Undécima lista de exercícios

Operações com matrizes. Determinantes.

1. Sejam dadas as matrizes abaixo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Efetue as operações abaixo, quando possível. Se a operação não puder ser efetuada, explique o motivo.

(a) $A + C$.
(b) $D + C$.
(c) $C + G$.
(d) $E + H$.
(e) $4C$.
(f) $-5E$.
(g) $A - B$.
(h) $2A - 3A$.
(i) $2C + 2D$.
(j) $F - G$.
(k) AB.
(l) BA.
(m) AC.
(n) CA.
(o) CD.
(p) DG.
(q) GD.
(r) FE.
(s) FH.
(t) HF.
(u) HE.
(v) EH.

2. Calcule o produto AX, em que

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

3. Observe que a matriz fornecida no exercício anterior corresponde ao lado esquerdo do sistema linear

$$\begin{cases} 3x & -2y & = & -2 \\ -2x & +4y & = & 12 \end{cases}$$

Assim, podemos escrever esse sistema na forma matricial $AX = B$, bastando para tanto definir

$$B = \begin{bmatrix} -2 \\ 12 \end{bmatrix}.$$

Escreva os sistemas abaixo na forma matricial.

(a) $\begin{cases} x & +y & +z & = & 3 \\ 2x & & +z & = & 3 \\ & +2y & +2z & = & 4 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} -2x & -y & +z & = & 2 \\ 2x & +3y & +z & = & 0 \\ 4x & +y & +2z & = & 5 \end{cases}$

4. Uma indústria petrolífera produz gasolina, óleo diesel e combustível para aviação a partir de dois tipos de óleo, P_1 e P_2. Para cada barril de óleo bruto são produzidas as seguintes quantidades de derivados:

Óleo	gasolina	diesel	c. aviação
P_1	0,35	0,45	0,20
P_2	0,40	0,35	0,25

A companhia vende os derivados pelos seguintes preços por barril

Derivado	Preço (R$)
gasolina	114,00
diesel	171,00
c. aviação	257,00

Monte uma matriz A composta pelos dados da primeira tabela acima, e outra matriz B com os dados da segunda tabela. Em seguida, calcule AB e interprete o significado de cada elemento dessa matriz.

5. É possível tornar triangular uma matriz A usando transformações de Householder, que envolvem o cálculo do produto de A por uma determinada matriz Q. Dadas as matrizes A

e Q abaixo, calcule $B = QA$ e observe o que acontece com a primeira coluna de B.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} 4/5 & 3/5 & 0 \\ 3/5 & -4/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6. Uma indústria fabrica três tipos de cadeiras de madeira: a dobrável, a simples e a com braços. A cadeia produtiva das cadeiras envolve três etapas: corte, montagem e pintura. O tempo gasto, em horas, pelos trabalhadores de cada etapa para a produção de uma cadeira é dado na tabela abaixo

Tipo de cadeira	tempo gasto (h)		
	corte	montagem	pintura
dobrável	0,7	0,5	0,5
simples	0,8	0,4	0,6
c/braços	1,0	0,6	0,7

A empresa possui duas fábricas que produzem os três tipos de cadeira. O custo da hora de mão-de-obra em cada fábrica é dado na tabela abaixo

Etapa da produção	Mão-de-obra (R$/h)	
	Fábrica A	Fábrica B
corte	9	10
montagem	8	9
pintura	10	9

Monte uma matriz A composta pelos dados da primeira tabela acima, e outra matriz B com os dados da segunda tabela. Em seguida, calcule AB e interprete o significado de cada elemento dessa matriz.

7. Verifique que B é a inversa de A efetuando os produtos BA e AB.

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,2 \\ -0,2 & 0,4 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{10} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$

8. Calcule a inversa de cada matriz abaixo.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

(d) $A = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

(e) $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

(f) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

9. Dadas as matrizes abaixo, calcule A^{-1}, bem como o produto $A^{-1}B$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -8 & 4 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$$

10. Sejam dadas as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

(a) Calcule A^{-1}.

(b) Calcule $X = A^{-1}B$.

(c) Mostre que $AX = B$.

11. Sejam dadas as matrizes abaixo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 5 \\ 15 \end{bmatrix}.$$

(a) Calcule A^{-1}.

(b) Calcule $X = A^{-1}B$.

