

# Comparação entre modelos teóricos e dados experimentais do sistema planta-polinizador

Isadora Marcondes<sup>1</sup>, Marcos C. Leite<sup>2</sup>, Paola Ferrari<sup>3</sup>, Pedro Sophia<sup>4</sup>  
Ilum Escola de Ciência, CNPEM – 13.085-903, Campinas/SP.

**Resumo.** Este estudo aborda a adaptação de um modelo matemático que simula a dinâmica do sistema planta-polinizador. O trabalho se baseia em dados experimentais e modelos anteriores que levam em consideração a interação complexa entre dois tipos de plantas e um polinizador, levando em conta a influência da memória dos polinizadores em relação à presença de néctar nas plantas. Para simplificar o modelo e adequá-lo às necessidades deste estudo, removemos interações secundárias e considerações sobre a memória dos polinizadores. O modelo simplificado resultante consiste em um sistema de equações diferenciais que descrevem a interação entre uma planta e um polinizador em relação ao mutualismo. Este trabalho visa validar a viabilidade e a precisão do modelo simplificado, com o intuito de determinar se os dados disponíveis podem ser adequadamente representados por este novo modelo. Além disso, apresentamos uma solução numérica para comparar os resultados aos obtidos por dados experimentais.

**Palavras-chave:** *Biomatemática; sistema dinâmico; equações diferenciais.*

## 1. Introdução

Polinização é um processo que ocorre na natureza e consiste em levar os grãos de pólen da parte masculina da flor para feminina, esse transporte pode ser feito pela própria planta, água, vento e/ou animais (Lima, 2016). No caso

---

<sup>1</sup>isadora220051@ilum.cnpem.br

<sup>2</sup>marcos220057@ilum.cnpem.br

<sup>3</sup>paola220041@ilum.cnpem.br

<sup>4</sup>pedro2200451@ilum.cnpem.br

de animais, a relação ecológica entre os seres envolvidos é o mutualismo, já que tanto as plantas como os animais se beneficiam, já que as plantas podem fecundar e os animais recebem pólen e néctar. A polinização é importante pois ela é responsável por gerar grande parte de frutas, flores e alimentos disponíveis para consumo humano e por isso, a perda dos animais polinizadores pode gerar desequilíbrio nos ecossistema terrestres, afetar diversidade produção alimentícia, colocar em risco segurança de plantas e gerar crises alimentícias que podem se tornar financeiras. Logo, o sistema de polinização afeta diretamente a vida de muitos animais, assim como dos humanos (Abrol, 2012).

A partir da importância desse sistema, diversos estudos vêm sendo feitos de modo que a dinâmica planta-polinizador possa ser simulada e descrito matematicamente (Mitchell et al., 2009).

O modelo que iremos validar aborda a interação entre dois tipos de plantas e um polinizador, levando em consideração o efeito de memória adquirido pelos polinizadores em relação às plantas que não oferecem néctar, mas ainda precisam ser polinizadas. Assim, esses polinizadores, em sua maioria insetos, recordam-se de que essa planta específica não possui néctar e deixam de visitá-la. No entanto, com o passar do tempo, esses animais tendem a esquecer e retornam a essas plantas, resultando em um comportamento oscilatório periódico. Vale a pena ressaltar que a relação com as plantas que não são polinizadas não pode ser chamada de parasitismo, como dito em Vázquez e Barradas (2018), pois relações parasíticas consistem na sobrevivência e reprodução do parasita a custa da saúde do hospedeiro (Solomon et al., 2014), o que não é o caso descrito no modelo.

Assim, o grupo de seres vivos foi dividido em três:

- (1) as plantas com relações mutualísticas com os insetos;
- (2) as plantas com relações ecológica negativa (que “enganam” os insetos) e
- (3) a população de insetos.

O trabalho visa adaptar esse modelo de equações diferenciais, já descrito na literatura (Vázquez e Barradas, 2018), para algo mais simples, levando em consideração uma planta e um polinizador, em mutualismo e sem efeito de memória, e validar essa mudança com um conjunto de dados adquiridos experimentalmente por Erickson et al. (2022).

