

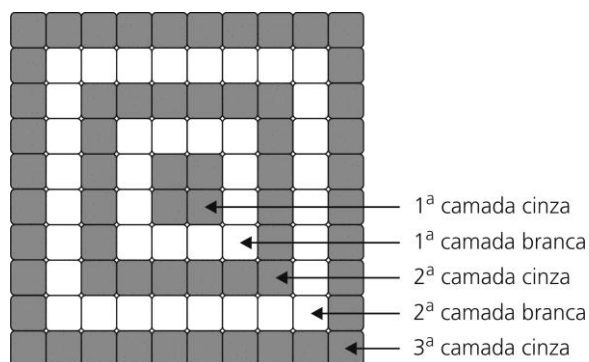
Duodécima lista de exercícios.

Sequências e progressões.

1. Escreva os cinco primeiros termos de cada sequência (supondo que n começa em 1).
 - a) $a_n = (-3)^{n-1}$
 - b) $a_n = 1 - \frac{1}{n}$
 - c) $a_n = (-1)^n \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)$
 - d) $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$
 - e) $a_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi(n-1)$
 - f) $a_n = \frac{n^2+n}{2}$
2. Escreva os quatro primeiros termos de cada sequência e descubra a fórmula do n -ésimo termo em função de n .
 - a) $a_1 = 2, a_i = a_{i-1} + 4$
 - b) $a_1 = 5, a_i = 2a_{i-1}$
 - c) $a_1 = 1, a_i = (-2)a_{i-1}$
3. Calcule os somatórios.
 - a) $\sum_{i=1}^4 \left(\frac{2}{i+2}\right)$
 - b) $\sum_{j=1}^4 (-1)^j \left(\frac{j-1}{j^2+1}\right)$
 - c) $\sum_{k=1}^5 (2^k - k^2)$
 - d) $\sum_{i=1}^{20} \frac{i}{2} [1 + (-1)^i]$
4. Usando as propriedades dos somatórios e os valores conhecidos de $\sum_{k=1}^n 1$ e de $\sum_{k=1}^n k$, calcule as somas.
 - a) $\sum_{i=1}^{100} (2i - 1)$
 - b) $\sum_{i=1}^{100} 2(i - 1)$
 - c) $\sum_{i=1}^{100} \left(\frac{i}{2} + \frac{2}{5}\right)$
 - d) $\sum_{i=21}^{80} i$
 - e) $\sum_{i=50}^{100} (3i + 1)$
5. O coeficiente de rendimento (CR) dos alunos da UNICAMP é calculado pela fórmula

$$CR = \left(\sum_{i=1}^n N_i C_i \right) / \left(10 \sum_{i=1}^n C_i \right),$$
 em que N_i e C_i são, respectivamente, a nota e o número de créditos relativos à i -ésima disciplina, e n é o número de disciplinas cursadas. Usando as notas que você acredita que terá ao final do semestre, calcule o seu CR.
6. Indique quais das sequências do exercício 1 são progressões aritméticas.
7. Os dois primeiros termos de algumas progressões aritméticas são dados abaixo. Escreva o termo geral e determine o termo indicado.
 - a) 4, 1, ... a_{12} ?
 - b) -12,5; -7; ... a_{10} ?
8. Calcule as somas abaixo.
 - a) Todos os inteiros ímpares entre 1 e 99.
 - b) Os 100 primeiros inteiros positivos pares.
 - c) Os primeiros 20 termos da progressão aritmética 3, 8, ...
9. A ANATEL determina que as emissoras de rádio FM utilizem as frequências de 87,9 a 107,9 MHz, e que haja uma diferença de 0,2MHz entre emissoras com frequências vizinhas.
 - a) Determine quantas emissoras FM podem funcionar em uma mesma região.
 - b) A 1ª e a 86ª frequência são reservadas às rádios comunitárias. Determine a frequência dessas rádios.
10. No centro de um mosaico formado apenas por pequenos ladrilhos, um artista colocou 4 ladrilhos cinza. Em torno dos ladrilhos centrais, o artista colocou uma camada de ladrilhos brancos, seguida por uma camada de ladrilhos cinza, e

assim sucessivamente, alternando camadas de ladrilhos brancos e cinza, como ilustra a figura abaixo, que mostra apenas a parte central do mosaico. Determine o número de ladrilhos da 10ª camada cinza.



