



MT525 – Propagação de Ondas Sísmicas

2S/2020

<http://goo.gl/S2d5qg>

1 Revisão

1.1. Sejam $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, vetores não colineares. Mostre que

$$\mathbf{u} \cdot [\mathbf{u} \times \mathbf{v}] = \mathbf{v} \cdot [\mathbf{u} \times \mathbf{v}] = 0,$$

ou seja, o vetor $(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$ é ortogonal a \mathbf{u} e \mathbf{v} .

1.2. Sejam $f, g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ e $\phi, \mu : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Se $\mathbf{0} = (0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$, mostre que:

(a) $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$

(g) $\nabla \times (\nabla \times \phi) = \nabla(\nabla \cdot \phi) - \Delta\phi$

(b) $\nabla \cdot (\nabla \times \phi) = 0$

(h) $\nabla \cdot (\nabla(\nabla \cdot \phi)) = \Delta(\nabla \cdot \phi)$

(c) $\nabla \times \nabla f = \mathbf{0}$

(i) $\nabla \cdot (\nabla \times \nabla \times \phi) = 0$

(d) $\nabla \cdot (f\phi) = \nabla f \cdot \phi + f\nabla \cdot \phi$

(j) $\nabla \times (\nabla(\nabla \cdot \phi)) = \mathbf{0}$

(e) $\nabla \times (f\phi) = \nabla f \times \phi + f\nabla \times \phi$

(f) $\nabla \cdot (\phi \times \mu) = (\mu \cdot \nabla \times \phi) - (\phi \cdot \nabla \times \mu)$

(k) $\nabla \times (\nabla \times \nabla \times \phi) = -\Delta(\nabla \times \phi)$

1.3. Seja $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Expresse Δf em coordenadas esféricas.

1.4. Mostre que $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)f(t) dt = f(a)$.

1.5. Mostre que $\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$, para $a \neq 0$.

1.6. Mostre que $t\delta(t-a) = a\delta(t-a)$, para qualquer $a \in \mathbb{R}$.

1.7. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável em todos os pontos de (a, b) , exceto pelo ponto c do intervalo, onde f tem uma descontinuidade de salto. Seja α o salto de f em c , e defina

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & a \leq x < c, \\ f(x) - \alpha, & c \leq x \leq b. \end{cases}$$

(a) Mostre que

$$f(x) = g(x) + \alpha\mu(x-c),$$

onde μ é a função degrau de Heaviside.

(b) Mostre que

$$f'(x) = g'(x) + \alpha\delta(x-c).$$

(c) Seja y a solução de

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = \delta(x - c).$$

Se p e q são contínuas, examine possibilidade de y ser descontínua em c e explique por que isso não pode acontecer. Conclua que essa equação diferencial é equivalente à equação homogênea com a condição de que y seja contínua em c , mas que y' seja descontínua em c , tal que

$$y'(c_+) - y'(c_-) = 1.$$

1.8. Mostre as propriedades da transformada de Fourier.

f	$\mathcal{F}(f)$
$f(t) + ag(t)$	$\hat{f}(\omega) + a\hat{g}(\omega)$
$f(at), \quad a \neq 0$	$\frac{1}{ a }\hat{f}(\omega/a)$
$f(t - a)$	$e^{i\omega a}\hat{f}(\omega)$
$f'(t)$	$-i\omega\hat{f}(\omega)$
$f(t) * g(t)$	$\hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)$
$\hat{f}(t)$	$2\pi f(-\omega)$

1.9. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Mostre que

(a) Se f é par, então \hat{f} é real e par.

(c) $\hat{f}(-\omega) = \overline{\hat{f}(\omega)}$.

(b) Se f é ímpar, então \hat{f} é imaginária e ímpar.

(d) $\text{Re}[\hat{f}(\omega)]$ é par e $\text{Im}[\hat{f}(\omega)]$ é ímpar.

