Nona lista de exercícios

Identidades, equações e transformações trigonométricas.

1. **Determine o valor das demais funções trigonométricas (seno, cosseno e tangente) no ponto x, sabendo que**

   (a) $\mathbf{sen(x) = 5/13}$, **com** $\mathbf{x \in [0, \pi/2]}$.
   (b) $\mathbf{cos(x) = \sqrt{5}/5}$, **com** $\mathbf{x \in [0, \pi/2]}$.
   (c) $\mathbf{tan(x) = 3}$, **com** $\mathbf{x \in [0, \pi/2]}$.
   (d) $sen(x) = 4/5$, com $x \in [\pi/2, \pi]$.
   (e) $tan(x) = -\sqrt{3}$, com $x \in [3\pi/2, 2\pi]$.
   (f) $cos(x) = -1/3$, com $x \in [\pi, 3\pi/2]$.

2. **Simplifique as expressões. (Dica: quando possível, ponha algum termo em evidência**

   (a) $cos(x)tan(x)$.
   (b) $\mathbf{\dfrac{sen(x)}{tan(x)}}$.
   (c) $\mathbf{\dfrac{sen^2(x) - 1}{cot(x)}}$.
   (d) $\mathbf{sen(x)[1 - cos^2(x)] - 2sen^3(x)}$.
   (e) $\mathbf{\dfrac{1}{csc^2(x)} + \dfrac{1}{sec^2(x)}}$.
   (f) $\mathbf{\dfrac{tan(x)}{sec(x)}}$.
   (g) $\mathbf{(cos^2(x) - 1)(1 + cot^2(x))}$.
   (h) $sen^2(x) + cos^2(x) + tan^2(x)$.
   (i) $\mathbf{sen(x)[csc(x) - sen(x)]}$.
   (j) $\mathbf{\dfrac{1}{tan^2(x) + 1}}$.
   (k) $tan^2(x) - tan^2(x)sen^2(x)$.
   (l) $\mathbf{[sen(x) + cos(x)]^2}$.
   (m) $\mathbf{\dfrac{1}{1 + cos(x)} + \dfrac{1}{1 - cos(x)}}$.
   (n) $\mathbf{\dfrac{1 + sen(x)}{cos(x)} + \dfrac{cos(x)}{1 + sen(x)}}$.
   (o) $\dfrac{tan(x)}{1 + cos(x)} + \dfrac{tan(x)}{1 - cos(x)}$
   (p) $tan(x)sen(x) - sec(x)$

3. Prove as identidades abaixo.

   (a) $\dfrac{tan(x)}{sec(x)} = sen(x)$
   (b) $cos(x) + sen(x)tan(x) = sec(x)$
   (c) $[1 + sen(x)][1 - sen(x)] = cos^2(x)$
   (d) $tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) tan(x) = 1$
   (e) $[1 + cot^2(x)]\, cos^2(x) = cot^2(x)$
   (f) $\dfrac{cos(x) - cos(y)}{sen(x) + sen(y)} + \dfrac{sen(x) - sen(y)}{cos(x) + cos(y)} = 0$

4. Mostre que a igualdade

$$sen(x) + cos(x) = 1$$

   não é uma identidade, ou seja, não é válida para todo x. Dica: escolha um valor de x para o qual essa igualdade não é satisfeita.

5. **Usando as fórmulas de adição e subtração de ângulos, determine:**

   (a) $\mathbf{sen(105°)}$.
   (b) $\mathbf{tan(165°)}$.
   (c) $sen(225°)$.
   (d) $\mathbf{cos(-15°)}$.
   (e) $cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)$.
   (f) $tan\left(-\frac{5\pi}{12}\right)$ (obs: $-\frac{5\pi}{12} = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$).

