

# Modelagem matemática para descrever interações entre espécies mediante a dispersão de poluente em corpos aquáticos

Carlos F. L. Santos<sup>1</sup>,

Dept de Matemática, UEA - 69.050-010, Manaus/AM.

**Resumo.** O presente estudo visa descrever a evolução da poluição no corpo aquático do Igarapé do Pantanal e suas influências nas dinâmicas interativas entre presas e predadores. Com o objetivo de avaliar diferentes cenários do efeito da poluição sobre o sistema ecológico em estudo. Para a modelagem do fenômeno evolutivo da poluição utilizou-se uma equação diferencial parcial não-linear, considerada clássica no contexto da modelagem que descrevem fenômenos difusivos-advectivos. Para as dinâmicas interativas entre presas e predadores se considerou um sistema de equações diferenciais parciais não-lineares acopladas, com dinâmicas vitais de Verhulst e a clássica dinâmica de Lotka-Volterra. Assim, o modelo matemático proposto será um sistema dinâmico com três equações diferenciais parciais acopladas entre si. O modelo e o domínio foram discretizados visando uma aproximação das soluções pelo método de diferenças finitas centrais para a variável espacial e diferenças finitas de Crank-Nicolson na discretização temporal. Quanto aos resultados numéricos computacionais obtidos, se pode destacar formações de diferentes cenários, causados pelos impactos do poluente nas dinâmicas interativas das espécies.

**Palavras-chave:** *Biomatemática; impacto ambiental, métodos numéricos.*

## 1. Introdução

A poluição em meios aquáticos é uma contaminação por resíduos na água dos rios, lagos, igarapés, por meio de elementos físicos, químicos entre outros,

---

<sup>1</sup>cflsantos16@gmail.com

que podem ser prejudiciais aos organismos e a sobrevivência humana. Trata-se de um problema sócio-ambiental de alto risco a vida, visto que, a água é vital à sobrevivência no planeta. Entre os motivos da poluição em meio aquáticos destacam-se as ações antrópicas relativas às atividades econômicas. Entre as várias consequências causadas pela poluição em corpos aquáticos, destacam-se: a redução dos níveis de oxigênio dissolvidos, formação de correntes ácidas, intoxicação de organismos presentes no ecossistema, entre outros, (Manoel Neto, 2014).

Nas alterações ambientais, como mudanças de áreas conservadas para áreas degradadas, podem surgir efeitos ecológicos, ambientais e modificações nas características dos cenários, que afetam diretamente a biodiversidade, o equilíbrio ecológico, entre outros.

Diante disso, se faz necessário desenvolver ações de preservação e de recuperação dos corpos aquáticos afetados pela poluição, sendo assim, o objetivo desse estudo é desenvolver uma modelagem matemática que permita avaliar diferentes cenários do efeito da dispersão da poluição no meio aquático e sua influência nas dinâmicas interativas entre presas e predadores, no Igarapé do Pantanal em São Sebastião do Uatumã-AM.

A proposta deste estudo é modelar matematicamente a dispersão poluição no Igarapé do Pantanal, a fim de descrever futuros cenários, estimar o tempo de degradação dessa região e o efeito da poluição nas dinâmicas das espécies que ali convivem. O modelo matemático será descrito por um sistema de equações diferenciais parciais (EDP), não-lineares.

O modelo considera fenômenos de dispersão, difusão-advectação, decaimento, acopladas às dinâmicas vitais de Verhulst e a modelagem clássica no sentido de Lotka-Volterra. Simulações computacionais foram executadas a fim de mostrar possíveis e prováveis cenários da região impactada pela poluição. Os resultados numéricos computacionais, obtidos via discretização do modelo pela técnica de diferenças finitas centrais para variável espacial e diferenças finitas de Crank-Nicolson no tempo mostram que a dispersão da poluição apresenta forte influência nas dinâmicas entre as espécies estudadas e na degradação do sistema ecológico em estudo.

Em relação aos cenários resultantes da dispersão da poluição, é importante modelar, aproximar as soluções numericamente e simular computacionalmente cenários, além do tempo que levará para degradação no meio. Os cenários mostram que há grandes prejuízos a biodiversidade e ao equilíbrio

ecológico apresentado no local de estudo.

## 2. Metodologia

### 2.1. O modelo matemático

O sistema de  $EDP_s$  que descreve as dinâmicas entre a presa Cará  $C = C(x, y, t)$  e o predador Tucunaré  $T = T(x, y, t)$ , sob a influência da poluição  $P = P(x, y, t)$ , em cada ponto  $(x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$  no instante  $t \in (0, \tau]$ , sendo  $\tau$  o tempo final, é dado por:

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial t} = \alpha_1 \left( \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \right) - u_1 \frac{\partial P}{\partial x} - v_1 \frac{\partial P}{\partial y} - \mu_1 P + \lambda_1 P + \beta_1 PT - \gamma_1 PC \\ \frac{\partial T}{\partial t} = \alpha_2 \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) - u_2 \frac{\partial T}{\partial x} - v_2 \frac{\partial T}{\partial y} - \mu_2 T + \lambda_2 T \left[ 1 - \frac{\sigma_2 T - \gamma_2 C + \sigma_2 P}{K_t} \right] \\ \frac{\partial C}{\partial t} = \alpha_3 \left( \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right) - u_3 \frac{\partial C}{\partial x} - v_3 \frac{\partial C}{\partial y} - \mu_3 C + \lambda_3 C \left[ 1 - \frac{\sigma_3 C + \gamma_3 T + \sigma_3 P}{K_c} \right] \end{cases} \quad (2.1)$$

O modelo por EDP (2.1) considera os seguintes fenômenos:

- **Difusão:** será considerada a difusão efetiva no sentido de Marchuk (1986) e Okubo (1980). Descritos pelos parâmetros  $\alpha_i, i = 1, \dots, 3$ , considerados constantes neste trabalho;
- **Advecção:** se considera a correnteza da água como um campo advectivo, cuja direção predominante e magnitude são representadas, respectivamente,  $u_i, v_i, i = 1, \dots, 3$ ,  $\mathbf{div}(\mathbf{V})=0$  e considerados de acordo com Prestes e Meyer (2013);
- **Decaimento:** representados pelos coeficientes  $\mu_i, i = 1, \dots, 3$ ;
- **Taxa de crescimento:** descritas por  $\lambda_1, \lambda_2$  e  $\lambda_3$ , o aumento do poluente e das espécies de predadores e presas, respectivamente;
- **Coefficientes de predação:** representados pelos termos  $\pm \frac{\lambda_i \gamma_i}{K_{t,c}}, i = 2, 3$ , na segunda e terceira equações;
- **Influências do poluente nas espécies:** são os termos  $-\frac{\lambda_i \sigma_i}{K_{t,c}}, i = 2, 3$ , na segunda e terceira equações;
- **Competições intraespecíficas:** são caracterizados por  $-\frac{\lambda_i}{K_{t,c}}, i = 2, 3$ , na segunda e terceira equações do sistema (2.1);

- **Contribuição do predador para poluição:** representada pelo coeficiente  $\beta_1$ ;
- **Influência da população de presas na poluição:** representada pelo coeficiente  $\gamma_1$ ;
- **Capacidade suporte:** aqui representadas pelos termos  $K_t$  e  $K_c$ .

