre uma reta ($R1$) marca-se 7 pontos e sobre uma outra reta ($R2$), paralela a primeira reta, marca-se 4 pontos. Qual o número de triângulos que obtemos unindo 3 dos quaisquer dos 11 pontos?

(7) Em uma reunião há 12 rapazes, 4 dos quais usam óculos e 16 moças, 6 das quais usam óculos. De quantas maneiras possíveis podem ser formados casais para dançar, se quem usa óculos só quer fazer par com quem não usa óculos?

Exercícios Complementares: Contagem

Exercício

(8) Para diminuir o emplacamento de carros roubados, um determinado país resolveu fazer um cadastro nacional, em que as placas são formadas com 3 letras e 4 algarismos, sendo que a primeira letra da placa determina um estado desse país. Considerando o alfabeto com 26 letras, o número máximo de carros que cada estado pode emplacar será

(9) Em um avião de 8 lugares viajam 8 pessoas, das quais 4 tem condições de operar como piloto e co-piloto. De quantas maneiras diferentes estas 8 pessoas podem se distribuir no avião?

Exercícios Complementares: Probabilidade Condicional

Exercício

(1) Um experimento consiste em lançar um dado equilibrado duas vezes, independentemente. Dado que os dois números sejam diferentes, qual é a probabilidade condicional de:

- (1.a) pelo menos um dos números ser 6
- (1.b) a soma dos números ser 8

(2) Sabe-se que de cada 5 pessoas de uma determinada comunidade, uma é portadora de um certo tipo de anemia. Se selecionarmos, ao acaso, 3 pessoas dessa comunidade, qual a probabilidade de pelo menos uma delas seja portadora daquele tipo de anemia?

Exercícios Complementares: Probabilidade Condicional

Exercício

(3) 4 homens e 4 mulheres devem ocupar 8 lugares de um banco. Qual a probabilidade de que nunca fiquem lado a lado duas pessoas do mesmo sexo?

(4) Durante o mês de novembro a probabilidade de chuva é de 0,3. O Brasil ganha o jogo em um dia com chuva com probabilidade de $0,4$, em dia sem chuva com probabilidade 0,6. Se o Brasil ganhou em novembro, qual é a probabilidade de que choveu nesse dia?

Exercícios Complementares: Probabilidade Condicional

Exercício

(5) Pedro quer enviar uma carta para Mariana. A probabilidade de que Pedro escreva a carta é 0,80. A probabilidade de que o correio não a perca é de 0,90. A probabilidade de que o carteiro a entregue é 0,90. Dado que Mariana não recebeu a carta, qual é a probabilidade condicional de que Pedro não a tenha escrito?