11. Suponha que o mosaico do exercício 9 tenha exatamente 10 camadas de cada cor. Calcule o número de ladrilhos brancos e o número de ladrilhos cinza empregados na sua construção.
12. No mês corrente, uma empresa registrou uma receita de R\$ 600 mil e uma despesa de R\$ 800 mil. Para voltar a ter lucro, a empresa pretende manter constante a receita, e reduzir suas despesas, mensalmente, em exatos R\$ 45 mil. Escreva a expressão do termo geral da progressão aritmética que fornece o valor da despesa em função de n , o número de meses transcorridos, considerando como mês inicial o corrente. Calcule em quantos meses a despesa será menor que a receita.
13. Um *site* de relacionamento tem 2200 membros e planeja aumentar o número de integrantes usando uma estratégia agressiva de propaganda. O *site* espera que 100 novos membros entrem na primeira semana após a propaganda, 200 entrem na segunda semana, 300 entrem na terceira semana, etc. Caso essa estratégia dê certo, determine em quantas semanas o site terá 10000 membros.
14. Para cada item abaixo, escreva os quatro primeiros termos e o termo geral da progressão geométrica cujo primeiro termo e cuja razão são dados.
 - a) $a_1 = 3, r = 4$
 - b) $a_1 = 2, r = -3$
 - c) $a_1 = -1, r = 1/2$

d) $a_1 = 3, r = \sqrt{2}$

15. Indique quais sequências abaixo são progressões geométricas. Para as que forem progressões geométricas, encontre a razão.
 - a) 3, 9, 27, 81, ...
 - b) 3, 6, 12, 24, 48, ...
 - c) a, a^2, a^3, a^4, \dots
 - d) $a^2, a^4, a^8, a^{16}, \dots$
 - e) $-2a, 2a^3, -2a^5, 2a^7, \dots$
 - f) $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{9}, \frac{1}{12}, \dots$
16. Em cada item abaixo, são dados dois termos de uma progressão geométrica. Escreva o termo geral e determine o termo indicado.
 - a) $a_1 = \frac{3}{2}, a_2 = \frac{15}{2}, \dots, a_7?$
 - b) $a_1 = 2, a_2 = -2, \dots, a_{100}?$
 - c) $a_1 = 10, a_4 = 5, \dots, a_{10}?$
17. Calcule a soma dos primeiros 6 termos das progressões geométricas da questão 3.
18. Calcule a soma dos primeiros 10 e dos primeiros 20 termos da sequência $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$. O que você acha que acontecerá se somarmos um número cada vez maior de termos dessa progressão?
19. Neste mês, uma empresa registrou uma receita de R\$ 600 mil. Suponha que a receita aumentará 10% a cada mês. Encontre o termo geral da progressão geométrica que representa a receita a cada mês. Determine qual será a receita acumulada em 10 meses. Se necessário, use $1,1^2 = 1,21; 1,1^3 \cong 1,33$ e $1,1^5 \cong 1,61$.
20. Por norma, uma folha de papel A4 deve ter 210mm x 297mm. Considere que uma folha A4 com 0,1mm de espessura é seguidamente dobrada ao meio, de forma que a dobra é sempre perpendicular à sua maior dimensão.
 - a) Escreva a expressão do termo geral da progressão geométrica que representa a espessura do papel dobrado em função do número, k , de dobras feitas.
 - b) Considere que, idealmente, o papel dobrado tem o formato de um paralelepípedo. Nesse

caso, após dobrar o papel seis vezes, quais serão as dimensões do paralelepípedo?

21. Um capital de R\$ 5.000,00 é investido em uma aplicação financeira que rende 8,1% ao ano, Considerando que não foram feitas novas aplicações ou retiradas, determine o número inteiro mínimo de anos necessários para que o capital aplicado seja maior que o dobro do capital inicial.

22. Um auditório tem poltronas organizadas em fileiras. A terceira fileira tem 28 poltronas e a quarta tem 32 poltronas. Sabendo que o número de poltronas aumenta de forma constante entre fileiras sucessivas, e que o auditório tem 30 fileiras de poltronas

- a) Determine o número de poltronas da 1ª fileira.
- b) Determine o número de poltronas da n -ésima fileira, em que n é um número natural qualquer.
- c) Determine o número total de poltronas do auditório.

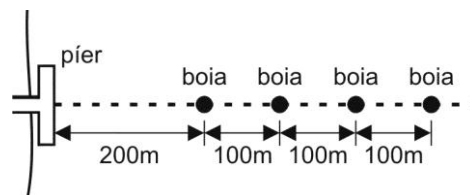
23. Uma empresa está contratando funcionários da área de informática, pagando um salário inicial de R\$ 40.000,00 por ano (incluindo os pagamentos mensais, o décimo terceiro salário e o adicional de férias). Além disso, a empresa prometeu aumentar em 3% o salário de seus funcionários a cada ano de trabalho.