## 2.2. Condições de contorno

Para as fronteiras, se recorre às condições homogêneas de Robin que considera  $\Gamma_i$ ,  $i = 1, \dots, 8$ , uma partição da fronteira  $\partial\Omega$  e descreve a variação de  $P$ ,  $C$  e  $T$  na fronteira (Santos e Martins, 2022).

As condições de contorno de Robin são definidas por:

$$\begin{cases} -\alpha \frac{\partial P}{\partial \eta} |_{\Gamma_i} = b_i P \\ -\alpha \frac{\partial T}{\partial \eta} |_{\Gamma_i} = t_i T \\ -\alpha \frac{\partial C}{\partial \eta} |_{\Gamma_i} = c_i C \end{cases} \quad (2.2)$$

Em que,  $b_i$ ,  $t_i$ ,  $c_i$ ,  $i = 1, \dots, 8$ , são as constantes de proporcionalidade adequadas para as condições escolhidas em cada parte  $\Gamma_i$  da fronteira,  $\eta$  é o vetor unitário normal em cada parte  $\Gamma_i$  da fronteira. Assim, se entende que há variação de densidade de poluente e das espécies na fronteira.

## 2.3. Condições iniciais

Para o domínio espacial bidimensional  $\Omega$  se considera inicialmente que não há poluição em nenhum ponto da malha espacial, se considera ainda que todos os pontos estão sob as mesmas condições de serem poluídos. Nestas condições, as espécies consideradas para este estudo também estão sob equilíbrio ecológico e condições estáveis de convívio ambiental.

$$\begin{cases} P(x, y, 0) = P_0(x, y) \\ T(x, y, 0) = T_0(x, y) \\ C(x, y, 0) = C_0(x, y) \end{cases} \quad (2.3)$$

Dessa forma, considerando as condições de contorno e iniciais definidas em (2.2) e (2.3), respectivamente, o modelo matemático (2.1) será reescrito por:

$$\left\{ \begin{array}{l}
\frac{\partial P}{\partial t} = \alpha_1 \left( \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \right) - u_1 \frac{\partial P}{\partial x} - v_1 \frac{\partial P}{\partial y} - \mu_1 P + \lambda_1 P + \beta_1 PT - \gamma_1 PC \\
\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha_2 \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) - u_2 \frac{\partial T}{\partial x} - v_2 \frac{\partial T}{\partial y} - \mu_2 T + \lambda_2 T \left[ 1 - \frac{\sigma_2 T - \gamma_2 C + \sigma_2 P}{K_t} \right] \\
\frac{\partial C}{\partial t} = \alpha_3 \left( \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right) - u_3 \frac{\partial C}{\partial x} - v_3 \frac{\partial C}{\partial y} - \mu_3 C + \lambda_3 C \left[ 1 - \frac{\sigma_3 C + \gamma_3 T + \sigma_3 P}{K_c} \right] \\
-\alpha \frac{\partial P}{\partial \eta} |_{\Gamma_i} = b_i P \\
-\alpha \frac{\partial T}{\partial \eta} |_{\Gamma_i} = t_i T \\
-\alpha \frac{\partial C}{\partial \eta} |_{\Gamma_i} = c_i C \\
P(x, y, 0) = P_0(x, y) \\
T(x, y, 0) = T_0(x, y) \\
C(x, y, 0) = C_0(x, y)
\end{array} \right. \quad (2.4)$$

## 2.4. Esquemas numéricos

Para obter aproximações computacionalmente do sistema (2.4), o modelo e o domínio foram discretizados visando aproximação numérica da solução pelo método de diferenças finitas centrais para a variável espacial e o método de diferenças finitas de Crank-Nicolson para a variável temporal, ambos os métodos são de segunda ordem. Para as fronteiras considerou-se as condições de Robin (Prestes e Meyer, 2013). A escolha dos métodos devem-se à estabilidade numérica se comparados aos outros de mesma ordem e margens de erros, que são de ordem quadrática em ambas as variáveis.

## 2.5. Discretização da variável temporal

Aqui será apresentado o método de Crank-Nicolson (Prestes e Meyer, 2013), de segunda ordem de aproximação para a variável temporal.

Este esquema numérico consiste em, primeiramente, particionar o intervalo de tempo  $[0, \tau]$  em  $r$  subintervalos regulares de tamanho  $\Delta t$ , de modo que a partição uniforme resultante dessa discretização seja dada por  $\{t_0 = 0, t_1, t_2, \dots, t_r = \tau\}$ , sendo  $t_{n+1} - t_n = \Delta t$ , para  $n = 1, \dots, r - 1$ .

De acordo com Prestes e Meyer (2013), para se obter a densidade da

poluição  $P$  ao longo do tempo  $P^n$  e  $P^{n+1}$  no ponto  $P_i$ , se calcula por:

$$P_i^n = P_i^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{(-\frac{\Delta t}{2})^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} + 0(\Delta t)^3 \quad (2.5)$$

$$P_i^{n+1} = P_i^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{(\frac{\Delta t}{2})^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} + 0(\Delta t)^3. \quad (2.6)$$

Fazendo (2.6) – (2.5) obtêm-se:  $P_i^{n+1} - P_i^n = \frac{\Delta t \partial P}{\partial t}$  que resulta em

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{P_i^{n+1} - P_i^n}{\Delta t}. \quad (2.7)$$

Agora fazendo (2.6) + (2.5) se obtém  $P_i^{n+1} + P_i^n = 2P_i^{n+\frac{1}{2}}$  que resulta em

$$P_i^{n+\frac{1}{2}} = \frac{P_i^{n+1} + P_i^n}{2}, \quad (2.8)$$

para encontrar a concentração da poluição no instante  $t = n + \frac{1}{2}$ .

Deste modo, se chega à discretização da variável temporal (Prestes e Meyer, 2013).

Vale lembrar que:

$\Delta x$  e  $\Delta y$  são os tamanhos das malhas da discretização espacial nos eixos das abscissas e das ordenadas, respectivamente,  $\Delta t$  será o incremento no tempo,  $P_{i,j}^n$  aproxima o valor de  $P(x_i, y_j)$  no instante  $t_n$ .

## 2.6. Discretização do termo espacial

O ponto  $P_{i,j}$  é o valor aproximado da concentração de  $P$  em  $(x_i, y_j) \in \Omega$ . Uma idéia geométrica do método de diferenças finitas centrais é representado na figura 1.