## 2. Preliminares

O presente artigo aborda o método de Runge-Kutta de quarta ordem como solução numérica a fim de verificar a aplicação do modelo descrito na literatura (Mitchell et al., 2009) em problemas simplificados.

Esse método é um dos modelos numéricos para solução de EDOs, principalmente usado quando soluções analíticas precisas são difíceis de obter. Ele consiste em estimativas iterativas para solução da EDO em pontos discretos ao longo de um intervalo.

Seja um problema de valor inicial

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0,$$

o método Runge-Kutta de ordem quatro é dado pelas seguintes equações

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

em que

$$t_{n+1} = t_n + h,$$

sendo  $y_{n+1}$  a aproximação pelo modelo de  $y(t_{n+1})$ , e

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, y_n), \\ k_2 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right), \\ k_3 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right), \\ k_4 &= f(t_n + h, y_n + hk_3). \end{aligned}$$

Como o método é de quarta ordem o erro associada a cada passo é da ordem de  $h^5$  e erro total acumulado é da ordem  $h^4$  (Ruggiero e Lopes, 2000).

Para a solução numérica é necessário utilizar de métricas de avaliação do modelo, a fim de constatar sua eficiência. Neste estudo, empregamos o Root Mean Square Error (RMSE), traduzido como Erro Quadrático Médio. Essa métrica quantifica a discrepância entre os dados experimentais e as previsões do modelo numérico, conforme expresso pela seguinte equação:

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - y'_i)^2}{n}}.$$

Aqui,  $n$  representa o número total de observações,  $y_i$  são os dados experimentais, e  $y'_i$  são os dados previstos pelo modelo. O cálculo de RMSE inclui a diferença entre valores experimentais e previstos ao quadrado,  $(y_i - y'_i)^2$ , sem considerar a direção da discrepância (positiva ou negativa). Além disso, incorpora a raiz quadrada da média.

É necessário minimizar o valor do RMSE, uma vez que valores menores indicam uma concordância mais precisa entre as previsões do modelo e os dados reais. Este princípio norteia a otimização do modelo, visando aprimorar sua acurácia.

Enquanto o RMSE fornece uma medida de quão próximas as previsões do modelo estão dos valores reais em termos absolutos, o coeficiente de determinação ( $R^2$ ) oferece uma perspectiva diferente, focalizando a proporção da variância nos dados explicada pelo modelo. O  $R^2$  é calculado como:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - y'_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2},$$

sendo  $\bar{y}$  a média dos valores observados ( $y_i$ );  $\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$  representa a variância total dos dados e o numerador a soma dos quadrados dos resíduos, que também aparece no cálculo do RMSE.

Um  $R^2$  próximo de 1 indica que o modelo explica uma grande parte da variância nos dados, sugerindo um bom ajuste. Por outro lado, um  $R^2$  baixo sugere que o modelo não captura bem as tendências nos dados.

É importante notar que, enquanto um RMSE baixo indica previsões precisas em termos de magnitude, um  $R^2$  alto indica que a variação dos dados é bem explicada pelo modelo. Portanto, essas duas métricas oferecem visões complementares sobre o desempenho do modelo: o RMSE avalia a precisão, enquanto o  $R^2$  avalia a adequação do modelo em termos de explicação da variação dos dados (Ruggiero e Lopes, 2000).

### 3. Metodologia

Alterações do modelo planta-polinizador, tornando-o mais simples, e validação com conjunto de dados observacionais do fenômeno.

### 3.1. Modelagem

O modelo descrito na literatura (Mitchell et al., 2009) é escrito dessa forma, com três equações:

$$\frac{dx_1}{dt} = -\mu x_1(x_1 + x_2) + \frac{(1 - \sigma)a(x_1 + x_2)x_3}{1 + \alpha x_1 + \beta(x_2) + \gamma x_3},$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -\mu x_2(x_1 + x_2) + \frac{\sigma a(x_1 + x_2)x_3}{1 + \alpha x_1 + \beta(x_2) + \gamma x_3},$$

$$\frac{dx_3}{dt} = x_3(r_3 - \mu_3 x_3) + \frac{bx_1 x_3}{1 + \alpha x_1 + \beta(x_2) + \gamma x_3} - \frac{cx_2 x_3}{1 + \alpha x_1 + \beta(x_2) + \gamma x_3},$$

sendo  $\mu$  fator de competição entre as plantas;  $r_3$  e  $\mu_3$  são os fatores de crescimento intrínseco e de competição intraespecífica, respectivamente;  $\sigma$  é a taxa de novos descendentes de  $x_2$ , os outros parâmetros estão explicados na tabela 1. A dinâmica pode ser visualizada no diagrama da figura 1.

