

Décima lista de exercícios
Sistemas lineares. Métodos da substituição e da eliminação. Matrizes.

1. Determine graficamente se cada sistema abaixo tem ou não solução. Havendo solução, indique se ela é única.

(a)
$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

(b)
$$\begin{cases} 4x + 2y = 8 \\ -x - \frac{1}{2}y = 1 \end{cases}$$

(c)
$$\begin{cases} 3x - y = -3 \\ x - 3y = 3 \end{cases}$$

(d)
$$\begin{cases} 4x + 3y = 12 \\ -\frac{4}{3}x - y = -4 \end{cases}$$

(e)
$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ \frac{1}{2}x - y = 2 \end{cases}$$

2. Resolva cada sistema abaixo pelo método da substituição, ou mostre que o sistema não tem solução.

(a)
$$\begin{cases} 2x - y = -2 \\ x + 2y = 9 \end{cases}$$

(b)
$$\begin{cases} 4x + 2y = 2 \\ 3x - 3y = 15 \end{cases}$$

(c)
$$\begin{cases} 2x + 6y = 12 \\ 3x + 9y = 9 \end{cases}$$

(d)
$$\begin{cases} 4x + 2y = 0 \\ 5x + \frac{1}{2}y = 2 \end{cases}$$

(e)
$$\begin{cases} 2x + 3y = 9 \\ 3x - y = 8 \end{cases}$$

3. Resolva cada sistema abaixo pelo método da eliminação, ou mostre que o sistema não tem solução.

(a)
$$\begin{cases} x + 2y + z = 6 \\ x + 3y - 2z = 5 \\ -2x + y - z = -1 \end{cases}$$

(b)
$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ -x + 2y + z = 2 \\ 5y + 2z = 5 \end{cases}$$

(c)
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 3x - 2z = 6 \\ -2x + y + 3z = 4 \end{cases}$$

(d)
$$\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ -2x - 2y + 2z = 2 \\ 3x - z = 4 \end{cases}$$

(e)
$$\begin{cases} x - 2y - 3z = 5 \\ -5x + 5z = -15 \\ 2x + y - z = 5 \end{cases}$$

(f)
$$\begin{cases} x + 2y - 7z = -4 \\ 2x + y + z = 13 \\ -3x - 9y + 12z = 33 \end{cases}$$

(g)
$$\begin{cases} 3x - 3y + 6z = 12 \\ 2x + 4y - z = 10 \\ 2y - 3z = -2 \end{cases}$$

(h)
$$\begin{cases} 2x - y + 4z = 8 \\ -x + \frac{3}{2}y + z = -4 \\ 2x + y + 10z = 8 \end{cases}$$

(i)
$$\begin{cases} 2x - 4y + 6z = 2 \\ -x + 5y - 2z = 4 \\ 6x - 6y + 12z = 0 \end{cases}$$

(j)
$$\begin{cases} 4x + 2y + 8z = 20 \\ -x - \frac{5}{2}y + 4z = 1 \\ 2x + 5y + z = 16 \end{cases}$$

(k)
$$\begin{cases} 2x + 4y + 6z = 2 \\ -6x + 8y - 2z = -2 \\ x - 3y + 5z = 24 \end{cases}$$

(l)
$$\begin{cases} 3x + 6y + z = -3 \\ 4x + 3y + \frac{7}{3}z = 9 \\ -x + 8y + \frac{3}{3}z = -16 \end{cases}$$

(m)
$$\begin{cases} 2x - 6y + 4z = 2 \\ -3x + 3y - 5z = 9 \\ 5x - 12y + 8z = 8 \end{cases}$$

(n)
$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 4 \\ -4x + 6y - 2z = 10 \\ 3x + \frac{1}{2}y + z = 12 \end{cases}$$

(o)
$$\begin{cases} 6x + 6y - 12z = 6 \\ -2x + 5z = -4 \\ 3x + 7y - z = 5 \end{cases}$$

4. Uma doceira vende dois tipos de bombons: o normal e o trufado. Cada bombom normal custa R\$ 2,00, enquanto o trufado sai por R\$ 3,00 a unidade. Ontem, a doceira vendeu