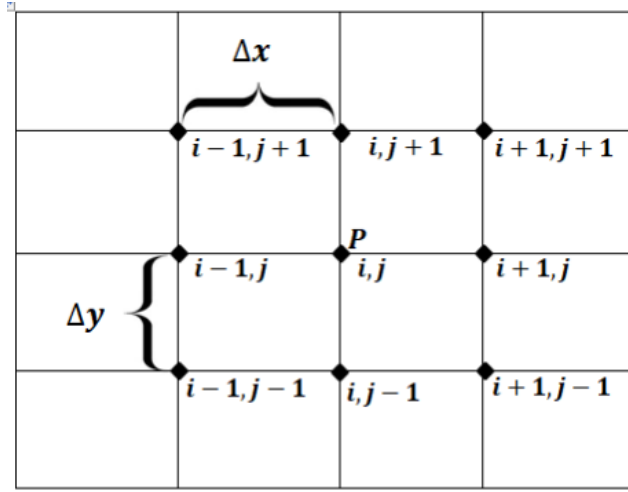


Figura 1: Esquema geométrico do método de diferenças finitas centrais.

A aproximação da solução numérica para o modelo (2.4) será pelo método de diferenças finitas centrais para variável espacial (Leveque, 2007).

Escrevendo as aproximações de primeira e segunda ordem dos pontos  $x_{i+1}$  e  $x_{i-1}$  da expansão em série de Taylor, tem-se:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{f''(x_i)(x_{i+1} - x_i)^2}{2} + r_2(h) \quad (2.9)$$

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{f''(x_i)(x_{i-1} - x_i)^2}{2} + r_2(h) \quad (2.10)$$

Fazendo (2.9) - (2.10) se obtém:

$$f'_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} \quad (2.11)$$

que equivale a escrever

$$\frac{\partial P}{\partial x} \approx \frac{P_{ies} - P_{idi}}{2\Delta x} \quad (2.12)$$

e

$$\frac{\partial P}{\partial y} \approx \frac{P_{iab} - P_{iac}}{2\Delta y}. \quad (2.13)$$

Fazendo (2.9) + (2.10) se obtém:

$$f_i'' = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{(\Delta x)^2} \quad (2.14)$$

que equivale a

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \approx \frac{P_{i_{es}} - 2P_i + P_{i_{di}}}{\Delta x^2}, \quad (2.15)$$

e

$$\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \approx \frac{P_{i_{ab}} - 2P_i + P_{i_{ac}}}{\Delta y^2}, \quad (2.16)$$

## 2.7. Discretização do domínio da aplicação

O modelo matemático (2.4) e o domínio  $\Omega$  foram discretizados visando uma solução por aproximação numérica pelo método de diferenças finitas de Crank-Nicolson no tempo e diferenças finitas centrais na dimensão espacial (Prestes e Meyer, 2013).

Se considerou o domínio retangular  $\Omega = (a, b) \times (a, c) \subset \mathbb{R}^2$  aberto, não vazio e fronteira suficientemente regular que contém em seu interior o Igarapé do Pantanal com aproximadamente  $18.000 \text{ m}^2$  de superfície, no município de São Sebastião do Uatumã-AM, afetada pela poluição. Além disso, se considerou  $\Omega$  uma região plana com dimensões  $60\text{m} \times 300\text{m}$ .

O processo de discretização do domínio visando o uso do método de diferenças finitas centrais para a variável espacial é feito da seguinte forma: considere os intervalos  $(a, b)$  e  $(a, c)$  particionados, respectivamente, em  $mx$  e  $my$  subintervalos. A figura 2 ilustra uma malha para o domínio bidimensional  $\Omega$ , usando um espaçamento  $\Delta x = 0,3$  e  $\Delta y = 0,09$ .

Os nós da malha são enumerados, considerando-se  $nnx = mx + 1$  e  $nnx = my + 1$  como sendo o número de nós nos eixos  $x$  e  $y$ , respectivamente.

A discretização do domínio bidimensional está apresentada na figura 2, a seguir.



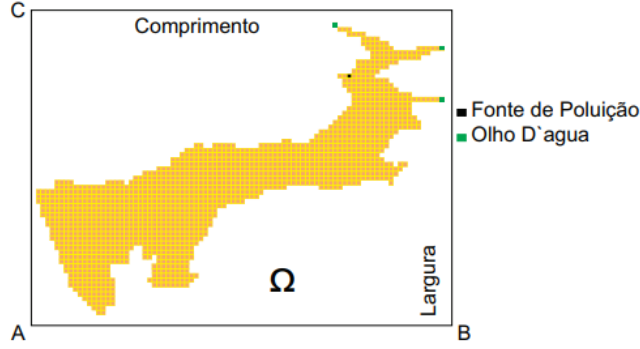


Figura 2: Discretização espacial pelo método de diferenças finitas centrais.

## 2.8. Discretização do modelo (2.4)

Nesta seção, são apresentados os processos de discretização nas variáveis temporais e espaciais do modelo (2.4).

A discretização da primeira equação do modelo (2.4) pelo método de diferenças finitas centrais para pontos interiores da malha espacial, consiste em substituir a equação (2.15) no termo de difusão em  $x$ , (2.16) no termo de difusão em  $y$ , (2.12) no termo de advecção em  $x$  e (2.13) no termo de advecção em  $y$  para um tempo  $t = n + \frac{1}{2}$  resultando em:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_{(i)}^{n+\frac{1}{2}}}{\partial t} = & \alpha_1 \left[ \frac{P_{(i+mx)}^{n+\frac{1}{2}} - 2P_{(i)}^{n+\frac{1}{2}} + P_{(i-mx)}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x^2} + \frac{P_{(i+1)}^{n+\frac{1}{2}} - 2P_{(i)}^{n+\frac{1}{2}} + P_{(i-1)}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta y^2} \right] - \\ & - u_1 \left[ \frac{P_{(i+mx)}^{n+\frac{1}{2}} - P_{(i-mx)}^{n+\frac{1}{2}}}{2\Delta x} \right] - v_1 \left[ \frac{P_{(i+1)}^{n+\frac{1}{2}} - P_{(i-1)}^{n+\frac{1}{2}}}{2\Delta y} \right] - \\ & (\mu_1 - \lambda_1) P_{(i)}^{n+\frac{1}{2}} - \lambda_1 P_{(i)}^{n+\frac{1}{2}} \left( -\beta_1 T_{(i)}^{n+\frac{1}{2}} + \gamma_1 C_{(i)}^{n+\frac{1}{2}} \right) \end{aligned} \quad (2.17)$$