6. **Usando as fórmulas de adição e subtração de ângulos, mostre que:**

   (a) $\mathbf{sen(\pi/2 - x) = cos(x)}$.
   (b) $\mathbf{cos(2\pi + x) = cos(x)}$.
   (c) $tan(\pi + x) = tan(x)$.
   (d) $sen(x - \pi) = -sen(x)$.
   (e) $tan(x - \pi/4) = \frac{sen(x) - cos(x)}{sen(x) + cos(x)}$.
   (f) $\mathbf{tan(\pi - x) = tan(-x)}$.
   (g) $\mathbf{sen(x + \pi/4) = cos(x - \pi/4)}$.
   (h) $sen(x - \pi/2) = cos(\pi - x)$
   (i) $tan(x)cos(-x) = cos(\pi/2 - x)$

7. Determine $sen(x+y)$, $cos(x+y)$ e $tan(x+y)$, sabendo que $sen(x) = 3/5$, $sen(y) = 5/13$, $0 \le x \le \pi/2$ e $0 \le y \le \pi/2$.

8. Sabendo que $sen(\alpha) = 3/5$, $cos(\alpha) = 4/5$, $sen(\beta) = 2\sqrt{5}/5$ e $cos(\beta) = \sqrt{5}/5$, calcule $sen(\alpha - \beta)$ e $cos(\alpha + \beta)$.

9. **Sabendo que** $sen(\theta) = \sqrt{2}/\sqrt{3}$ **e** $\theta \in [0°, 90°]$**, determine, sem usar calculadora, os valores de** $cos(\theta)$ **e** $sen(\theta - 30°)$**.**

10. Sabendo que $cos(x) = 1/\sqrt{5}$ e $0 \leq x \leq \pi/2$, determine, sem usar calculadora, os valores de $sen(x)$ e $tan(x + \pi/4)$.

11. **Supondo que** x **está no primeiro quadrante, determine:**

    (a) $\mathbf{tan(2x)}$**, sabendo que** $\mathbf{tan(x) = 3/4}$.

    (b) $\mathbf{cos(2x)}$**, sabendo que** $\mathbf{cos(x) = 3/5}$.

    (c) $cos(2x)$, sabendo que $sen(x) = 2/3$.

    (d) $sen(2x)$, sabendo que $cos(x) = 4/5$.

12. Resolva as equações abaixo, para x qualquer:

    (a) $sen(x) = \sqrt{3}/2$.

    (b) $cos(x) = 1$.

    (c) $3tan^2(x) = 1$.

    (d) $2cos(x) + 1 = 0$.

    (e) $tan(x) = -1$.

    (f) $sen(x) = 1/4$.

    (g) $sen^2(x) - 1 = 0$.

13. **Resolva as equações abaixo, supondo que** $0 \leq x \leq \pi/2$**.**

    (a) $\mathbf{sen(x) = 3 - 7sen(x)}$

    (b) $\mathbf{\sqrt{3}tan(x) = 2sen(x)}$.

    (c) $sen^2(x) - sen(x) = 0$.

    (d) $2cos^2(x) - cos(x) = 0$.

    (e) $5cos^2(x) - sen^2(x) - 2 = 0$.

    (f) $10cos^2(x) - 7cos(x) + 1 = 0$.

    (g) $[1/2 - sen^2(x)]cos(x) = 0$.

    (h) $\mathbf{(2tan(x) - 3)(2 - sec(x)) = 0}$.

    (i) $\mathbf{3sen(x)tan(x) - \sqrt{3}sen(x) = 0}$.

    (j) $\mathbf{sen^2(x) + 3cos^2(x) - 5 = 0}$;

    (k) $\mathbf{8sen^2(x) - 6sen(x) + 1 = 0}$.

    (l) $\mathbf{2cos(x) - sen^2(x) = 0}$.

    (m) $\mathbf{2sen^2(x)csc(x) - \sqrt{3} = 0}$.

    (n) $2sen^2(x) + 2\sqrt{2}sen(x) - 3 = 0$.