- 200 bombons e obteve R\$ 460,00. Quantos bombons de cada tipo foram vendidos?
5. Uma padaria vende três tipos de pães: o francês, o caseiro e o *croissant*. O pão francês pesa 50 g e custa R\$ 10,00/kg. O pão caseiro pesa 75 g e custa R\$ 14,00/kg. Já o *croissant* pesa 90 g e custa R\$ 18,00/kg. Ontem, a padaria vendeu 10.000 pães, que pesaram 587,1 kg e forneceram uma arrecadação total de R\$ 7165,80. Escreva um sistema linear que permita encontrar o número de pães vendidos de cada tipo. Não é preciso resolver o sistema.
6. Para manter uma dieta equilibrada, João decidiu consumir, em sua janta, 50 g de proteína, 800 kcal de energia e 0,5 g de cálcio. Entretanto, na hora de preparar a janta, João reparou que só havia em sua casa os seguintes alimentos: macarrão, carne moída e leite desnatado. Observando as embalagens dos alimentos, João obteve as seguintes informações nutricionais, referentes a 100g de cada alimento:
- | Alimento (100 g) | Proteína (g) | energia (kcal) | cálcio (mg) |
|------------------|--------------|----------------|-------------|
| Macarrão | 10 | 400 | 16 |
| Carne | 30 | 200 | 4 |
| Leite | 4 | 80 | 250 |
- Escreva um sistema linear que permita determinar quanto João deverá ingerir de cada alimento, em sua janta. Não se esqueça de indicar o significado e a unidade de cada variável que você definir. Não é necessário resolver o sistema.
7. Um brinquedo infantil é composto por 900 peças. As peças têm três tamanhos e pesos diferentes, conforme mostra a tabela.
- | Peça | Compr. (cm) | Peso (mg) |
|------|-------------|-----------|
| A | 1,2 | 80 |
| B | 2,4 | 180 |
| C | 3,6 | 300 |
- Uma caixa do brinquedo contém 124 g em peças que, quando enfileiradas, medem 16,8 m. Escreva um sistema linear que permita encontrar o número de peças de cada tipo. Não é preciso resolver o sistema.
8. No município de Xororó, três funcionários da prefeitura – Roberto, Luís e Juliano – foram presos recentemente, acusados de desviar, em conjunto, R\$10.000.000,00 dos cofres públicos. Segundo as investigações, Roberto desviou, sozinho, três quintos da soma dos valores obtidos pelos outros funcionários. Além disso, todos os três usaram parte do dinheiro obtido ilegalmente para apoiar a reeleição do prefeito da cidade. Por ser muito amigo do prefeito, Luís destinou 15% de seus proveitos à campanha, enquanto Juliano e Roberto contribuíram, respectivamente, com 12% e 10% do que arrecadaram. Sabendo que a campanha do prefeito contou com R\$ 1.250.000,00 desse dinheiro, escreva um sistema linear que permita determinar quanto cada funcionário desviou. Não é necessário resolver o sistema, bastando indicar o que significa cada variável usada.
9. Durante a famosa *black friday*, uma loja de celulares vendeu, ao todo, 100 aparelhos, obtendo um lucro de R\$ 10.800,00. O lucro com a venda variou com o tipo de celular, equivalendo a R\$ 80,00 para o modelo A, R\$ 120,00 para o modelo B e R\$ 150,00 para o modelo C. Além disso, o número de aparelhos vendidos do tipo A foi 50% superior à soma dos aparelhos vendidos dos dois outros modelos. Escreva um sistema linear que permita determinar o número de aparelhos vendidos de cada modelo.
10. Uma empresa deve enlatar uma mistura de amendoim, castanha de caju e castanha-do-pará. Sabe-se que o quilo de amendoim custa R\$ 5,00, o quilo da castanha de caju, R\$ 20,00 e o quilo de castanha-do-pará, R\$ 16,00. Cada lata deve conter meio quilo da mistura e o custo total dos ingredientes de cada lata deve ser de R\$ 5,75. Além disso, a quantidade de castanha de caju em cada lata deve ser igual a um terço da soma das outras duas. Escreva o sistema linear que representa a situação descrita acima e determine as quantidades, em gramas, de cada ingrediente por lata.
11. Durante um torneio paralímpico de arremesso de peso, um atleta teve seu arremesso

filmado. Com base na gravação, descobriu-se a altura (y) do peso em função de sua distância horizontal (x), medida em relação ao ponto de lançamento. Alguns valores da distância e da altura são fornecidos na tabela abaixo.