Para a variável temporal a discretização do modelo (2.4) será realizada pelo método de diferenças finitas de Crank-Nicolson. Este processo equivale substituir em (2.17) as equações (2.7) na variação temporal e (2.8) nos termos  $P_i^{n+\frac{1}{2}}$ , resultando em:

$$\begin{aligned}
\frac{P_{(i)}^{n+1} - P_{(i)}^n}{\Delta t} &= \alpha_1 \left[ \frac{\frac{P_{(i+m)}^{n+1} + P_{(i+m)}^n}{2} - 2 \frac{P_{(i)}^{n+1} + P_{(i)}^n}{2} + \frac{P_{(i-m)}^{n+1} + P_{(i-m)}^n}{2}}{\Delta x^2} + \right. \\
&+ \left. \frac{\frac{P_{(i+1)}^{n+1} + P_{(i+1)}^n}{2} - 2 \frac{P_{(i)}^{n+1} + P_{(i)}^n}{2} + \frac{P_{(i-1)}^{n+1} + P_{(i-1)}^n}{2}}{\Delta y^2} \right] - \\
u_1 &\left[ \frac{\frac{P_{(i+m)}^{n+1} + P_{(i+m)}^n}{2} - \frac{P_{(i-m)}^{n+1} + P_{(i-m)}^n}{2}}{2\Delta x} \right] \\
-v_1 &\left[ \frac{\frac{P_{(i+1)}^{n+1} + P_{(i+1)}^n}{2} - \frac{P_{(i-1)}^{n+1} + P_{(i-1)}^n}{2}}{2\Delta y} \right] - (\mu_1 - \lambda_1) \frac{P_{(i)}^{n+1} + P_{(i)}^n}{2} \\
-\lambda_1 &\frac{P_{(i)}^{n+1} + P_{(i)}^n}{2} \left[ -\beta_1 \frac{T_{(i)}^{n+1} + T_{(i)}^n}{2} + \gamma_1 \frac{C_{(i)}^{n+1} + C_{(i)}^n}{2} \right]
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Após alguns procedimentos algébricos em (2.18) se obtém:

$$\begin{aligned}
P_{(i)}^{n+1} - P_{(i)}^n &= \Delta t \alpha_1 \left[ \frac{P_{(i+m)}^{n+1} + P_{(i+m)}^n - 2P_{(i)}^{n+1} - 2P_{(i)}^n + P_{(i-m)}^{n+1} + P_{(i-m)}^n}{2\Delta x^2} + \right. \\
&+ \left. \frac{P_{(i+1)}^{n+1} + P_{(i+1)}^n - 2P_{(i)}^{n+1} - 2P_{(i)}^n + P_{(i-1)}^{n+1} + P_{(i-1)}^n}{2\Delta y^2} \right] - \\
\Delta t u_1 &\left[ \frac{P_{(i+m)}^{n+1} + P_{(i+m)}^n - P_{(i-m)}^{n+1} - P_{(i-m)}^n}{4\Delta x} \right] \\
-\Delta t v_1 &\left[ \frac{P_{(i+1)}^{n+1} + P_{(i+1)}^n - P_{(i-1)}^{n+1} - P_{(i-1)}^n}{4\Delta y} \right] - \Delta t (\mu_1 - \lambda_1) \frac{P_{(i)}^{n+1} + P_{(i)}^n}{2} \\
-\Delta t \lambda_1 &\frac{P_{(i)}^{n+1} + P_{(i)}^n}{2} \left[ -\beta_1 \frac{T_{(i)}^{n+1} + T_{(i)}^n}{2} + \gamma_1 \frac{C_{(i)}^{n+1} + C_{(i)}^n}{2} \right]
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Agrupando os termos em (2.19) no mesmo passo de tempo de modo conveniente, se chega a:

$$\begin{aligned}
&P_{(i-1)}^{n+1} \left( -\frac{\Delta t \alpha_1}{2\Delta y^2} - \frac{\Delta t v_1}{4\Delta y} \right) + P_{(i)}^{n+1} \left( 1 + \frac{\Delta t \alpha_1}{\Delta x^2} + \frac{\Delta t \alpha_1}{\Delta y^2} + \frac{\Delta t \mu_1}{2} \right) + \\
&P_{(i-m)}^{n+1} \left( -\frac{\Delta t \alpha_1}{2\Delta x^2} - \frac{\Delta t u_1}{4\Delta x} \right) + P_{(i+1)}^{n+1} \left( -\frac{\Delta t \alpha_1}{2\Delta y^2} + \frac{\Delta t v_1}{4\Delta y} \right) \\
&+ P_{(i+m)}^{n+1} \left( -\frac{\Delta t \alpha_1}{2\Delta x^2} + \frac{\Delta t u_1}{4\Delta x} \right) + \Delta t \frac{\lambda_1}{2} P_{(i)}^{n+1} \left[ \beta_1 \frac{T_{(i)}^{n+1} + T_{(i)}^n}{2} - \gamma_1 \frac{C_{(i)}^{n+1} + C_{(i)}^n}{2} \right] \\
&= P_{(i-1)}^n \left( \frac{\Delta t \alpha_1}{2\Delta y^2} + \frac{\Delta t v_1}{4\Delta y} \right) + P_{(i)}^n \left( 1 - \frac{\Delta t \alpha_1}{\Delta x^2} - \frac{\Delta t \alpha_1}{\Delta y^2} - \frac{\Delta t \mu_1}{2} \right) + \\
&P_{(i-m)}^n \left( \frac{\Delta t \alpha_1}{2\Delta x^2} + \frac{\Delta t u_1}{4\Delta x} \right) + P_{(i+1)}^n \left( \frac{\Delta t \alpha_1}{2\Delta y^2} - \frac{\Delta t v_1}{4\Delta y} \right) \\
&+ P_{(i+m)}^n \left( \frac{\Delta t \alpha_1}{2\Delta x^2} - \frac{\Delta t u_1}{4\Delta x} \right) - \Delta t \frac{\lambda_1}{2} P_{(i)}^n \left[ -\beta_1 \frac{T_{(i)}^{n+1} + T_{(i)}^n}{2} + \gamma_1 \frac{C_{(i)}^{n+1} + C_{(i)}^n}{2} \right]
\end{aligned}$$

As aproximações das soluções nos pontos interiores da malha discretizada para as demais equações do sistema (2.4) é análoga ao apresentado para primeira equação do referido sistema. Para ver mais detalhes consultar Santos (2023); Prestes e Meyer (2013).

Para obter estimativa das derivadas nas fronteiras da concentração de poluente  $P$ , se considera:

1. **Fronteira horizontal superior** Nesse caso,  $\frac{\partial P}{\partial \eta} = \frac{\partial P}{\partial y}$ . Daí, considerando  $\partial_y \notin \Omega$ , segue que  $\frac{\partial P}{\partial \eta} = -b_1 \frac{P}{\alpha_1}$ .