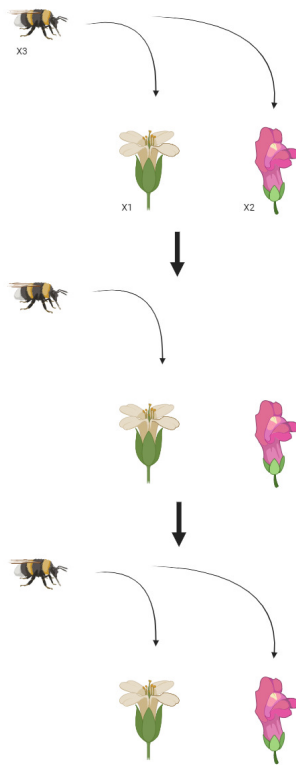


Figura 1: Diagrama que representa o sistema planta-polinizador, no qual o inseto ( $x_3$ ), nesse caso a abelha, aprende que a flor rosa ( $x_2$ ) não possui néctar e para de visitá-la, mas passado um período ela volta a polinizá-la.

Tabela 1: Sumário dos diferentes parâmetros dentro do modelo e suas dimensões (Mitchell et al., 2009).

Parâmetro	Significado	Dimensões
$\mu$	Taxa de competição intraespecífica entre plantas	1/(tempo $\times$ número de plantas)
$\mu_3$	Taxa de competição intraespecífica entre insetos	1/(tempo $\times$ número de insetos)
$r_3$	Taxa de crescimento intrínseco dos polinizadores	1/tempo
$a$	Taxa de encontros efetivos entre insetos e plantas multiplicada pelo benefício que um inseto proporciona à planta	1/(tempo $\times$ número de insetos)
$b$	Taxa de encontros efetivos entre insetos e plantas multiplicada pelo benefício que uma planta proporciona ao inseto	1/(tempo $\times$ número de plantas)
$c$	Taxa de encontros efetivos entre insetos e plantas multiplicada pelo custo incorrido por um inseto a cada visita	1/(tempo $\times$ número de plantas)
$\alpha$	Taxa de saturação que mede a capacidade do inseto de visitar uma flor	1/número de plantas
$\gamma$	Taxa de saturação de visitas às plantas por insetos devida à comunicação intraespecífica entre polinizadores	1/número de insetos
$\beta$	Função que indica a diminuição do número de visitas por inseto devido ao aprendizado. Um exemplo pode ser $\beta(x) = \lambda x$	Adimensional
$\sigma$	Fração de novos descendentes do tipo $x_2$	Adimensional

A adaptação do modelo consiste na retirada dos termos que descrevem as interações com a segunda planta  $x_2$  e o fator de memória, ficando assim:

$$\frac{dx_1}{dt} = -\mu x_1^2 + \frac{ax_1x_3}{1 + \alpha x_1 + \gamma x_3}$$

e

$$\frac{dx_3}{dt} = x_3(r_3 - \mu_3 x_3) + \frac{bx_1x_3}{1 + \alpha x_1 + \gamma x_3}.$$

Além disso, o sistema observado continha cada população de polinizador e sua interação com um único indivíduo da planta, por isso podemos considerar

$$\frac{dx_1}{dt} = 0.$$

A verificação desse novo modelo, escrito a cima, será feita por comparação dos resultados obtidos pela solução numérica com resultados dos dados experimentais.