Distância (m)	Altura (m)
1	2,0
2	2,7
3	3,2

Seja $y(x) = ax^2 + bx + c$ a função que descreve a trajetória (parabólica) do peso.

- (a) Monte um sistema linear que permita a determinação dos parâmetros a , b e c .
 - (b) Determine $y(x)$ resolvendo o sistema pelo método da eliminação.
 - (c) Calcule a distância total alcançada pelo peso nesse arremesso.
12. Um jogador chutou uma bola, que descreveu uma trajetória dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, em que $f(x)$ representa a altura da bola e x é a distância horizontal medida a partir do local do chute. Com base nos valores da distância e da altura dados na tabela abaixo, monte um sistema linear que permita a determinação dos parâmetros a , b e c . Não é preciso resolver o sistema.
- | Distância (m) | 20 | 30 | 40 |
|---------------|----|----|----|
| Altura (m) | 4 | 3 | 2 |
13. Considere, no plano xy , as retas $y = 1$, $y = 2x - 5$ e $x - 2y + 5 = 0$. Determine as coordenadas dos vértices do triângulo formado por essas retas.
14. As retas do plano Cartesiano representadas pelas equações $x + 2y - 4 = 0$, $2x + y + 7 = 0$ e $x + y + k = 0$ concorrem em um ponto P . Determine as coordenadas de P e o valor da constante k .
15. Seja dado o sistema linear

$$\begin{cases} x & -y = 2 \\ 3x & +y = -6 \\ x & +3y = 6 \end{cases}$$

Mostre graficamente que esse sistema não tem solução. Justifique.

16. Seja dado o sistema linear

$$\begin{cases} 2x & -3y = 0 \\ 2x & +y = 4 \\ 4x & -y = k \end{cases}$$

- (a) Mostre graficamente que esse sistema não tem solução para $k = -4$. Justifique.
 - (b) Determine o valor de k que faz com que o sistema tenha uma única solução.
17. Um supermercado vende dois tipos de cebola, conforme descrito na tabela abaixo.

Tipo de cebola	Peso unitário aproximado (g)
Pequena	25
Grande	200

- (a) Uma consumidora selecionou cebolas pequenas e grandes, somando 40 unidades, que pesaram 1700 g. Formule um sistema linear que permita encontrar a quantidade de cebolas de cada tipo escolhidas pela consumidora.
 - (b) Resolva o sistema para determinar o número de cebolas de cada tipo que a consumidora adquiriu
18. A lanchonete NatureBar oferece dois tipos de lanches com acompanhamento: o casadinho A, que é um lanche quente acompanhado de uma lata de refrigerante, e o casadinho B, que é um sanduíche natural acompanhado de um suco de frutas. Três casadinhos A mais quatro casadinhos B custam R\$ 33,90 e quatro casadinhos A mais três casadinhos B custam R\$ 33,30. Monte um sistema linear e determine o custo de cada casadinho.
19. Ao fazer o cálculo do custo dos casadinhos, a lanchonete do exercício anterior considerou que o preço do refrigerante equivalia a $7/8$ do preço do suco e que o preço do sanduíche natural correspondia a $9/8$ do preço do lanche quente. Se mantiver as mesmas proporções e os mesmos preços, quanto a lanchonete cobrará por um novo casadinho composto pelo lanche quente e pelo suco.

20. A quantidade de CO_2 produzida por um carro a cada quilômetro percorrido depende da velocidade. Suponha que, para determinado carro, a função $c(v)$ que fornece a quantidade de CO_2 , em g/km, com relação à velocidade v , para velocidades entre 20 e 40 km/h, seja dada pelo polinômio $c(v) = av^2 + bv + c$.