Com alguns procedimentos algébricos se tem que a aproximação da solução na fronteira horizontal superior é dada por:

$$\begin{aligned}
& P_{(i-mx)}^{n+1} \left( -\frac{\Delta t \alpha_1}{2\Delta x^2} - \frac{\Delta t u_1}{4\Delta x} \right) + P_{(i+mx)}^{n+1} \left( -\frac{\Delta t \alpha_1}{2\Delta x^2} + \frac{\Delta t u_1}{4\Delta x} \right) + \\
& P_{(i)}^{n+1} \left( 1 + \frac{\Delta t \alpha_1}{\Delta x^2} + \frac{\Delta t \alpha_1}{\Delta y^2} + \frac{\Delta t \mu_1}{2} + \frac{b_1 \Delta t}{\Delta y} - \frac{b_1 \Delta t v_1}{2\alpha_1} \right) + \\
& P_{(i-1)}^{n+1} \left( -\frac{\alpha_1 \Delta t}{2\Delta y^2} \right) + \Delta t \frac{\lambda_1}{2} P_{(i)}^{n+1} \left[ \beta_1 \frac{T_{(i)}^{n+1} + T_{(i)}^n}{2} - \gamma_1 \frac{C_{(i)}^{n+1} + C_{(i)}^n}{2} \right] \\
& = P_{(i-mx)}^n \left( \frac{\Delta t \alpha_1}{2\Delta x^2} + \frac{\Delta t u_1}{4\Delta x} \right) + P_{(i+mx)}^n \left( \frac{\Delta t \alpha_1}{2\Delta x^2} - \frac{\Delta t u_1}{4\Delta x} \right) + \\
& + P_{(i)}^n \left( 1 - \frac{\Delta t \alpha_1}{\Delta x^2} - \frac{\Delta t \alpha_1}{\Delta y^2} - \frac{\Delta t \mu_1}{2} - \frac{b_1 \Delta t}{\Delta y} - \frac{b_1 \Delta t v_1}{2\alpha_1} \right) + \\
& + P_{(i-1)}^n \left( \frac{\alpha_1 \Delta t}{2\Delta y^2} \right) - \Delta t \frac{\lambda_1}{2} P_{(i)}^n \left[ -\beta_1 \frac{T_{(i)}^{n+1} + T_{(i)}^n}{2} + \gamma_1 \frac{C_{(i)}^{n+1} + C_{(i)}^n}{2} \right]
\end{aligned}$$

## 2. Fronteira horizontal inferior

O tratamento dado às fronteiras horizontal inferior, vertical à esquerda e vertical à direita são análogos aos realizados na horizontal superior. Portanto, os procedimentos numéricos serão omitidos e apresentados apenas os resultados dos agrupamentos.

$$\begin{aligned}
& P_{(i-mx)}^{n+1} \left( -\frac{\Delta t \alpha_1}{2\Delta x^2} - \frac{\Delta t u_1}{4\Delta x} \right) + P_{(i+mx)}^{n+1} \left( -\frac{\Delta t \alpha_1}{2\Delta x^2} + \frac{\Delta t u_1}{4\Delta x} \right) \\
& + P_{(i)}^{n+1} \left( 1 + \frac{\Delta t \alpha_1}{\Delta x^2} + \frac{\Delta t \alpha_1}{\Delta y^2} + \frac{\Delta t \mu_1}{2} + \frac{b_2 \Delta t}{\Delta y} + \frac{b_2 \Delta t v_1}{2\alpha_1} \right) + \\
& + P_{(i+1)}^{n+1} \left( -\frac{\alpha_1 \Delta t}{2\Delta y^2} \right) + \Delta t \frac{\lambda_1}{2} P_{(i)}^{n+1} \left[ \beta_1 \frac{T_{(i)}^{n+1} + T_{(i)}^n}{2} - \gamma_1 \frac{C_{(i)}^{n+1} + C_{(i)}^n}{2} \right] \\
& = P_{(i-mx)}^n \left( \frac{\Delta t \alpha_1}{2\Delta x^2} + \frac{\Delta t u_1}{4\Delta x} \right) + P_{(i+mx)}^n \left( \frac{\Delta t \alpha_1}{2\Delta x^2} - \frac{\Delta t u_1}{4\Delta x} \right) \\
& + P_{(i)}^n \left( 1 - \frac{\Delta t \alpha_1}{\Delta x^2} - \frac{\Delta t \alpha_1}{\Delta y^2} - \frac{\Delta t \mu_1}{2} - \frac{b_2 \Delta t}{\Delta y} - \frac{b_2 \Delta t v_1}{2\alpha_1} \right) + \\
& P_{(i+1)}^n \left( \frac{\alpha_1 \Delta t}{2\Delta y^2} \right) - \Delta t \frac{\lambda_1}{2} P_{(i)}^n \left[ -\beta_1 \frac{T_{(i)}^{n+1} + T_{(i)}^n}{2} + \gamma_1 \frac{C_{(i)}^{n+1} + C_{(i)}^n}{2} \right]
\end{aligned}$$

Nas demais fronteiras o processo é semelhante.

Para a população  $T$  dos predadores que corresponde a segunda equação do modelo (2.4), nos pontos interiores da malha discretizada, o processo de discretização será da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{(i)}^{n+\frac{1}{2}}}{\partial t} = & \alpha_2 \left[ \frac{T_{(i+m)}^{n+\frac{1}{2}} - 2T_{(i)}^{n+\frac{1}{2}} + T_{(i-m)}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x^2} + \frac{T_{(i+1)}^{n+\frac{1}{2}} - 2T_{(i)}^{n+\frac{1}{2}} + T_{(i-1)}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta y^2} \right] - \\ & -u_2 \left[ \frac{T_{(i+m)}^{n+\frac{1}{2}} - T_{(i-m)}^{n+\frac{1}{2}}}{2\Delta x} \right] - v_2 \left[ \frac{T_{(i+1)}^{n+\frac{1}{2}} - T_{(i-1)}^{n+\frac{1}{2}}}{2\Delta y} \right] - (\mu_2 - \lambda_2)T_{(i)}^{n+\frac{1}{2}} - \\ & -\lambda_2 T_{(i)}^{n+\frac{1}{2}} \left[ \frac{T_{(i)}^{n+\frac{1}{2}} - \gamma_2 C_{(i)}^{n+\frac{1}{2}} + \sigma_2 P_{(i)}^{n+\frac{1}{2}}}{K_t} \right] \end{aligned} \quad (2.20)$$