(c) Mostre que $AX = B$.

12. Seja dado um sistema linear na forma matricial $AX = B$. Se A possui inversa, podemos obter a solução do sistema, X, calculando $X = A^{-1}B$, como fizemos no exercício acima. Assim, para cada sistema abaixo

- escreva o sistema na forma matricial;
- calcule A^{-1};
- determine X calculando $A^{-1}B$.

(a) $\begin{cases} 2x & -3y & = & 1 \\ 4x & -2y & = & 6 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 2x & +y & = & 0 \\ 4x & +y & = & -2 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 2x & y & = & 9 \\ -4x & +3y & = & 7 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} 5x & +6y & = & 13 \\ 2x & +4y & = & 10 \end{cases}$

13. Dadas as matrizes abaixo, calcule $A = L \cdot U$, bem como A^{-1}.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad U = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}.$$

14. Dadas as matrizes abaixo, calcule $(AB)^{-1}$.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

15. Uma matriz A é dada pelo produto das matrizes Q e R abaixo, ou seja $A = QR$.

$$Q = \begin{bmatrix} 4/5 & 3/5 \\ -3/5 & 4/5 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

(a) Sabendo que, nesse problema, $Q^{-1} = Q^T$, determine a inversa de Q.

(b) Determine a inversa de R.

(c) Lembrando que $A^{-1} = R^{-1}Q^{-1}$, calcule a inversa de A efetuando esse produto.

16. Calcule os determinantes das matrizes abaixo.

(a) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 3 & 10 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 8 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 3/5 & -2/5 \\ 1/5 & 1/5 \end{bmatrix}$

(f) $\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

(g) $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -8 & -6 & -2 \end{bmatrix}$

(h) $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 \\ -5 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(i) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \\ 5 & -11 & 0 \end{bmatrix}$

(j) $\begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 10 & 7 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$

17. Resolva as equações.

(a) $\begin{vmatrix} x & 3 \\ -3 & x \end{vmatrix} = 25.$

(b) $\begin{vmatrix} (x-1) & 2 \\ 6 & (x-2) \end{vmatrix} = 0.$

(c) $\begin{vmatrix} x & 2 & 0 \\ x & 3 & 7 \\ -2 & -1 & x \end{vmatrix} = 2.$

(d) $\begin{vmatrix} x & 2 & 0 \\ 2 & x & 1 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$

18. Das matrizes do exercício 16, quais têm inversa?

19. Determine o valor de **a** que faz com que o determinante da matriz abaixo seja zero.

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ \mathbf{a} & -4 & 2 \\ 5 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

20. Para que valores de c a matriz abaixo é inversível?

$$\begin{bmatrix} c & 0 & 2 \\ 3 & c & 8 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

21. Seja dada a matriz M e um ponto do plano definido pelo vetor P abaixo.

$$M = \begin{bmatrix} cos(\theta) & -sen(\theta) \\ sen(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Supondo que o ponto P tenha coordenadas $(x, y) = (4, 2)$ e que $\theta = 60°$, calcule $Q = MP$.

22. Usando determinantes, verifique se os sistemas abaixo têm solução única. (Atenção: não é preciso resolver os sistemas.)

(a) $\begin{cases} 5x & -2y & = & 1/2 \\ 3x & +4y & = & 11/2 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 4x & -y & +2z & = & 5 \\ 3x & +2y & -z & = & 8 \\ 2x & +5y & -4z & = & -7 \end{cases}$

23. Um sistema $AX = B$ tem solução única se, e somente se, o determinante de A é diferente de 0. Em cada caso abaixo, determine os valores de c que fazem com que o sistema nas variáveis x, y e z tenha solução única. Não é necessário resolver o sistema.