Velocidade (km/h)	CO_2 emitido (g/km)
20	400
30	250
40	200

- (a) Monte um sistema linear que permita a determinação dos parâmetros a , b e c .
 (b) Determine $c(v)$ resolvendo o sistema pelo método da eliminação.
 21. Um fabricante de fertilizantes produz três misturas comerciais. O percentual de nitrogênio (N), fósforo (P) e potássio (K) em cada mistura é dado na tabela abaixo.

Mistura	Percentual		
	N	P	K
A	10	10	10
B	10	20	16
C	5	25	15

- Para preparar sua horta, um agricultor precisa de 9 kg de N, 20 kg de P e 15 kg de K. Resolvendo um sistema linear, determine quantos quilogramas ele deve comprar de cada mistura.

22. Uma montadora fez alguns testes com os freios de um novo modelo de automóvel e descobriu que a distância necessária para que o carro pare completamente está relacionada à velocidade na qual ele trafega antes do freio ser acionado. Os valores obtidos no teste são dados na tabela abaixo.

Velocidade (km/h)	Distância de frenagem (m)
60	15
80	25
100	60

Suponha que a função $d(v)$, que fornece a distância de frenagem em relação à velocidade do carro seja dada por $d(v) = av^2 + bv + c$. Escreva um sistema linear que permita a determinação das constantes a , b e c . (Atenção: basta escrever o sistema, não é preciso resolvê-lo.)

23. Seja dado o sistema de equações

$$\begin{cases} y &= x^2 - 4x \\ y &= 2x - x^2 \end{cases}$$

- (a) Resolva o problema geometricamente, traçando essas equações no plano.
 (b) Resolva o problema pelo método da substituição.
 24. Em alguns casos simples, podemos resolver um sistema que envolve funções exponenciais usando um sistema linear. Por exemplo, seja dado o sistema de equações

$$\begin{cases} \frac{8}{4^{2y}} &= 2^z \\ \frac{32}{2^{4z}} &= 4^y \end{cases}$$

- (a) Aplique o logaritmo na base 2 a ambos os lados das duas equações, e reescreva-as como equações lineares.
 (b) Resolva o sistema resultante pelo método da substituição.
 25. Seja dado o sistema de equações

$$\begin{cases} x^2 + y &= 8 \\ 2x - 4y &= -12 \end{cases}$$

- (a) Resolva o problema geometricamente, traçando essas equações no plano.
 (b) Resolva o problema pelo método da substituição.

26. Encontre todas as soluções dos sistemas abaixo usando o método da substituição.

$$(a) \begin{cases} -2x + 2y &= 8 \\ x^2 - y &= -2 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} x - y &= -9 \\ x^2 - 2x + 5 &= y \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} x - y &= -9 \\ x^2 - 2x + 5 &= y \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} 2x + (y - 1)^2 &= 4 \\ 6x - 3y &= 9 \end{cases}$$

27. Determine a ordem das matrizes abaixo.

$$(a) \begin{bmatrix} -3 \\ 8 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$(b) \begin{bmatrix} 8 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(c) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & -2 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(d) \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

28. Para cada um dos sistemas lineares abaixo, escreva a matriz dos coeficientes e a matriz ampliada.

$$(a) \begin{cases} 3x - 2y = -2 \\ -2x + 4y = 12 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + z = 3 \\ +2y + 2z = 4 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} -2x - y + z = 2 \\ 2x + 3y + z = 0 \\ 4x + y + 2z = 5 \end{cases}$$

29. Usando as matrizes ampliadas, resolva os sistemas do exercício anterior. Confira as soluções que você encontrou, substituindo-as nos sistemas originais.