Aplicando em (2.20) o termo temporal de Crank-Nicolson similar ao realizado em (2.19), se obtém:

$$\begin{aligned} \frac{T_{(i)}^{n+1} - T_{(i)}^n}{\Delta t} = & \alpha_2 \left[ \frac{\frac{T_{(i+m)}^{n+1} + T_{(i+m)}^n}{2} - 2\frac{T_{(i)}^{n+1} + T_{(i)}^n}{2} + \frac{T_{(i-m)}^{n+1} + T_{(i-m)}^n}{2}}{\Delta x^2} + \right. \\ & \left. + \frac{\frac{T_{(i+1)}^{n+1} + T_{(i+1)}^n}{2} - 2\frac{T_{(i)}^{n+1} + T_{(i)}^n}{2} + \frac{T_{(i-1)}^{n+1} + T_{(i-1)}^n}{2}}{\Delta y^2} \right] - \\ & -u_2 \left[ \frac{\frac{T_{(i+m)}^{n+1} + T_{(i+m)}^n}{2} - \frac{T_{(i-m)}^{n+1} + T_{(i-m)}^n}{2}}{2\Delta x} \right] \\ & -v_2 \left[ \frac{\frac{T_{(i+1)}^{n+1} + T_{(i+1)}^n}{2} - \frac{T_{(i-1)}^{n+1} + T_{(i-1)}^n}{2}}{2\Delta y} \right] - (\mu_2 - \lambda_2) \frac{T_{(i)}^{n+1} + T_{(i)}^n}{2} \\ & -\lambda_2 \left( \frac{T_{(i)}^{n+1} + T_{(i)}^n}{2} \right) \left[ \frac{(T_{(i)}^{n+1} + T_{(i)}^n)}{2K} - \gamma_2 \frac{(C_{(i)}^{n+1} + C_{(i)}^n)}{2K} + \sigma_2 \frac{(P_{(i)}^{n+1} + P_{(i)}^n)}{2K} \right] \end{aligned} \quad (2.21)$$

Após alguns procedimentos algébricos em (2.21) e agrupando os termos no mesmo passo de tempo de modo conveniente, se obtém:

$$\begin{aligned}
& T_{(i-mx)}^{n+1} \left( -\frac{\Delta t \alpha_2}{2\Delta x^2} - \frac{\Delta t v_2}{4\Delta x} \right) + T_{(i-1)}^{n+1} \left( -\frac{\Delta t \alpha_2}{2\Delta y^2} - \frac{\Delta t v_2}{4\Delta y} \right) + \\
& + T_{(i)}^{n+1} \left( 1 + \frac{\Delta t \lambda_2}{2} + \frac{\Delta t \alpha_2}{\Delta x^2} + \frac{\Delta t \alpha_2}{\Delta y^2} + \frac{\Delta t \mu_2}{2} \right) + \\
& + T_{(i+1)}^{n+1} \left( -\frac{\Delta t \alpha_2}{2\Delta y^2} + \frac{\Delta t v_2}{4\Delta y} \right) + T_{(i+mx)}^{n+1} \left( -\frac{\Delta t \alpha_2}{2\Delta x^2} + \frac{\Delta t v_2}{4\Delta x} \right) + \\
& + \lambda_2 \frac{\Delta t}{2} T_{(i)}^{n+1} \left( \frac{T_{(i)}^{n+1} + T_{(i)}^n}{2K} - \gamma_2 \frac{C_{(i)}^{n+1} + C_{(i)}^n}{2K} + \sigma_2 \frac{P_{(i)}^{n+1} + P_{(i)}^n}{2K} \right) = \\
& T_{(i-mx)}^n \left( \frac{\Delta t \alpha_2}{2\Delta x^2} + \frac{\Delta t v_2}{4\Delta x} \right) + T_{(i-1)}^n \left( \frac{\Delta t \alpha_2}{2\Delta y^2} + \frac{\Delta t v_2}{4\Delta y} \right) + \\
& + T_{(i)}^n \left( 1 - \frac{\Delta t \lambda_2}{2} - \frac{\Delta t \alpha_2}{\Delta x^2} - \frac{\Delta t \alpha_2}{\Delta y^2} - \frac{\Delta t \mu_2}{2} \right) + \\
& + T_{(i+1)}^n \left( \frac{\Delta t \alpha_2}{2\Delta y^2} - \frac{\Delta t v_2}{4\Delta y} \right) + T_{(i+mx)}^n \left( \frac{\Delta t \alpha_2}{2\Delta x^2} - \frac{\Delta t v_2}{4\Delta x} \right) - \\
& - \lambda_2 \frac{\Delta t}{2} T_{(i)}^n \left( \frac{T_{(i)}^{n+1} + T_{(i)}^n}{2K} - \gamma_2 \frac{C_{(i)}^{n+1} + C_{(i)}^n}{2K} + \sigma_2 \frac{P_{(i)}^{n+1} + P_{(i)}^n}{2K} \right)
\end{aligned}$$

Para obter estimativa das derivadas nas fronteiras para espécie  $T$ , se considera:

### 1. Fronteira horizontal superior

Nesse caso,  $\frac{\partial T}{\partial \eta} = \frac{\partial T}{\partial y}$ . Daí, considerando  $\partial_y \notin \Omega$ , segue que  $\frac{\partial T}{\partial \eta} = -t_2 \frac{T}{\alpha_2}$ .

Com alguns procedimentos algébricos e agrupando os termos no mesmo passo de tempo se tem que a aproximação da solução na fronteira horizontal superior é dada por:

$$\begin{aligned}
& T_{(i-mx)}^{n+1} \left( -\frac{\Delta t \alpha_2}{2\Delta x^2} - \frac{\Delta t v_2}{4\Delta x} \right) + T_{(i+mx)}^{n+1} \left( -\frac{\Delta t \alpha_2}{2\Delta x^2} + \frac{\Delta t v_2}{4\Delta x} \right) + T_{(i-1)}^{n+1} \left( -\frac{\alpha_2 \Delta t}{2\Delta y^2} \right) \\
& + T_{(i)}^{n+1} \left( 1 - \frac{\Delta t \lambda_2}{2} + \frac{\Delta t \alpha_2}{\Delta x^2} + \frac{\Delta t \alpha_2}{\Delta y^2} + \frac{\Delta t \mu_2}{2} + \frac{t_2 \Delta t}{\Delta y} - \frac{t_2 \Delta t v_2}{2\alpha_2} \right) \\
& + \lambda_2 \frac{\Delta t}{2} T_{(i)}^{n+1} \left( \frac{T_{(i)}^{n+1} + T_{(i)}^n}{2K} - \gamma_2 \frac{C_{(i)}^{n+1} + C_{(i)}^n}{2K} + \sigma_2 \frac{P_{(i)}^{n+1} + P_{(i)}^n}{2K} \right) = \\
& T_{(i-mx)}^n \left( \frac{\Delta t \alpha_2}{2\Delta x^2} + \frac{\Delta t v_2}{4\Delta x} \right) + T_{(i+mx)}^n \left( \frac{\Delta t \alpha_2}{2\Delta x^2} - \frac{\Delta t v_2}{4\Delta x} \right) + T_{(i-1)}^n \left( \frac{\alpha_2 \Delta t}{2\Delta y^2} \right) - \\
& + T_{(i)}^n \left( 1 + \frac{\Delta t \lambda_2}{2} - \frac{\Delta t \alpha_2}{\Delta x^2} - \frac{\Delta t \alpha_2}{\Delta y^2} - \frac{\Delta t \mu_2}{2} - \frac{t_2 \Delta t}{\Delta y} + \frac{t_1 \Delta t v_2}{2\alpha_2} \right) \\
& - \lambda_2 \frac{\Delta t}{2} T_{(i)}^n \left( \frac{T_{(i)}^{n+1} + T_{(i)}^n}{2K} - \gamma_2 \frac{C_{(i)}^{n+1} + C_{(i)}^n}{2K} + \sigma_2 \frac{P_{(i)}^{n+1} + P_{(i)}^n}{2K} \right)
\end{aligned}$$

Nas demais fronteiras o processo é semelhante.