    (o) $\mathbf{8cos^2(x) - 14cos(x) + 3 = 0}$

    (p) $\mathbf{\sqrt{3}tan(x) = 2sen(x)}$

    (q) $\mathbf{5cos^2(x) + 2sen^2(x) = 7/2}$

    (r) $2tan(x)sen(x) - cos(x) = 0$

    (s) $2tan(x)sen(x) - cos(x) - 1 = 0$

    (t) $2tan(x)cos(x) + 3sen^2(x) = 1$

    (u) $\left[csc^2(x) - 1\right] \cdot \dfrac{tan(x)}{cos(x)} = 2$

    (v) $6sen^2(x) + 11cot(x)sen(x) = 9$

    (w) $8 - 6cos^2(x) - 7cos(x)\tan(x) = 0$

    (x) $1 + cos(x)\,tan(x) = 4\,cos^2(x)$

    (y) $11 - 7sen(x) = 10\,cos^2(x)$

14. **Resolva as equações abaixo, supondo que** $0 \leq x \leq \pi/2$**.**

    (a) $sen\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + sen\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{6}}{2}$

    (b) $2cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + 2cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \sqrt{3}$

    (c) $cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 4sen(\pi - x) = -\sqrt{3}$

    (d) $\dfrac{sen(x + \frac{\pi}{3})}{cos(x)} = \sqrt{3}$

15. Mostre que $\dfrac{sen(2x)}{cos(2x) + 1} = tan(x)$.

16. **Resolva as equações abaixo, supondo que** $0 \leq x \leq \pi/2$**.**

    (a) $sen(2x) - cos(x) = 0$.

    (b) $sen(2x) - \sqrt{3}sen(x) = 0$.

    (c) $\mathbf{cos(2x) - cos^2(x) = 0}$.

    (d) $tan(x) + cot(x) = 2$.

    (e) $\mathbf{3sen(2x) - 4sen(x) = 0}$.

    (f) $2sen(2x) - tan(x) = 0$.

    (g) $cos(2x) + 3cos(x) = 1$.

    (h) $\mathbf{2cos(2x) - 4cos(x) = -3}$.

    (i) $\mathbf{2sen(2x)cos(x) - 3sen(x) = 0}$.

    (j) $5sen(x) + \frac{3}{2}sen(2x)tan(x) - 2 = 0$.

    (k) $\dfrac{cos(2x)}{cos^2(x)} = tan^2(x) + \dfrac{1}{3}$

    (l) $\dfrac{2sen(2x)}{cos(x)} + 4tan(x)cos(x) = 16sen^2(x)$

    (m) $\dfrac{sen(2x)}{tan(x)} + sen^2(x) - 2cos(x) = \dfrac{3}{4}$

    (n) $sen(2x)sec(x) - \sqrt{3}tan(x) = 0$

    (o) $sen\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) + \dfrac{sen(x)}{sen(2x)} = 0$

(p) $sen(2x)\,sen(x) - \frac{3}{2}cos(x) = 0$

17. **Resolva as equações abaixo, no intervalo indicado**

(a) $\mathbf{\sqrt{2}sen(2x) - 1 = 0}$, $\quad 0 < x < \pi/4$

(b) $8cos(x/3) + 4 = 0 \quad 0 < x < 3\pi$

(c) $\mathbf{tan(x/5) - \sqrt{3} = 0}$, $\quad 0 < x < 5\pi/2$

(d) $tan^2(2x) = 4, \quad 0 < x < \pi/4$

(e) $\mathbf{sen(6x)cos(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}cos(x) = 0}$, $\quad 0 \leq x \leq \pi/12$

18. Prove as identidades abaixo.

(a) $\frac{2tan(x)}{1+tan^2(x)} = sen(2x)$

(b) $\frac{sen(4x)}{sen(x)} = 4cos(x)cos(2x)$

19. Usando alguma fórmula de arco duplo, determine para que valor de $x \in [0, \pi]$, a função $f(x) = sen(x)cos(x)$ é máxima. Qual o valor de f nesse ponto?

20. Um golfista bate em uma bola com velocidade inicial v_0 e ângulo θ com o plano horizontal. A bola descreve uma trajetória parabólica, dada pelas funções $x(t) = v_0cos(\theta)t$ e $y(t) = v_0sen(\theta)t - gt^2/2$, em que t é o tempo decorrido desde o chute e $g = 9,8m/s^2$ é a aceleração da gravidade. Responda às perguntas abaixo, supondo que $v_0 = 37,8m/s$.