1.10. Encontre a transformada de Fourier de:

(a) $f(t) = e^{iat}$

(c) $f(t) = e^{-a^2t^2}$

(b) $f(t) = \mu(t) \equiv \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$

(d) $f(t) = \mu(|t| - |a|)$

2 Equação da Onda

2.1. Se $\mathbf{u} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, é o vetor deslocamento em (\mathbf{x}, t) , mostre que a perturbação na pressão acústica causada pela propagação de uma onda é dada por $\psi(\mathbf{x}, t) = -\rho c^2 \nabla \cdot \mathbf{u}$, onde $\rho : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ é a densidade e $c : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ é a velocidade de propagação do meio.

2.2. Reescreva a equação da onda 1D, com velocidade e densidade constantes, no sistema de coordenadas definido por $\xi = x - ct$ e $\eta = x + ct$. Resolva a equação nesse novo sistema.

2.3. Encontre a solução da equação onda 1D em uma semi-reta, ou seja,

$$\frac{1}{c^2}\psi_{tt}(x, t) - \psi_{xx}(x, t) = 0, \quad x > 0,$$

com a condição de contorno, $\psi(0, t) = 0$.

2.4. Verifique que $u(x, t) = \cos t \sin x$ é solução de $u_{tt} = u_{xx}$. Como a solução geral tem a forma $u(x, t) = f(t - x/c) + g(t + x/c)$, deve ser possível expressar u dessa maneira. Quem seriam f e g nesse caso?

- 2.5. Resolva a equação da onda 1D, para densidade e velocidade constantes, com as condições iniciais $\psi(x, 0) = F(x)$ e $\psi_t(x, 0) = G(x)$. Faça gráficos para diferentes valores de t , no caso de $F(x) = 1$, se $|x| < \epsilon$ e $F(x) = 0$, caso contrário, e $G(x) = 0$.

$$\mathbf{R:} \psi(x, t) = \frac{1}{2} \left[F(x - ct) + F(x + ct) + \frac{1}{c} \int_{x-ct}^{x+ct} G(s) ds \right] \text{ (fórmula de D'Alembert)}$$

- 2.6. Suponha que $\psi(x, t) = f(t - x) - f(t + x)$, onde

$$f(u) = \begin{cases} 1 - |u|, & -1 \leq u \leq 1 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Explicita o problema de valor inicial que tem ψ como solução.

- 2.7. A solução geral da equação da onda 1D com velocidade constante, pode ser escrita como $\psi(x, t) = f(t - x/c) + g(t + x/c)$ ou através da fórmula de D'Alembert, em termos das condições iniciais prescritas por F e G (vide exercício 2.5 desta seção). Encontre a relação entre as funções f , g e F , G .

- 2.8. Considere a equação da onda acústica 1D, em meio homogêneo, ou seja,

$$\frac{1}{c^2} \psi_{tt} - \psi_{xx} = 0, \quad 0 < x < 1,$$

com condições de contorno $\psi(0, t) = 0$ e $\psi_x(1, t) = 0$. Mostre que existe solução não trivial para esse problema, da forma,

$$\psi(x, t) = u(x)e^{i\omega t},$$

onde $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Determine essa solução. Quais os valores admissíveis para ω ?

- 2.9. Sejam u e v são campos escalares satisfazendo as condições de radiação de Sommerfeld. Considere o produto interno dado por

$$\langle \hat{u}, \hat{v} \rangle \equiv \int_{\mathbb{R}^3} \hat{u}(\mathbf{x}, \omega) \hat{v}(\mathbf{x}, \omega) d\mathbf{x}.$$

Mostre que o operador \mathcal{L} , dado por $\mathcal{L}\hat{u} \equiv \Delta\hat{u} + \frac{\omega^2}{c^2}\hat{u}$, para c constante, é *auto-adjunto*, ou seja, mostre que

$$\langle \mathcal{L}\hat{u}, \hat{v} \rangle = \langle \hat{u}, \mathcal{L}\hat{v} \rangle.$$

- 2.10. Simule a propagação de onda plana 2D, dada por $\psi(\mathbf{x}, t) = f(t - \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}}{c}) + g(t + \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}}{c})$, onde $\mathbf{x}, \mathbf{n} \in \mathbb{R}^2$, $\|\mathbf{n}\| = 1$,

$$f(s) = \max\{0, 1 - |2s|\}, \quad g(s) = -\max\{0, 1 - s^2\}.$$

Fixe um valor para c e exiba vários *snapshots* da propagação. Observe o efeito de variar o vetor \mathbf{n} .