Para contornar a não linearidade, o sistema foi resolvido aplicando os mesmos procedimentos adotados por Santos (2023).

De modo sucinto, se tem:

$$\begin{aligned} A_I (P^n, T^n, C^n, P^{n+1}, T^{n+1}, C^{n+1}) P_I^{n+1} = \\ B_I (P^n, T^n, C^n, P^{n+1}, T^{n+1}, C^{n+1}) P_I^n \end{aligned}$$

com condições iniciais  $P_I^{(0)} = (P_{I_1}^{(0)}, P_{I_2}^{(0)}, \dots, P_{I_n}^{(0)})$ ,  $I = 1, 2, 3$ .

Os processos iterativos são obtidos mediante o seguinte algoritmo:

1. Se resolve o sistema

$$\begin{aligned} A_1 (P^{(0)}, T^{(0)}, C^{(0)}, P^{(0)}, T^{(0)}, C^{(0)}) P^{(*)} = \\ B_1 (P^{(0)}, T^{(0)}, C^{(0)}, P^{(0)}, T^{(0)}, C^{(0)}) P^{(0)} \end{aligned}$$

obtendo o vetor  $P^{(*)}$ ;

2. Agora, se resolve o sistema

$$\begin{aligned} A_2 (P^{(0)}, T^{(0)}, C^{(0)}, P^{(*)}, T^{(0)}, C^{(0)}) T^{(*)} = \\ B_2 (P^{(0)}, T^{(0)}, C^{(0)}, P^{(*)}, T^{(0)}, C^{(0)}) T^{(0)} \end{aligned}$$

obtendo o vetor  $T^{(*)}$ ;

3. Em seguida, se resolve o sistema

$$\begin{aligned} A_3 (P^{(0)}, T^{(0)}, C^{(0)}, P^{(*)}, T^{(*)}, C^{(0)}) C^{(*)} = \\ B_3 (P^{(0)}, T^{(0)}, C^{(0)}, P^{(*)}, T^{(*)}, C^{(0)}) C^{(0)} \end{aligned}$$

obtendo o vetor  $C^{(*)}$ ;

4. Então, se resolve o sistema

$$\begin{aligned} A_1 (P^{(0)}, T^{(0)}, C^{(0)}, P^{(*)}, T^{(*)}, C^{(*)}) P^{(**)} = \\ B_1 (P^{(0)}, T^{(0)}, C^{(0)}, P^{(*)}, T^{(*)}, C^{(*)}) P^{(0)} \end{aligned}$$

obtendo o vetor  $P^{(**)}$ ;

5. Agora, se resolve o sistema

$$\begin{aligned} A_2 (P^{(0)}, T^{(0)}, C^{(0)}, P^{(**)}, T^{(*)}, C^{(*)}) T^{(**)} = \\ B_2 (P^{(0)}, T^{(0)}, C^{(0)}, P^{(**)}, T^{(*)}, C^{(*)}) T^{(0)} \end{aligned}$$

obtendo o vetor  $T^{(**)}$ ;

6. Então, se resolve o sistema

$$\begin{aligned} A_3 (P^{(0)}, T^{(0)}, C^{(0)}, P^{(**)}, T^{(**)}, C^{(*)}) C^{(**)} = \\ B_3 (P^{(0)}, T^{(0)}, C^{(0)}, P^{(**)}, T^{(**)}, C^{(*)}) C^{(0)} \end{aligned}$$

obtendo o vetor  $C^{(**)}$ ;

7. Procedendo de maneira análoga, se obtém, sucessivamente,  $P^{(***)}$ ,  $T^{(***)}$  e  $C^{(***)}$  até que se definam as aproximações dos vetores  $P^{(1)}$ ,  $T^{(1)}$  e  $C^{(1)}$ ;

8. Os procedimentos de 1 a 7 são repetidos para  $P^{(n)}$ ,  $T^{(n)}$  e  $C^{(n)}$  no lugar de  $P^{(0)}$ ,  $T^{(0)}$  e  $C^{(0)}$ , após as iterações internas, para se obter o  $(n+1)$ -ésimo termo da iteração temporal,  $P^{(n+1)}$ ,  $T^{(n+1)}$  e  $C^{(n+1)}$ .

Esse método denominado preditor-corretor, definido no âmbito de uma discretização para Crank-Nicolson, irá melhorar as aproximações da ordem de  $(\Delta t)^2$  em cada iteração temporal.

### 3. Resultados numéricos do modelo (2.4)

Nesta seção, são apresentados os resultados numéricos das simulações computacionais considerando o modelo (2.4), que descreve as dinâmicas do sistema presa-predador, diante da dispersão de poluição no corpo aquático.

#### 3.1. Resultados das dinâmicas temporais

Primeiramente, aqui são apresentados os resultados das dinâmicas temporais das espécies descritas no modelo (2.4) para as duas espécies de peixe (sendo uma espécie de presas  $C$  e a outra de predadores  $T$ ) diante da dispersão de poluente  $P$  no corpo aquático do Igarapé do Pantanal.

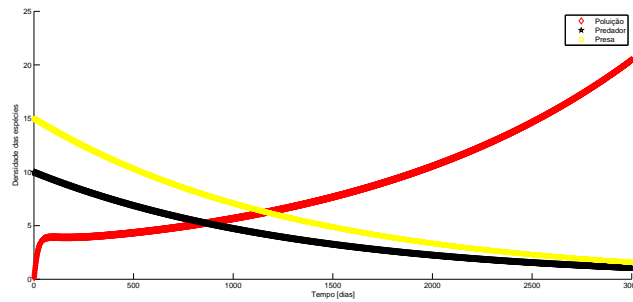


Figura 3: Dinâmicas temporais de  $P$  (vermelho),  $T$  (preto) e  $C$  (amarelo),  $\Delta t = 0,5$ .

As curvas apresentadas na figura 3 descrevem a partir das condições iniciais o comportamento no tempo das duas espécies de peixes  $T$ ,  $C$  diante da dispersão da poluição  $P$ , como resultado das simulações numéricas.

Os resultados mostram que, inicialmente, não havia poluição no meio e que as espécies  $T$  e  $C$  desenvolviam suas dinâmicas normalmente, com o passar do tempo o poluente  $P$  começa seu processo de dispersão causada pelo fenômeno difusivo-advectivo e se espalha ao longo do corpo aquático afetando as dinâmicas das espécies consideradas, ou seja, no decorrer do tempo essas espécies reduziram suas densidades populacionais devido a poluição.