(a) Usando seus conhecimentos sobre parábolas, determine o instante de tempo t no qual a altura da bola é máxima. (Dica: o instante será função de θ).

(b) Com base em sua resposta do item (a), determine a altura máxima da bola.

(c) O alcance da bola depende do ângulo da tacada, θ, sendo dado pela função $a(\theta) = \frac{v_0^2}{g}sen(2\theta)$. Determine o ângulo com que o taco de golfe deve bater na bola para atingir um buraco que está a 142 m de distância.

Fórmulas

- Quocientes e identidades recíprocas.

$$tan(x) = \frac{sen(x)}{cos(x)} \qquad cot(x) = \frac{1}{tan(x)}$$
$$cot(x) = \frac{cos(x)}{sen(x)} \qquad sec(x) = \frac{1}{cos(x)}$$
$$tan(x) = \frac{1}{cot(x)} \qquad csc(x) = \frac{1}{sen(x)}$$

- Identidades Pitagóricas.

$$\begin{aligned} sen^2(x) + cos^2(x) &= 1 \\ tan^2(x) + 1 &= sec^2(x) \\ 1 + cot^2(x) &= csc^2(x) \end{aligned}$$

- Funções pares e ímpares.

$$\begin{aligned} sen(-x) &= -sen(x) \\ cos(-x) &= cos(x) \\ tan(-x) &= -tan(x) \end{aligned}$$

- Fórmulas de adição e subtração;

$$\begin{aligned} sen(a+b) &= sen(a)cos(b) + sen(b)cos(a) \\ sen(a-b) &= sen(a)cos(b) - sen(b)cos(a) \\ cos(a+b) &= cos(a)cos(b) - sen(a)sen(b) \\ cos(a-b) &= cos(a)cos(b) + sen(a)sen(b) \\ tan(a+b) &= \frac{tan(a) + tan(b)}{1 - tan(a)tan(b)} \\ tan(a-b) &= \frac{tan(a) - tan(b)}{1 + tan(a)tan(b)} \end{aligned}$$

- Fórmulas do arco duplo.

$$\begin{aligned} sen(2x) &= 2sen(x)cos(x) \\ cos(2x) &= cos^2(x) - sen^2(x) \\ &= 1 - 2sen^2(x) \\ &= 2cos^2(x) - 1 \\ tan(2x) &= \frac{2tan(x)}{1 - tan^2(x)} \end{aligned}$$

Respostas

1. a. $cos(x) = 12/13$; $tan(x) = 5/12$;
   b. $sen(x) = 2\sqrt{5}/5$; $tan(x) = 2$;
   c. $sen(x) = 3\sqrt{10}/10$; $cos(x) = \sqrt{10}/10$;
   d. $cos(x) = -3/5$; $tan(x) = -4/3$;
   e. $sen(x) = -\sqrt{3}/2$; $cos(x) = 1/2$;
   f. $sen(x) = -2\sqrt{2}/3$; $tan(x) = 2\sqrt{2}$.

2. a. $sen(x)$; b. $cos(x)$;
   c. $-cos(x)sen(x)$; d. $-sen^3(x)$; e. 1;
   f. $sen(x)$; g. -1; h. $sec^2(x)$.
   i. $cos^2(x)$; j. $cos^2(x)$; k. $sen^2(x)$
   l. $1 + 2sen(x)cos(x)$; m. $2csc^2(x)$;
   n. $2sec(x)$; o. $2sec(x)csc(x)$;
   p. $-cos(x)$.

3. ...

4. Para $0 \leq x < 2\pi$, essa igualdade só é válida para $x = 0$ e $x = \pi/2$. Assim, qualquer outro valor de x pode ser usado para mostrar que a igualdade não é uma identidade.