30. Tente resolver cada sistema linear abaixo a partir da matriz ampliada. Indique se o sistema tem infinitas soluções ou se é insolúvel. Se o sistema tiver infinitas soluções, encontre uma delas.

$$(a) \begin{cases} 2x + y = 6 \\ 6x + 3y = 18 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} x - 3y = 1 \\ -2x + 6y = -1 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + 3z = 2 \\ 2x + 4y = -2 \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} 2x + 2y - 4z = 2 \\ -x - 3y + 2z = 3 \\ 4x + 8y - 8z = -2 \end{cases}$$

31. Seja dado o sistema linear abaixo. Usando o método da eliminação, determine para que valores de b o sistema tem infinitas soluções.

$$\begin{cases} 2x - 6y = -10 \\ -3x + 9y = b \end{cases}$$

32. Sabe-se que a parábola $y = ax^2 + bx + c$ passa pelos pontos $(-1, 2)$, $(2, -4)$ e $(3, -2)$. Determine a , b e c .

33. Escreva a matriz $4 \times 4 A = [a_{ij}]$ definida pela regra

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } j > i \\ i - j + 1, & \text{se } j \leq i \end{cases}.$$

34. Escreva a matriz $5 \times 5 A = [a_{ij}]$ definida pela regra

$$a_{ij} = \begin{cases} 2i, & \text{se } i = j \\ i - j, & \text{se } 1 \leq i - j \leq 2 \\ j - i, & \text{se } 1 \leq j - i \leq 2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Respostas

1. a. $(1, -1)$; b. Não há solução;
c. $(3/2, -3/2)$; d. Há infinitas soluções;
e. $(2, -1)$.
2. a. $x = 1, y = 4$; b. $x = 2, y = -3$;
c. Não há solução;
d. $x = 1/2, y = -1$; e. $x = 3, y = 1$.
3. a. $x = 1, y = 2, z = 1$;
b. $x = z/5, y = 1 - 2z/5$;
c. Não há solução;
d. $x = 2, y = -1, z = 2$;
e. $x = 3 + z, y = -1 - z$;
f. $x = 10, y = -7, z = 0$;
g. $x = 2, y = 2, z = 2$;
h. $x = 4 - 7z/2, y = -3z$.
i. $x = -3, y = 1, z = 2$.
j. $x = -1/2, y = 3, z = 2$.
k. $x = -5, y = -3, z = 4$.
l. $x = 3, y = -2, z = 2$.
m. $x = 4, y = -3, z = -6$.
n. $x = 3, y = 4, z = 1$.
o. $x = 7, y = -2, z = 2$.
4. 140 bombons normais e 60 trufados.

$$5. \begin{cases} x + y + z = 10000 \\ 0,05x + 0,075y + 0,09z = 587,1 \\ 0,5x + 1,05y + 1,62z = 7167,8 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 0,1x + 0,3y + 0,04z = 50 \\ 4x + 2y + 0,8z = 800 \\ 0,16x + 0,04y + 2,5z = 500 \end{cases}$$

Nesse sistema, x representa o consumo (em g) de macarrão, y representa a ingestão de carne (em g), e z representa o consumo (em g) de leite.

$$7. \begin{cases} x + y + z = 900 \\ 0,08x + 0,18y + 0,30z = 124 \\ 0,012x + 0,024y + 0,036z = 16,8 \end{cases}$$

Nesse sistema, x representa o número de peças do tipo A, y representa o número de peças do tipo B e z representa o número de peças do tipo C.

$$8. \begin{cases} x + y + z = 10 \\ x - \frac{3}{5}y - \frac{3}{5}z = 0 \\ 0,1x + 0,15y + 0,12z = 1,25 \end{cases}$$

Nesse sistema, x representa o valor desviado por Roberto (em R\$ milhões), y representa o valor desviado por Luís (em R\$ milhões) e z representa o valor desviado por Juliano (em R\$ milhões).

$$9. \begin{cases} x + y + z = 100 \\ 80x + 120y + 150z = 10800 \\ x - 1,5y - 1,5z = 0 \end{cases}$$

10. 250g de amendoim, 125g de castanha de caju e 125g de castanha-do-pará.