- 2.11. Seja $\psi(\mathbf{x}, t) = \phi(\|\mathbf{x}\|, t)$ a solução de onda acústica esférica 3D em um meio homogêneo com velocidade $c = 2$ km/s. Em termos das ondas esféricas harmônicas,

$$\phi(r, t) = \frac{1}{2\pi r} \int \hat{f}(\omega)e^{i\omega(t-r/c)} + \hat{g}(\omega)e^{i\omega(t+r/c)} d\omega.$$

- Mostre que $\text{Re}\{\psi\}$ e $\text{Im}\{\psi\}$ também são soluções da equação da onda.
- Compute a onda esférica para a função $\hat{f}(\omega) = \mu(\omega - \omega_0) - \mu(\omega - \omega_1)$, para $\omega_0 < \omega_1$, e $\hat{g}(\omega) = 0$.
- Faça o gráfico de $\text{Re}\{\psi(r, t)\}$, primeiro para r fixo e depois para t fixo.
- Experimente variar ω_0 e ω_1 e observar o comportamento da solução. Analise o caso em que $\omega_0 \rightarrow -\infty$ e $\omega_1 \rightarrow \infty$.

2.12. Mostre que a função

$$u(\mathbf{x}, \omega) = \frac{\sin(\omega r/c)}{r},$$

onde $r = \|\mathbf{x}\|$, é uma solução para a equação homogênea de Helmholtz em 3D, isto é, u satisfaz

$$\Delta u + (\omega^2/c^2)u = 0.$$

Mostre porém que u não satisfaz as condições de radiação de Sommerfeld.

2.13. Compute a transformada de Fourier em t de $\psi(\mathbf{x}, t) = f(t - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}{c}) + g(t + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}{c})$.

2.14. Mostre que as funções de Green causais para a equação da onda acústica, com velocidade e densidade constantes, em 1D e em 2D, em um meio ilimitado são dadas, respectivamente, por

$$G_{1D}(x, t) = \frac{c}{2} \mu(t - |x|/c),$$

$$G_{2D}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu(t - \|\mathbf{x}\|/c)}{2\pi \sqrt{t^2 - \|\mathbf{x}\|^2/c^2}},$$

onde μ é a função degrau de Heaviside.

2.15. Para a equação da onda acústica 3D, compute a função de Green anticausal, G_- . Mostre que $\hat{G}_-(\mathbf{x}, \omega) = \hat{G}(\mathbf{x}, \omega)^*$, onde G é a função de Green causal.

2.16. Compute a função de Green para a equação de Laplace, ou seja, resolva

$$\Delta G(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x}),$$

com a condição de que $\lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty} G(\mathbf{x}) = 0$.

2.17. Se $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \nabla \phi + \nabla \times \boldsymbol{\chi}$ é a solução da equação da onda elástica em um meio homogêneo, mostre que $\nabla \cdot \boldsymbol{\chi} = 0$.

2.18. Encontre a decomposição de Helmholtz do campo vetorial $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = f(t)\delta(\mathbf{x})(1, 0, 0)$, ou seja, encontre o campo escalar ϕ e o campo vetorial $\boldsymbol{\chi}$ tal que $\mathbf{F} = \nabla \phi + \nabla \times \boldsymbol{\chi}$.

