# MA093 – Matemática básica 2

## Área de uma região poligonal.

Francisco A. M. Gomes

UNICAMP - IMECC

Agosto de 2018

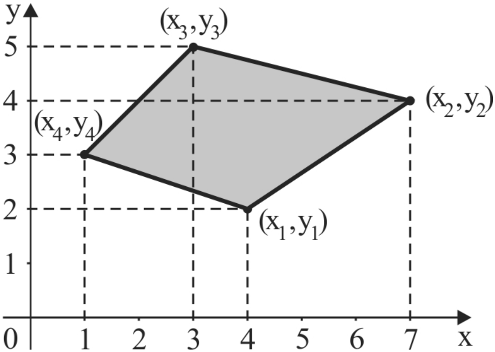
# Roteiro da aula

# Definição do problema

## Área de uma região

Para calcular a área de uma região poligonal é preciso:

1. Numerar os vértices sucessivos no sentido horário ou anti-horário
2. Montar uma tabela com as coordenadas dos vértices




| $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 4 | 7 | 3 | 1 | 4 |
| $y_i$ | 2 | 4 | 5 | 3 | 2 |

# Fórmula da área

## Área de polígono simples

Dadas as coordenadas $(x_i, y_i)$, $i = 1, \ldots, n$ dos vértices sucessivos de um polígono simples, a área do polígono é dada por

$$A = \frac{1}{2} \left| \sum_{i=1}^{n} (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) \right| .$$

# Fórmula da área

## Área de polígono simples

Dadas as coordenadas $(x_i, y_i)$, $i = 1, \ldots, n$ dos vértices sucessivos de um polígono simples, a área do polígono é dada por

$$A = \frac{1}{2}\left|\sum_{i=1}^{n}(x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i)\right|.$$

- Devemos definir $(x_{n+1}, y_{n+1}) = (x_1, y_1)$, ou seja, devemos criar o ponto $n+1$ com as mesmas coordenadas do primeiro.

# Fórmula da área

## Área de polígono simples

Dadas as coordenadas $(x_i, y_i)$, $i = 1, \ldots, n$ dos vértices sucessivos de um polígono simples, a área do polígono é dada por

$$A = \frac{1}{2}\left|\sum_{i=1}^{n}(x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i)\right|.$$

- Devemos definir $(x_{n+1}, y_{n+1}) = (x_1, y_1)$, ou seja, devemos criar o ponto $n+1$ com as mesmas coordenadas do primeiro.
- O somatório dentro do módulo será positivo se os pontos forem ordenados no sentido anti-horário e negativo em caso contrário.

# Exemplo

## Área do quadrilátero da figura anterior

Calcular a área do quadrilátero cujos vértices têm as coordenadas abaixo. As medidas são dadas em centímetros.

| $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 4 | 7 | 3 | 1 | 4 |
| $y_i$ | 2 | 4 | 5 | 3 | 2 |

Aplicando a fórmula a esse conjunto de coordenadas, obtemos

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\left|x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_4 - x_4y_3 + x_4y_5 - x_5y_4\right| \\ &= \frac{1}{2}\left|4\cdot 4 - 7\cdot 2 + 7\cdot 5 - 3\cdot 4 + 3\cdot 3 - 1\cdot 5 + 1\cdot 2 - 4\cdot 3\right| \\ &= \frac{1}{2}\left|16 - 14 + 35 - 12 + 9 - 5 + 2 - 12\right| = 9,5\ \text{cm}^2. \end{aligned}$$

# Área real

## Mudando de escala

- Se o polígono do mapa é a representação de uma região real, podemos encontrar a área verdadeira da região, desde que conheçamos a escala do mapa.
- Nesse caso, devemos multiplicar a área da região traçada no papel pelo quadrado do fator de escala usado.

- No exemplo acima, a região real foi representada usando-se a escala 1:200.000, e obtivemos uma área de $9,5$ cm$^2$.
- Assim, a área real é

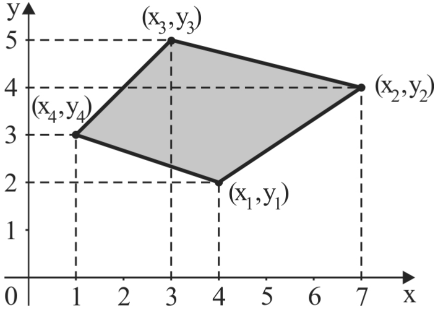
$$
\begin{aligned}
A_{real} &= 9,5 \cdot 200000^2 \text{ cm}^2 = 3,8 \cdot 10^{11} \text{ cm}^2 \\
&= \frac{3,8 \cdot 10^{11}}{10^{10}} \text{ km}^2 = 38 \text{ km}^2.
\end{aligned}
$$

# Roteiro da aula

# Fórmula da área

## Ideia da fórmula

- Calculemos a área do quadrilátero do exemplo acima usando trapézios.
- Para facilitar os cálculos, suponhamos que todos os vértices tenham coordenadas positivas.
- Usemos o vértice mais à esquerda, $(1, 3)$, e o vértice mais à direita, $(7, 4)$, para dividir a fronteira em duas partes, uma inferior e outra superior.