(a) $\begin{cases} x & +2y & -z & = & 4 \\ 3x & +cy & +4z & = & 12 \\ & -y & +2z & = & 0 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 3x & -5y & +z & = & 1 \\ 2x & +cy & -3z & = & -2 \\ 4x & & -2z & = & 3 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 5x & +2y & -6z & = & 1 \\ -x & +cy & +4z & = & 2 \\ x & +2cy & +3z & = & 3 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} 3x & +2y & -4z & = & 4 \\ 2x & +5y & +6z & = & -3 \\ x & +cy & +2cz & = & 0 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} cx & +3y & -z & = & 2 \\ & 4y & -2z & = & -1 \\ 8x & +3cy & +5z & = & 4c \end{cases}$

24. Um sistema $AX = B$ tem solução única se, e somente se, o determinante de A é diferente de 0. Determine os valores de m que fazem com que um sistema envolvendo a matriz A abaixo tenha solução única.

$$A = \begin{bmatrix} (m-2) & m & m \\ m & 1 & 3 \\ m & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

25. Seja dado o sistema linear

$$\begin{cases} x & +y & = & 1 \\ -x & +2y & = & 2 \\ 2x & -y & = & 1 \end{cases}$$

(a) Mostre graficamente que esse sistema não tem solução. Justifique. Dica: use o intervalo $[-3, 3]$ para os dois eixos.

(b) Podemos determinar uma solução aproximada de um sistema linear $Ax = b$ impossível resolvendo o sistema $A^T Ax = A^T b$. Monte esse sistema e ache a solução aproximada do problema acima.

26. Seja dado o sistema linear impossível

$$\begin{cases} -x & +2y & = & 2 \\ x & -y & = & -1 \\ x & +y & = & 2 \end{cases}$$

Podemos encontrar uma solução aproximada para um sistema linear $AX = B$ impossível resolvendo o sistema $(A^T A)X = (A^T B)$, em que A^T é a transposta de A. Escreva as matrizes $A^T A$ e $A^T B$, bem como o sistema $(A^T A)X = (A^T B)$, sem resolvê-lo.

27. Determine as soluções da equação $det(A) = 0$, em que A é a matriz abaixo.

$$\begin{bmatrix} \alpha & -4 & 0 \\ -4 & \alpha & -4 \\ 0 & -4 & \alpha \end{bmatrix}$$

28. Usando determinantes, determine a equação da reta que passa pelo par de pontos.

(a) $(2, 1)$ e $(-2, 4)$.

(b) $(-3, -4)$ e $(6, 2)$.

(c) $(\frac{1}{2}, -2)$ e $(-1, 4)$.

29. Desenhe no plano Cartesiano os triângulos cujos vértices são dados abaixo. Em seguida, determine a área de cada triângulo.

(a) $(2, 0)$, $(0, 5)$ e $(-1, 2)$.

(b) $(0, 0)$, $(3, 2)$ e $(2, 6)$.

(c) $(-3, -4)$, $(-2, 5)$ e $(4, -3)$.

30. Um triângulo com área igual a 12 tem vértices $A(4, 0)$, $B(0, 4)$ e $C(x, x)$, em que C é um ponto do primeiro quadrante. Usando determinantes, encontre o valor de x.

31. Um triângulo tem vértices $A(2, -1)$, $B(-3, 4)$ e $C(5, -2)$ no plano Cartesiano. Determine a área do triângulo usando determinantes.

32. Um triângulo tem vértices $A(-5, 4)$, $B(2, -3)$ e $C(x, 6)$ no plano Cartesiano. Sabendo que a área do triângulo ABC é igual a 35, determine os possíveis valores de x usando determinantes.

Respostas

1. a. Impossível. b. $\begin{bmatrix} \frac{9}{2} & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

   c. Impossível. d. Impossível.

   e. $\begin{bmatrix} 2 & 8 & 4 \\ 0 & -4 & 20 \end{bmatrix}$ f. $\begin{bmatrix} -15 \\ -5 \\ -10 \end{bmatrix}$

   g. $\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$ h. $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$

   i. $\begin{bmatrix} 9 & 4 & 4 \\ -4 & 4 & 10 \end{bmatrix}$ j. Impossível.

   k. $\begin{bmatrix} 4 & -7 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$ l. $\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 11 & 2 \end{bmatrix}$

   m. $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 4 & -9 \\ \frac{3}{2} & 6 & 3 \end{bmatrix}$ n. Impossível.

   o. Impossível. p. $\begin{bmatrix} 8 & 10 \\ 11 & -3 \end{bmatrix}$

   q. $\begin{bmatrix} 2 & 9 & 2 \\ 18 & 3 & 5 \\ 4 & -6 & 0 \end{bmatrix}$ r. $\begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

   s. Impossível. t. $\begin{bmatrix} -2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$

   u. $\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$ v. $\begin{bmatrix} -3 & 0 & 6 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} 3x - 2y \\ -2x + 4 \end{bmatrix}$