2.19. Mostre que

$$\int_{t_0}^{t_1} \tau \delta(t - \tau) d\tau = t[\mu(t_1 - t) - \mu(t_0 - t)].$$

2.20. Compute a transformada de Fourier no tempo para obter a função de Green da equação da onda elástica, em meio homogêneo, na frequência, $\hat{\mathbf{G}}_j(\mathbf{x}, \omega)$.

2.21. *Uma onda de superfície propaga-se em um meio 3D, porém é fortemente atenuada a medida que se afasta da superfície do meio. Em sísmica, exemplos de onda de superfície são o ground roll, a onda Rayleigh e a onda Love.*

Considere a equação da onda acústica em um meio 3D homogêneo. A superfície do meio é $z = 0$ e o meio se estende infinitamente para $z > 0$. Procure uma solução de onda de superfície, ou seja, que se propaga próxima a superfície do meio, sendo atenuada em seu interior. Para tanto, proponha que $\psi(\mathbf{x}, t) = f(z)e^{i(\omega t - kx)}$ (onda plana) seja solução de

$$\frac{1}{c^2} \psi_{tt} - \Delta \psi = 0.$$

Encontre a equação que determina f e resolva-a obtendo uma solução que seja atenuada quando $z > 0$. Qual quantidade determina o quão rápido a onda é atenuada?

3 Coeficiente de Reflexão em meios acústicos

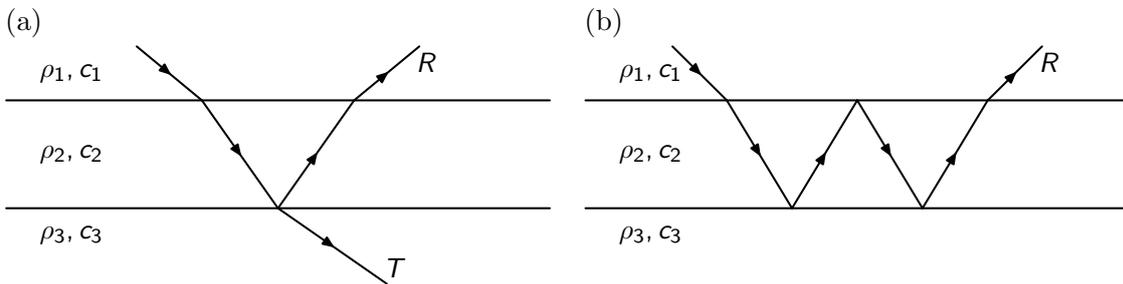
3.1. Mostre que o ângulo de transmissão torna-se complexo quando o ângulo de reflexão é maior que o ângulo crítico. De fato, $\theta_T = \frac{\pi}{2} - i\tau$, com $\tau > 0$, para $\theta > \theta_C$.

3.2. Mostre que o coeficiente de reflexão de uma onda plana acústica é complexo e tem módulo igual a 1, se o ângulo de incidência for maior que o ângulo crítico.

3.3. Mostre que se $R(\theta) = 0$ tiver solução então $\theta = \arccos \sqrt{\frac{1 - (c_1/c_2)^2}{1 - (\rho_2/\rho_1)^2}}$.

3.4. Mostre o coeficiente de reflexão independe do ângulo de incidência, quando a densidade varia entre os meios, mas a velocidade permanece constante.

3.5. Determine os coeficientes de reflexão e transmissão para as ondas planas indicadas a seguir, propagando-se em meios acústicos.



4 Coeficiente de Reflexão em meios elásticos

4.1. Verifique que R_{PP} e T_{PP} para incidência normal coincidem com os coeficientes de reflexão e transmissão para incidência normal em meios acústicos.

4.2. Implemente em Matlab a resolução das equações de Zoeppritz e observe o comportamento do coeficiente de reflexão para diferentes modelos.

5 Aproximações integrais para o campo espalhado

5.1. Seja ψ a solução da equação da onda acústica 3D com o termo fonte F , ou seja,

$$\frac{1}{c(\mathbf{x})^2} \psi_{tt} - \Delta \psi = F(\mathbf{x}, t),$$

e G a função de Green associada. Seja $V \in \mathbb{R}^3$ um volume delimitado pela superfície S , suave. Suponha que ψ satisfaz a condição de radiação de Sommerfeld.