- a) Determine o salário anual do funcionário em cada um dos seus primeiros três anos na empresa.
- b) Escreva a fórmula de a_n , o termo geral da progressão que fornece o salário anual que o funcionário receberá no seu n -ésimo ano na empresa.
- c) Determine o montante total que o funcionário receberá nos primeiros 10 anos de trabalho.

24. Uma indústria usa uma máquina nova por 1024 dias. Após esse período, a máquina é reformada e reutilizada. Entretanto, após cada reforma, a máquina só é usada por metade do tempo de uso anterior. Ou seja, antes da primeira reforma, ele é usada por 1024 dias. Antes da segunda reforma, ela é usada por 512 dias. Antes da terceira reforma seu tempo de uso cai para 256 dias, e assim por diante.

- a) Escreva o termo geral a_n da progressão que fornece o tempo de uso da máquina antes de cada reforma.
- b) A máquina é descartada sempre que o tempo de uso após uma reforma é menor ou igual a 32 dias. Usando a resposta do item (a), determine quantas reformas ela sofrerá até deixar de ser usada.

25. Um barco será usado para recolher 20 boias que foram colocadas em linha reta, como mostra a figura abaixo. A primeira boia está a 200 m do píer de onde partirá o barco, e cada uma das demais boias está a uma distância de 100 m da anterior. Como o barco é muito pequeno, só é possível transportar uma boia por vez. Desse modo, o barqueiro pegará a primeira boia e retornará ao píer. Em seguida, ele buscará a segunda boia, retornando novamente ao píer. Esse processo será repetido até que todas as boias tenham sido recolhidas.



- a) Determine a distância percorrida pelo barco (ida e volta) para buscar cada uma das quatro primeiras boias.
- b) Escreva a fórmula do termo geral a_n da progressão que fornece a distância percorrida pelo barco (ida e volta) para resgatar apenas a n -ésima boia.
- c) Determine a distância total percorrida pelo barco para recolher todas as boias.

Respostas.

2.a. $a_n = 2 + 4(n - 1)$.

2.b. $a_n = 5 \cdot 2^{n-1}$.

2.c. $a_n = (-2)^{n-1}$.

3.a. 19/10.

3.b. 3/17.

3.c. 7.

3.d. 110

4.a. 10000.

4.b. 9900.

4.c. 2565.

4.d. 3030.

4.e. 11375.

6. Somente a sequência (e).

7.a. $a_n = 4 - 3(n - 1)$. $a_{12} = -29$.

7.b. $a_n = -12,5 + 5,5(n - 1)$. $a_{10} = 37$.

8.a. 2500.

8.b. 10100.

8.c. 1010.

9.a. 101 emissoras.

9.b. 104,9 MHz.

10. 148.

11. 760 ladrilhos cinza e 840 ladrilhos brancos.

12. A despesa será menor que a receita no sexto mês, ou seja, daqui a cinco meses.

13. O site terá 10000 membros em 12 semanas.

14.a. 3, 12, 48, 192

14.b. 2, -6, 18, -54

14.c. -1, -1/2, -1/4, -1/8

14.d. $3, 3\sqrt{2}, 6, 6\sqrt{2}$

15.a. É uma p.g. de razão 3.

15.b. É uma p.g. de razão 2.

15.c. É uma p.g. de razão a .

15.d. Não é uma p.g.

15.e. É uma p.g. de razão $-a^2$.

15.f. Não é uma p.g.

16.a. $a_n = \frac{3}{2} \cdot 5^{n-1}$, $a_7 = \frac{46875}{2}$

16.b. $a_n = 2 \cdot (-1)^{n-1}$, $a_{100} = -2$

16.c. $a_n = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, $a_{10} = \frac{10}{1024} = \frac{5}{512}$

17.a. $S_6 = 5859$

17.b. $S_6 = 0$

17.c. $S_6 = \frac{315}{16} = 19,6875$

18. $S_{10} = 1,9980469$, $S_{10} = 1,9999981$

19. Cerca de R\$ 9.540.000,00.

20.a. $a_n = 0,1 \cdot 2^n$

20.b. 37,125 mm, 26,25 mm e 6,4 mm.

21. 9 anos

22.a. 20 poltronas.

22.b. $a_n = 16 + 4n$.

22.c. 2340 poltronas.

23.a. R\$ 40000,00, R\$ 41200,00 e R\$ 42436,00.

23.b. $a_n = 40000 \times 1,03^n$

23.c. R\$ 458.555,00.

24.a. $a_n = 1024 \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

24.b. 5 reformas.

25.a.

25.b.

25.c.