### 3.2. Verificação numérica

Para verificar a aplicabilidade da simplificação proposta para o modelo de equações diferenciais, vamos utilizar de uma solução numérica das equações diferenciais acopladas através do método de Runge-Kutta. Ou seja, o ponto

inicial  $(x_1(0), x_3(0))$  é determinado pelos dados experimentais, e o restante é calculado iterativamente através do método de Runge-Kutta, conforme descrito na seção Preliminar. Essa solução numérica será comparada com os dados experimentais (Erickson et al., 2022), substituindo os valores iniciais e ajustando os parâmetros  $\mu$ ,  $\mu_3$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $r_3$ ,  $\alpha$  e  $\gamma$ .

### 3.3. Dados experimentais da literatura

Os dados experimentais utilizados foram obtidos a partir do artigo “Measuring Plant Attractiveness to Pollinators: Methods and Considerations” que investigou a dinâmica entre polinizadores e plantas em ecossistemas naturais (Erickson et al., 2022). No entanto, neste trabalho, optamos por restringir nossa análise às populações de abelhas em diversas espécies de plantas.

Os dados consistem em séries temporais que descrevem a evolução das populações de abelhas ao longo do tempo, observadas em diferentes cultivares de plantas. A escolha desses dados permitirá uma análise mais específica da interação entre abelhas e plantas, contribuindo para uma compreensão mais profunda dos processos de polinização. A solução das equações diferenciais descritas na seção 3.1 será ajustada aos dados experimentais, permitindo-nos estimar os parâmetros e avaliar como o modelo se adapta às observações empíricas. A figura 2 exemplifica o número de abelhas em função do tempo para a espécie *Veronica ‘Purple Candles’*.

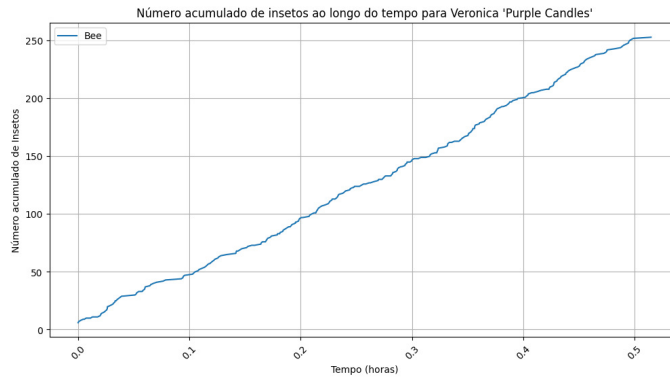


Figura 2: Exemplo de dados experimentais do número de abelhas  $\times$  tempo.

Os dados representam a função que descreve o comportamento da população de abelhas no tempo, ou seja,  $x_3(t)$ . Com o intuito de tornar a função



facilmente manipulável, os dados devem ser ajustados a uma função conhecida, o ajuste será descrito na seção 3.4.

### 3.4. Ajuste do modelo ao polinômio

Uma etapa fundamental neste estudo envolve o ajuste do modelo de equações diferenciais aos dados observacionais das populações de abelhas. O objetivo é determinar os parâmetros do modelo que melhor descrevem as dinâmicas observadas na natureza e validar empiricamente a eficiência do modelo.

Para isso, ajustamos primeiramente uma função polinomial aos dados, para comparar a derivada da mesma função com o campo de derivadas proveniente do modelo. A ordem 3 foi escolhida para o ajuste polinomial com base no erro quadrático médio, conforme a figura 3. O ajuste polinomial se mostra importante por conta das manipulações a serem feitas na função que descreve o comportamento da população de abelhas no tempo.