(a) Se $\mathbf{x}_g \in V$, mostre que

$$\hat{\psi}(\mathbf{x}_g, \omega) = \int_V \hat{G}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_g) \hat{F}(\mathbf{x}, \omega) dV + \oint_S [\hat{G}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_g) \nabla \hat{\psi}(\mathbf{x}, \omega) - \hat{\psi}(\mathbf{x}, \omega) \nabla \hat{G}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_g)] \cdot \mathbf{n} dS.$$

(b) Se V for uma esfera de raio R , mostre que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ \oint_S [\hat{G}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_g) \nabla \hat{\psi}(\mathbf{x}, \omega) - \hat{\psi}(\mathbf{x}, \omega) \nabla \hat{G}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_g)] \cdot \mathbf{n} dS \right\} = 0,$$

e portanto,

$$\hat{\psi}(\mathbf{x}_g, \omega) = \int_{\mathbb{R}^3} \hat{G}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_g) \hat{F}(\mathbf{x}, \omega) dV.$$

(c) Defina o *suporte* de F , denotado por $\text{supp } F$, como

$$\text{supp } F = \overline{\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid F(\mathbf{x}, t) \neq 0, \text{ para algum } t\}},$$

ou seja, o suporte de F é o conjunto de todos os pontos onde F em algum momento é não-nula, bem como a fronteira deste conjunto. Mostre que

$$\hat{\psi}(\mathbf{x}_g, \omega) = \int_{\text{supp } F} \hat{G}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_g) \hat{F}(\mathbf{x}, \omega) dV.$$

(d) Se $\text{supp } F$ é um conjunto limitado e $\text{supp } F \subset V$, então

$$\oint_S [\hat{G}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_g) \nabla \hat{\psi}(\mathbf{x}, \omega) - \hat{\psi}(\mathbf{x}, \omega) \nabla \hat{G}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_g)] \cdot \mathbf{n} dS = 0.$$

(e) Interprete fisicamente esses resultados.

5.2. Escreva a integral de Kirchhoff para o caso de c_1 constante, nas seguintes situações:

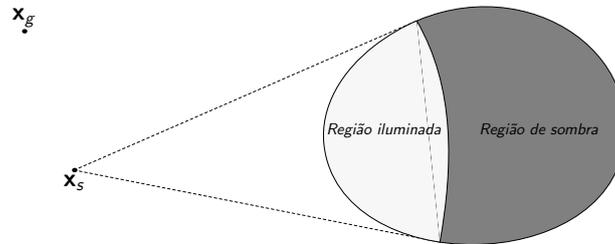
- (a) O refletor é o plano horizontal $z = H > 0$.
- (b) Configuração de afastamento fonte–receptor nulo, isto é, $\mathbf{x}_s = \mathbf{x}_g$.
- (c) Os dois casos acima, com $\mathbf{x}_s = \mathbf{x}_g = 0$.

5.3. Mostre que, no caso (c) do exercício anterior,

$$\varphi(\mathbf{0}, t; \mathbf{0}) \approx \partial_t \left[\frac{H}{2\pi c^2} \mu(t - 2H/c) \frac{R(\hat{\theta})}{t^2} \right] \approx \frac{R(0)}{8\pi H} \delta(t - 2H/c),$$

onde $\cos \hat{\theta} = \frac{2H}{ct}$. Interprete geometricamente.

5.4. Considere o problema de representar o campo espalhado por um corpo opaco, convexo, imerso em um meio homogêneo. Suponha que a fonte é pontual e instantânea.