5. a. $(\sqrt{6} + \sqrt{2})/4$; b. $(1 - \sqrt{3})/(1 + \sqrt{3})$;
   c. $-\sqrt{2}/2$; d. $(\sqrt{6} + \sqrt{2})/4$;
   e. $-\sqrt{3}/2$; f. $-2 - \sqrt{3}$.

6. ...

7. $sen(x + y) = 56/65$; $cos(x + y) = 33/65$; $tan(x + y) = 56/33$.

8. $sen(\alpha - \beta) = -\frac{\sqrt{5}}{5}$; $cos(\alpha + \beta) = -\frac{2\sqrt{5}}{25}$

9. $cos(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{3}$; $sen(\theta - 30°) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}$.

10. $sen(x) = \frac{2}{\sqrt{5}}$; $tan(x + \pi/4) = -3$.

11. a. $24/7$; b. $-7/25$;
    c. $1/9$; d. $24/25$.

12. a. $x = \pi/3 + 2k\pi$ e $x = 2\pi/3 + 2k\pi$;
    b. $x = 2k\pi$;
    c. $x = \pi/6 + k\pi$ e $x = -\pi/6 + k\pi$;
    d. $x = 2\pi/3 + 2k\pi$ e $x = -2\pi/3 + 2k\pi$;
    e. $x = -\pi/4 + k\pi$;
    f. $x \approx 0,25268 + 2k\pi$ e $x \approx 2,88891 + 2k\pi$;
    g. $x = \pi/2 + k\pi$.

13. a. $x = arcsen(3/8)$.
    b. $x = 0$ e $x = \pi/6$.
    c. $x = 0$ e $x = \pi/2$.
    d. $x = \pi/3$ e $x = \pi/2$.
    e. $x = \pi/4$.
    f. $x = \pi/3$ e $x = arccos(1/5)$.
    g. $x = \pi/4$ e $x = \pi/2$.
    h. $x = \pi/3$ e $x = arctan(3/2)$.
    i. $x = 0$ e $x = \pi/6$.
    j. Não há solução.
    k. $x = \pi/6$ e $x = arcsen(1/4)$.
    l. $x = arccos(\sqrt{2} - 1)$.
    m. $x = \pi/3$.
    n. $x = \pi/4$.
    o. $x \approx 1.31812$.
    p. $x = 0$ e $x = \pi/6$.
    q. $x = \pi/4$.
    r. $x = arctan(\sqrt{2}/2)$.
    s. $x = arccos(2/3)$.
    t. $x = arcsen(1/3)$
    u. $x = \pi/6$.
    v. $x = arccos(1/3)$.
    w. $x = \pi/6$ e $x = arcsen(2/3)$.
    x. $x = arcsen(3/4)$.
    y. $x = \pi/6$ e $x = arcsen(1/5)$.

14. a. $x = \pi/3$; b. $x = \pi/6$;
    c. $x = arcsin(\sqrt{3}/5)$; d. $x = \pi/3$.

15. ...

16. a. $x = \pi/6$ e $x = \pi/2$;
    b. $x = 0$ e $x = \pi/6$;
    c. $x = 0$; d. $x = \pi/4$;
    e. $x = 0$ e $x = arccos(2/3)$;
    f. $x = 0$ e $x = \pi/3$;
    g. $x = \pi/3$; h. $x = \pi/3$;
    i. $x = 0$ e $x = \pi/6$;
    j. $x = arcsen(1/3)$; k. $x = \pi/6$;
    l. $x = 0$ e $x = \pi/6$;
    m. $x = arccos(1 - \sqrt{3}/2)$;
    n. $x = 0$ e $x = \pi/6$;
    o. $x = \pi/4$;
    p. $x = \pi/2$ e $x = \pi/3$.

17. a. $x = \pi/8$; b. $x = 2\pi$;
    c. $x = 5\pi/3$; d. $x \approx 0,5536$;
    e. $x = \pi/18$.

18. ...

19. $x = \pi/4$.

20. a. $t = 3,857sen(\theta)$;
    b. $72,9sen^2(\theta)$;
    c. $38,45°$.