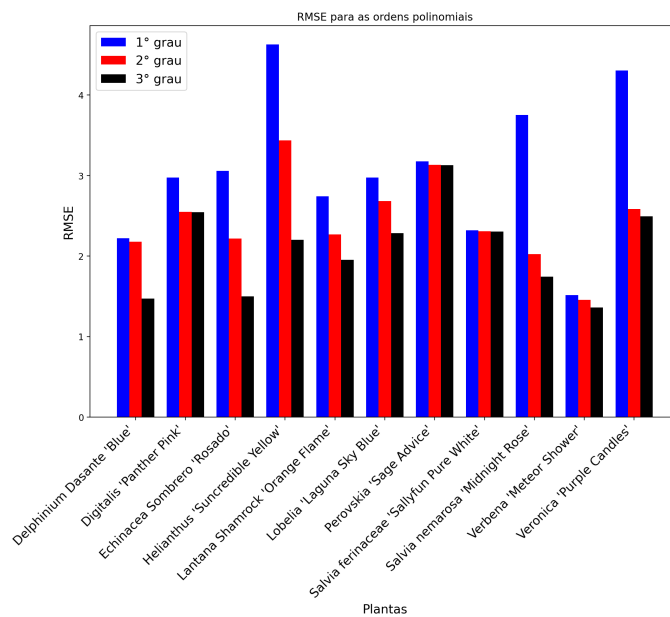


Figura 3: RMSE dos ajustes polinomiais para diferentes espécies.

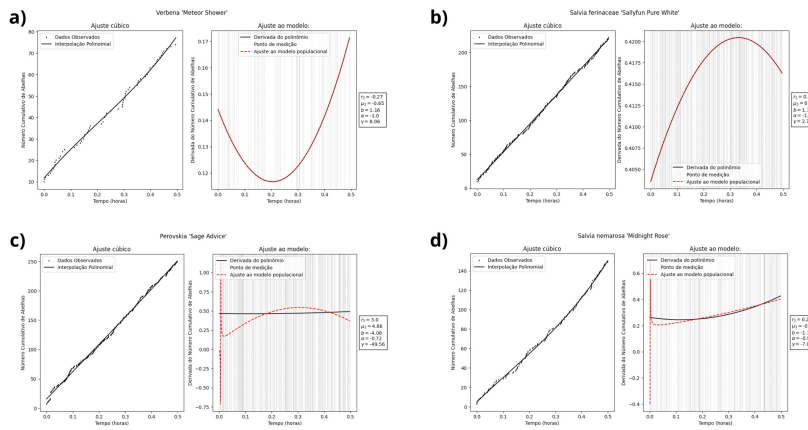


Figura 4: À esquerda de cada imagem temos o ajuste para os dados de polinizadores com o tempo e à direita o ajuste do modelo da derivada dessa função. Os gráficos referem-se as espécies: a) Verbena ‘Meteor Shower’; b) Salvia fernaceae ‘Sallyfun Pure White’; c) Perovskia ‘Sage Advice’; d) Salvia nemarosa ‘Midnight Rose’.

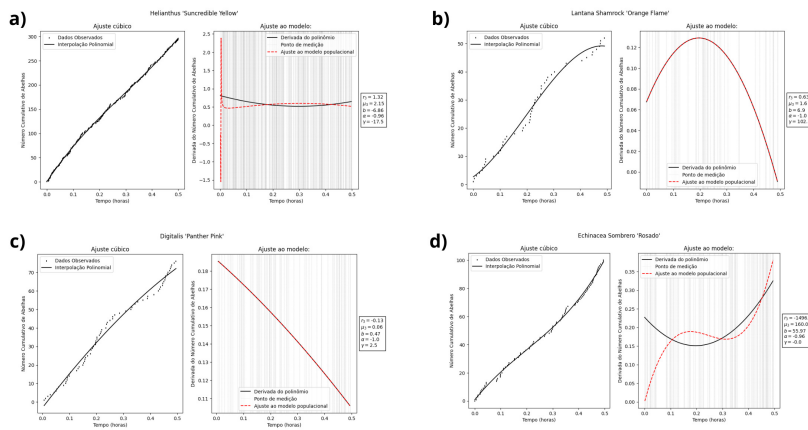


Figura 5: À esquerda de cada imagem temos o ajuste para os dados de polinizadores com o tempo e à direita o ajuste do modelo da derivada dessa função. Os gráficos referem-se as espécies: a) Helianthus ‘Suncredible Yellow’; b) Lantana Shamrock ‘Orange Flame’; c) Digitalis ‘Panther Pink’; d) Echinacea Sombro ‘Rosado’.