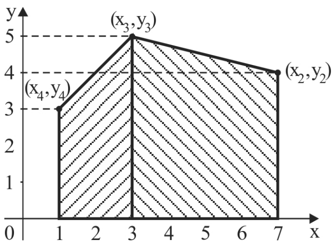
# Regiões inferior e superior

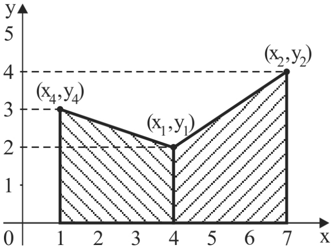
Os vértices que pertencem às partes da fronteira são:

- Superior: $(x_2, y_2) = (7, 4)$, $(x_3, y_3) = (3, 5)$ e $(x_4, y_4) = (1, 3)$.
- Inferior: $(x_4, y_4) = (1, 3)$, $(x_1, y_1) = (4, 2)$ e $(x_2, y_2) = (7, 4)$.

Definimos

- $A_S =$ área da região entre a parte superior e o eixo-$x$;
- $A_I =$ área da região entre a parte inferior e o eixo-$x$;
- $A = A_S - A_I$ (área do polígono).



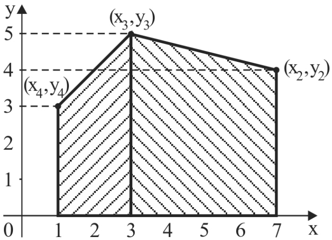
# Área da parte superior

$A_S$ é obtida somando-se as áreas de dois trapézios.

- O primeiro tem bases $y_2$ e $y_3$, e altura $(x_2 - x_3)$.
- O segundo tem bases $y_3$ e $y_4$, e altura $(x_3 - x_4)$.

Sendo assim,

$$\begin{aligned} A_S &= \frac{1}{2}(y_2 + y_3)(x_2 - x_3) + \frac{1}{2}(y_3 + y_4)(x_3 - x_4) \\ &= \frac{1}{2}\left(x_2y_2 + x_2y_3 - x_3y_2 - x_3y_3 + x_3y_3 + x_3y_4 - x_4y_3 - x_4y_4\right). \end{aligned}$$



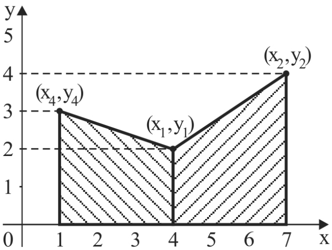
## Área da parte inferior

$A_I$ também é obtida somando-se as áreas de dois trapézios.

- O primeiro tem bases $y_1$ e $y_2$, e altura $(x_2 - x_1)$.
- O segundo tem bases $y_4$ e $y_5$, e altura $(x_5 - x_4)$.

Sendo assim, lembrando que $(x_5, y_5) = (x_1, y_1)$, temos

$$\begin{aligned} A_I &= \frac{1}{2}(y_1 + y_2)(x_2 - x_1) + \frac{1}{2}(y_4 + y_5)(x_5 - x_4) \\ &= \frac{1}{2}\left(x_2y_1 + x_2y_2 - x_1y_1 - x_1y_2 + x_5y_4 + x_5y_5 - x_4y_4 - x_4y_5\right). \end{aligned}$$



# Área do quadrilátero

- Calculando a diferença das áreas, cancelando os termos que somam zero (incluindo os que envolvem $(x_1, y_1)$ e $(x_5, y_5)$) e reordenando os fatores, obtemos

$$
\begin{aligned}
A &= A_S - A_I \\
&= +\frac{1}{2}\left(\cancel{x_2 y_2} + x_2 y_3 - x_3 y_2 - \cancel{x_3 y_3} + \cancel{x_3 y_3} + x_3 y_4 - x_4 y_3 - \cancel{x_4 y_4}\right) \\
&\quad -\frac{1}{2}\left(x_2 y_1 + \cancel{x_2 y_2} - \cancel{x_1 y_1} - x_1 y_2 + x_5 y_4 + \cancel{x_5 y_5} - \cancel{x_4 y_4} - x_4 y_5\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_2 y_3 - x_3 y_2 + x_3 y_4 - x_4 y_3 + x_4 y_5 - x_5 y_4\right),
\end{aligned}
$$

  que é a expressão dada acima para a área desse polígono.