3. a. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

   b. $\begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$

4. A componente i de AB fornece a receita bruta da empresa com o refino de um barril de petróleo P_i.

$$AB = \begin{bmatrix} 168,25 \\ 169,70 \end{bmatrix}$$

5. A primeira coluna de B tem forma triangular superior.

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 16/5 & 1 \\ 0 & -13/5 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

6. A componente ij de AB fornece o gasto com mão-de-obra para a produção de uma unidade da cadeira i na fábrica j.

$$AB = \begin{bmatrix} 15,3 & 16,0 \\ 16,4 & 17,0 \\ 20,8 & 21,7 \end{bmatrix}$$

7. ...

8. a. $A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}$

   b. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1/2 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix}$

   c. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

   d. A não tem inversa.

   e. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 \end{bmatrix}$

   f. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3/2 & 1/2 & 0 \\ 8 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

9. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3/2 & 2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$ $A^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

10. a. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2/5 & -1/10 \\ 1/5 & 1/5 \end{bmatrix}$

    b. $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

11. a. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3/5 & -2/5 \\ 1/5 & 1/5 \end{bmatrix}$

    b. $X = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$

12. a. $x = 2$, $y = 1$.
    b. $x = -1$, $y = 2$.
    c. $x = 2$, $y = 5$.
    d. $x = -1$, $y = 3$.

13. $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ $A^{-1} = \begin{bmatrix} -2/5 & 3/10 \\ 1/5 & 1/10 \end{bmatrix}$

14. $(AB)^{-1} = \begin{bmatrix} 3/7 & -1/2 \\ -8/7 & 3/2 \end{bmatrix}$

15. a. $Q^{-1} = \begin{bmatrix} 4/5 & -3/5 \\ 3/5 & 4/5 \end{bmatrix}$

    b. $R^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 3/4 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix}$

    c. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 17/20 & 3/10 \\ 3/20 & 1/5 \end{bmatrix}$

16. a. -3; b. 34; c. -6; d. 0;
    e. $1/5$; f. 36; g. -30; h. 34;
    i. 0; j. 0.

17. a. $x = -4$ ou $x = 4$;
    b. $x = -2$ ou $x = 5$;
    c. $x = -10$ ou $x = 3$;
    d. $x = 0$, $x = -\sqrt{5}$ ou $x = \sqrt{5}$.

18. As matrizes dos itens (a), (b), (c), (e), (f), (g) e (h).

19. $a = 6$.

20. $c \neq \pm\sqrt{3}$.

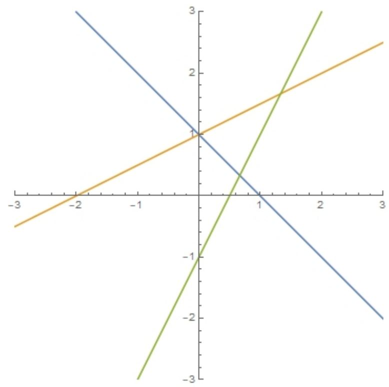
21. $Q = \begin{bmatrix} 2 - \sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} + 1 \end{bmatrix}$

22. a. Sim. b. Não.

23. a. $c \neq 5/2$.
    b. $c \neq 4$.
    c. $c \neq 2$.
    d. $c \neq -8$.
    e. $c \neq 2/3$ e $c \neq -4$.

24. $m \neq 1$ e $m \neq -2$.

25. (a) Como se vê na figura, não há um ponto que esteja na interseção das três retas.



    (b) $\begin{cases} 6x - 3y = 1 \\ -3x + 6y = 4 \end{cases}$

    Solução: $x = 2/3$ e $y = 1$.

26. $\begin{cases} 3x - 2y = -1 \\ -2x + 6y = 7 \end{cases}$

27. $\alpha = 0$, ou $\alpha = 4\sqrt{2}$, ou $\alpha = -4\sqrt{2}$.

28. a. $10 - 3x - 4y = 0$;
    b. $18 - 6x + 9y = 0$;
    c. $-6x - \frac{3}{2}y = 0$.

29. a. $11/2$; b. 7; c. 31.

30. $x = 5$.

31. $A = 5$.

32. $x = -17$.