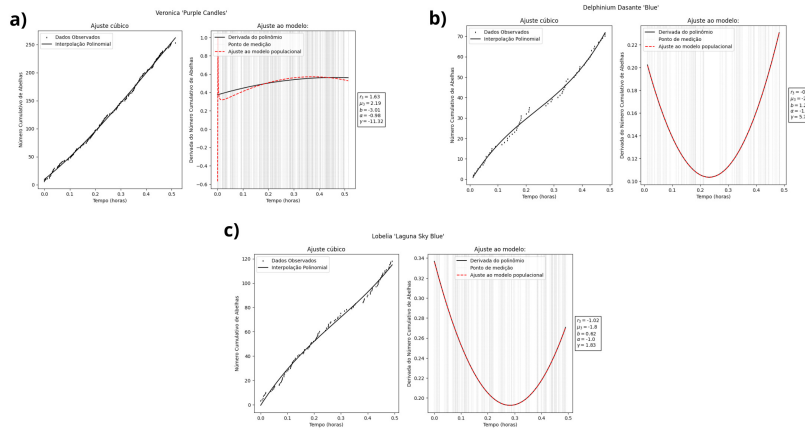


Figura 6: À esquerda de cada imagem temos o ajuste para os dados de polinizadores com o tempo e à direita o ajuste do modelo da derivada dessa função. Os gráficos referem-se as espécies: a) Veronica ‘Purple Candles’; b) Delphinium dasante ‘Blue’; c) Lobelia ‘Laguna Sky Blue’.

As figuras 4, 5 e 6 mostram resultados do ajuste do modelo às séries temporais das populações de abelhas para cada cultivar considerado no estudo. Discutiremos os valores estimados dos parâmetros do modelo e a qualidade do ajuste obtida. Essa análise nos permitirá tirar conclusões sobre a eficácia de como o modelo descreve as dinâmicas das populações de abelhas e como os parâmetros influenciam essas dinâmicas.

#### 4. Resultados

Observamos nas figura 4, 5 e 6 que as espécies representadas nos gráficos na figura 4: **a)**, **b)**, na figura 5: **b)**, **c)** e na figura 6: **b)** e **c)** resultaram em um ajuste satisfatório dos dados experimentais. No entanto, os dados observados na figura 4: **c)**, **d)**, na figura 5: **a)**, **d)** e na figura 6: **a)**, não correspondem ao modelo proposto. Sendo assim, 54% das espécies estudadas se mostraram ajustáveis ao modelo, quando consideramos somente as abelhas como agente polinizador.

## 5. Conclusões

Observamos que a maioria das espécies resultou em um ajuste satisfatório dos dados experimentais (54% das espécies analisadas), o que nos faz considerar que os ajustes feitos no modelo estudado da literatura são suficientes para prever dados experimentais de situações menos complexas. Uma hipótese a ser conferida para os dados que não se comportaram conforme o modelo é que possivelmente o algoritmo encontrou um mínimo local da função. Uma solução seria utilizar diferentes métodos de otimização ou mudar as condições iniciais.

## Referências

- Abrol, D. P. (2012). *Decline in Pollinators*, páginas 545–601. Springer Netherlands, Dordrecht.
- Erickson, E., Grozinger, C. M., e Patch, H. M. (2022). Measuring plant attractiveness to pollinators: Methods and considerations. *Journal of Economic Entomology*, 115(5):1571–1582.
- Lima, E. L. (2016). *Pollination Biology*. SpringerLink Netherlands, Dordrecht.
- Mitchell, R. J., Irwin, R. E., Flanagan, R. J., e Karron, J. D. (2009). Ecology and evolution of plant–pollinator interactions. *Annals of Botany*, 103(9):1355–1363.
- Ruggiero, M. e Lopes, V. L. D. R. (2000). *Cálculo numérico: Aspectos teóricos e computacionais*. Pearson Education do Brasil S.A.
- Solomon, N. U., James, I. M., Alphonsus, N. O.-O., e Nkiruka, R. U. (2014). A review of host-parasite relationships. *Annual Research & Review in Biology*, 5(5):372–384.
- Vázquez, V. e Barradas, I. (2018). A plant–pollinator system: How learning versus cost-benefit can induce periodic oscillations. *International Journal of Biomathematics*, 11(2):1850024.