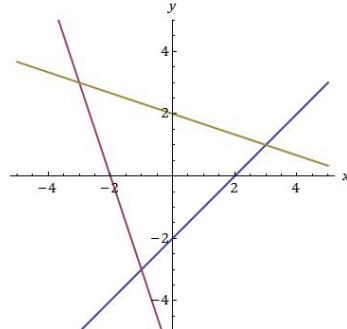
11. b. $a = -0,1, b = 1,0$ e $c = 1,1$;
c. O peso alcança 11 m.

$$12. \begin{cases} 400a + 20b + c = 4 \\ 900a + 30b + c = 3 \\ 1600a + 40b + c = 2 \end{cases}$$

13. $(3, 1), (-3, 1), (5, 5)$.

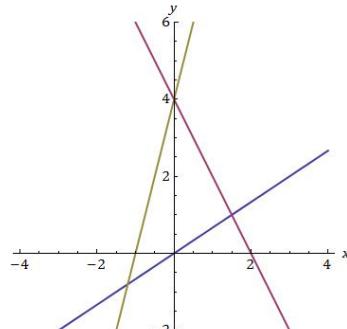
14. $P = (-6, 5)$ e $k = 1$.

- 15.



Não há um par ordenado (x, y) que pertença, ao mesmo tempo, às três retas que representam as equações no plano.

16. a.



- b. $k = 5$.

$$17. \text{ a. } \begin{cases} x + y = 40 \\ 25x + 200y = 1700 \end{cases}$$

- b. 36 cebolas pequenas e 4 cebolas grandes.

18. O casadinho A custa R\$ 4,50 e o casadinho B custa R\$ 5,10.

19. A lanchonete cobrará R\$ 4,80 pelo novo casadinho.

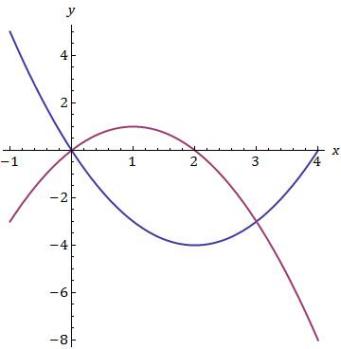
20. a.
$$\begin{cases} 400a + 20b + c = 400 \\ 900a + 30b + c = 250 \\ 1600a + 40b + c = 200 \end{cases}$$

b. $c(v) = 1000 - 40v + v^2/2.$

21. Ele deve comprar 25 kg da mistura A, 50 kg da mistura B e 30 kg da mistura C.

22.
$$\begin{cases} 3600a + 60b + c = 15 \\ 6400a + 80b + c = 25 \\ 10000a + 100b + c = 60 \end{cases}$$

23. a.

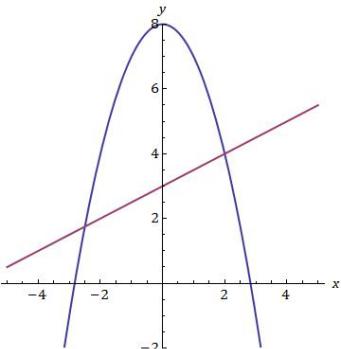


b. Soluções: $(0, 0)$ e $(3, -3).$

24. a.
$$\begin{cases} 3 - 4y = z \\ 5 - 4z = 2y \end{cases}$$

b. $z = 1, y = 1/2.$

25. a.



b. Soluções: $(-5/2, 7/4)$ e $(2, 4).$

26. a. Soluções: $(-1, 3)$ e $(2, 6);$

b. Soluções: $(-1, 8)$ e $(4, 13).$

c. Soluções: $(2, 1)$ e $(3/2, 0).$

27. a. $4 \times 1;$ b. $1 \times 3;$
c. $3 \times 4;$ d. $2 \times 2.$

28.

a.
$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 12 \end{array} \right]$$

b.
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{array} \right]$$

c.
$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 5 \end{array} \right]$$

29. a. $x = 2; y = 4.$

b. $x = 1; y = 1; z = 1.$

c. $x = 1/2; y = -1; z = 2.$

30. a. Infinitas soluções. $x = 3; y = 0.$

b. Não há solução;

c. Infinitas soluções. $x = 1; y = -1; z = 0.$

d. Não há solução;

31. $b = 15.$

32. $y = x^2 - 3x - 2.$

33.
$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{array} \right]$$

34.
$$\left[\begin{array}{ccccc} 2 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 6 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 10 \end{array} \right]$$