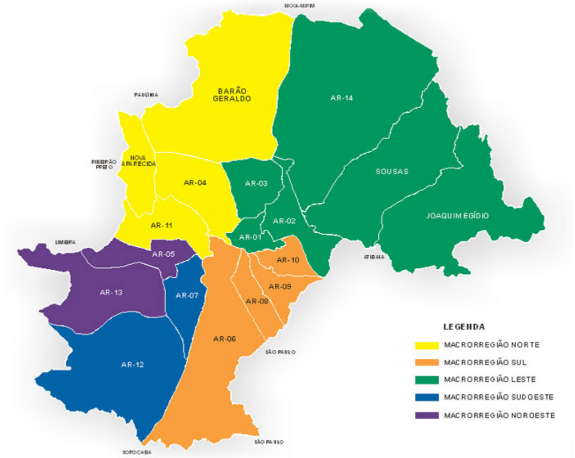
- A demonstração de que a fórmula da área vale para todo polígono simples com $n$ vértices é obtida generalizando-se esse procedimento.

# Roteiro da aula

# Área de Campinas

**Problema**

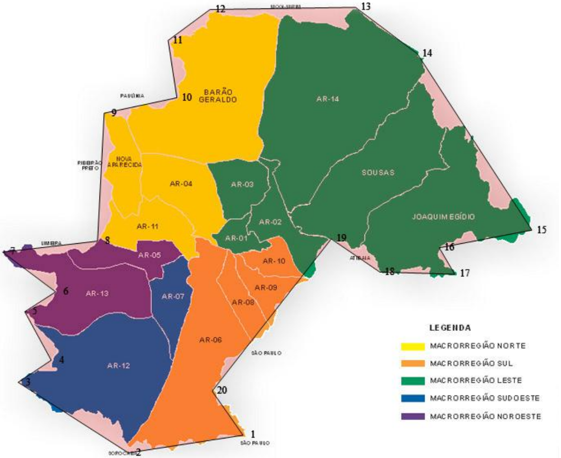
Encontrar a área aproximada do município de Campinas, a partir do mapa ao lado.



# Aproximação da fronteira

**Seleção de pontos**

Escolhendo 20 pontos da fronteira do município, definimos o polígono ao lado.



# Tabulação dos pontos

Agrupando as coordenadas dos pontos escolhidos, obtemos a tabela abaixo.

| $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 10.9 | 5.7 | 0.7 | 2.2 | 1.0 | 2.4 | 0.0 | 4.3 | 4.6 | 7.9 |
| $y_i$ | 0.9 | 0.1 | 3.3 | 4.3 | 6.5 | 7.4 | 9.2 | 9.7 | 15.5 | 16.2 |

| $i$ | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 7.5 | 9.4 | 16.0 | 18.8 | 24.0 | 19.8 | 20.5 | 17.1 | 14.9 | 9.5 |
| $y_i$ | 18.8 | 20.2 | 20.3 | 18.2 | 10.2 | 9.4 | 8.2 | 8.3 | 9.8 | 2.9 |

# Cálculo da área do município

- Aplicando a fórmula, descobrimos que o polígono tem área correspondente a $251,5\ \text{cm}^2$.
- Como nosso mapa tinha escala 1:178.571, a área que obtivemos para Campinas foi

$$A = 251,5 \cdot 178.571^2/10^{10} \approx 801,977\ \text{km}^2.$$

- A área correta do município é igual a $795,697\ \text{km}^2$.
- Cometemos um erro de apenas $6,280\ \text{km}^2$, ou 0,79% do total.
- O erro poderia ter sido menor se tivéssemos considerado mais pontos e se fôssemos mais precisos na determinação das coordenadas.

# Roteiro da aula

# Enunciado do projeto

**Problema**

Calcule aproximadamente a área da região definida no mapa dado.

Passos:

1. Obtenha as coordenadas de, ao menos, 20 pontos da fronteira da região.
2. Ordene os pontos e transfira suas coordenadas para uma planilha.
3. Usando sua planilha, calcule os produtos definidos pela fórmula, tomando cuidado com os sinais.
4. Some os termos e determine a área da região do mapa.
5. Com base na escala fornecida pelo mapa e nas unidades que você adotou para suas coordenadas, calcule a área real.

# Planilha

| $i$ | $x_i$ | $y_i$ | $x_i y_{i+1}$ | $x_{i+1} y_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $x_1$ | $y_1$ | $x_1 y_2$ | $x_2 y_1$ |
| 2 | $x_2$ | $y_2$ | $x_2 y_3$ | $x_3 y_2$ |
| 3 | $x_3$ | $y_3$ | $x_3 y_4$ | $x_4 y_3$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| n | $x_n$ | $y_n$ | $x_n y_1$ | $x_1 y_n$ |
| 1 | $x_1$ | $y_1$ | | |