Nesse cenário, é possível constatar que, ao longo do tempo, as densidades populacionais se reduzem, tendendo ambas as espécies para a extinção.

### 3.2. Resultados das dinâmicas espaciais

Aqui são apresentados os resultados das dinâmicas espaciais das espécies representadas no modelo (2.4) das duas espécies de peixe (sendo uma espécie de presas  $C$  e a outra de predadores  $T$ ) diante da dispersão de poluente  $P$  no corpo aquático do Igarapé do Pantanal.



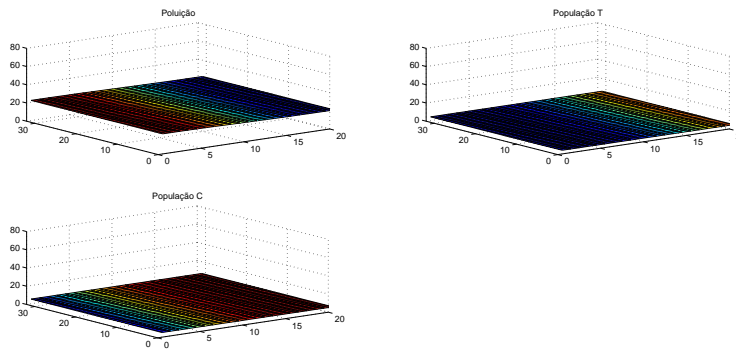


Figura 4: Dinâmica espacial de  $P$ ,  $T$  e  $C$ ,  $\Delta t = 0, 1$ .

Se nota que a dispersão da poluição  $P$  devido a difusão e a advecção afeta grande região do domínio bidimensional ocasionando sérios problemas às predominâncias espaciais das espécies de presas  $C$  e de predadores  $T$  em toda região considerada na simulação.

Vale resaltar que cores próximas do azul indicam baixa concentração da espécie e da poluição e próximas ao vermelho, alta concentração da espécie e da poluição.

A figura 4 descreve os efeitos da poluição descrita pela primeira equação do modelo (2.4) sobre as espécies  $T$  e  $C$ . Se pode observar o espalhamento natural de  $P$  por todo o domínio, devido aos efeitos da difusão e da advecção, o que provoca fortes alterações nas dinâmicas e a inibição no crescimento natural de ambas espécies. Ainda nessa figura, é possível notar uma região do domínio bidimensional em que a densidade de  $P$  é maior que em outra. Isso pode ser explicado pelo fenômeno advectivo que transporta o poluente em direção a fronteira (dependendo de sua direção).

É possível observar que na região do domínio em que a concentração da poluição é maior (cor vermelha) a concentração da espécie de presas  $C$  é menor quando comparada a outras regiões do domínio, e a concentração da população dos predadores  $T$  nessa mesma região onde a poluição é maior é ainda menor que a de presas  $C$ . Isso pode ser explicado pelo fato da poluição ser mais prejudicial a espécie  $T$  do que a  $C$ .

Pode ser considerado também que parte da população de presas  $C$  se alimenta de alguns tipos de resíduos dessa poluição e, por isso, a concentração

de  $C$  próximo a região de maior concentração de  $P$  é maior que a de  $T$ .

## 4. Conclusões

Os resultados apontam que a dispersão de poluentes em corpos aquáticos é extremamente prejudicial à vida, à biodiversidade e ao equilíbrio ecológico a curto, médio e longo prazos, decorrentes de uma série de efeitos negativos de impactos ambientais. Dentre eles, a poluição em meios aquáticos afeta de modo catastrófico o delicado e instável equilíbrio do convívio entre espécies que se inter-relacionam no mesmo habitat.

Neste trabalho, o modelo matemático constituído por três equações diferenciais parciais não-lineares foi desenvolvido com o principal objetivo de descrever qualitativa e quantitativamente a dispersão de um poluente no Igarapé do Pantanal e suas influências nas dinâmicas interativas de presas e predadores, elucidando as futuras condições aquáticas e o tempo de propagação de  $P$  e sua influência nas interações inter e intraespecíficas de  $T$  e  $C$ . Assim, se conclui que o objetivo desse trabalho foi alcançado.

Nas simulações apresentadas nas figuras 3, 4, os resultados obtidos se mostraram de acordo com as expectativas para os fenômenos considerados no modelo (2.4), sendo que o comportamento do processo de dispersão com seus efeitos nas espécies que ali convivem, são coerentes com o que ocorre em situações reais no Igarapé do Pantanal em São Sebastião do Uatumã-AM.

Se pode inferir que, com base nas simulações apresentadas, seria conveniente que as fontes de poluentes que afetam o Igarapé do Pantanal, fossem erradicadas de forma adequada, a fim de se obter uma redução considerável no acúmulo de material impactante nos corpos aquáticos, que compõem a bacia hidrográfica amazônica.

O modelo foi analisado matematicamente e resolvido numericamente. A partir dos resultados obtidos nas simulações computacionais, se conclui o seguinte:

O modelo aqui apresentado pode contribuir para tornar mais eficientes as estratégias de mitigação da dispersão de materiais impactantes em corpos d'água.

O aumento da difusão de poluente provoca grande impacto nas dinâmicas populacionais das espécies;

O fenômeno advectivo é um fator determinante na direção e velocidade em que se propaga a poluição;

Os fenômenos de volatilização e lixiviação considerados no decaimento contribui para amenizar a concentração de poluente.

Se conclui que a matemática aplicada na subárea da ecologia matemática pode e deve ser trabalhada em prol preservação ambiental e do equilíbrio ecológico.

## Referências

- Leveque, R. J. (2007). *Finite volume methods for hyperbolic problems*, volume 1. Cambridge.
- Manoel Neto, F. (2014). Potencial poluidor e risco ambiental dos recursos hídricos de bacia hidrográfica do rio gramame, paraíba, brasil. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa/PB.
- Marchuk, G. I. (1986). *Mathematical models in environmental problems*, volume 16. North Holland.
- Okubo, A. (1980). *Diffusion and Ecological Problems: Mathematical Models*, volume 1. Springer.
- Prestes, M. F. B. e Meyer, J. F. C. A. (2013). Dispersão de material impactante em meio aquático: modelo matemático, aproximação numérica e simulação computacional - reservatório do salto grande, americana/sp. *Biomatemática*, 23:43–56.
- Santos, C. e Martins, L. J. (2022). Modelagem matemática para descrever a dispersão de poluente no Igarapé do Pantanal-am. *Biomatemática*, 32:87–104.
- Santos, C. F. L. D. (2023). Modelagem matemática para descrever a recuperação de áreas degradadas na amazônia. *Biomatemática*, 33:41–60.