Imponha, como condição de contorno, que o campo espalhado pela região de sombra é identicamente nulo. Seguindo os mesmos passos utilizados na dedução da representação integral para o campo espalhado por uma superfície infinita, mostre com que o campo espalhado $\hat{\varphi}(\mathbf{x}_g, \omega; \mathbf{x}_s)$, neste caso, é dado por

$$\hat{\varphi}(\mathbf{x}_g, \omega; \mathbf{x}_s) \approx \int_L R(\theta_s) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\hat{G}^s(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_s) \hat{G}^g(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_g) \right) dS, \quad (1)$$

onde L é a porção da superfície do corpo “iluminada” pelo campo incidente, R é o coeficiente de reflexão de onda plana para o ângulo de incidência θ_s , \mathbf{n} é a normal unitária à superfície do corpo “apontando para fora” e \hat{G}^M é a função de Green do espaço livre com uma fonte em \mathbf{x}_M .

5.5. Mostre que, para $\mathbf{x}_s = \mathbf{x}_g$, a fórmula (1), se reduz a

$$\hat{\varphi}(\mathbf{x}_s, \omega; \mathbf{x}_s) \approx -\frac{2i\omega}{c} \int_L R(\theta_s) \frac{e^{2i\omega r/c}}{(4\pi r)^2} \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{n} dS, \quad (2)$$

onde $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_s$, $r = \|\mathbf{r}\|$, e $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$.

5.6. Seja

$$I(\omega) = \int F(u)e^{i\omega\phi(u)}du.$$

O método da fase estacionária é utilizado para obter uma aproximação assintótica para $I(\omega)$. Se u^* é tal que $\phi'(u^*) = 0$ e $\phi''(u^*) \neq 0$, então

$$I(\omega) \sim \sqrt{\frac{2\pi}{\omega|\phi''(u^*)|}}F(u^*)e^{i\omega\phi(u^*)+i\mu\pi/4},$$

onde $\mu = \text{sign}(\phi''(u^*))$.

Suponha que Σ seja uma superfície com simetria cilíndrica, parametrizada por x e y , ou seja, $(x, y) \mapsto \sigma(x, y) = (x, y, f(x))$. Considere fonte e receptor no plano $y = 0$. Obtenha uma aproximação assintótica para o campo de onda refletido por Σ , como uma integral apenas em x .

5.7. Escreva a integral de Born para o caso de c_1 constante nas seguintes situações:

- (a) O refletor é o plano horizontal $z = H > 0$.
- (b) Configuração de afastamento fonte–receptor nulo, isto é, $\mathbf{x}_s = \mathbf{x}_g$.
- (c) Os dois casos acima, com $\mathbf{x}_s = \mathbf{x}_g = 0$.

5.8. Mostre que, no caso (c) do exercício anterior, a aproximação para $\phi(\mathbf{0}, t; \mathbf{0})$ é a mesma obtida no exercício 5.3 desta seção.

5.9. Em \mathbb{R}^3 , considere dois meios acústicos homogêneos separados por uma interface plana e horizontal em $z = H$. A velocidade do meio é expressa como

$$c(\mathbf{x}) = \begin{cases} c_1, & z < H, \\ c_2, & z > H. \end{cases}$$

Seja ψ o campo de onda completo, gerado por uma fonte pontual em $\mathbf{x} = (0, 0, 0)$, e $G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_g)$ o campo de onda direta (sem a presença de interface) gerada por uma fonte pontual em \mathbf{x}_g , para $(\mathbf{x}_g)_3 > H$.

(a) Mostre que

$$\hat{\psi}(\mathbf{x}_g, \omega) = \int_{\Sigma} \left[\hat{\psi}(\mathbf{x}, \omega) \frac{\partial \hat{G}^g}{\partial z}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_g) - \hat{G}^g(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_g) \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial z}(\mathbf{x}, \omega) \right] dS,$$

onde Σ é o plano $z = H$.

- (b) Discuta como definir uma aproximação de Kirchhoff para o campo total ψ e sua derivada normal sobre a interface de transmissão.
- (c) Obtenha uma expressão aproximada para o campo transmitido.

6 Aproximações assintóticas e Teoria dos Raios

6.1. Considere uma curva definida pelo sistema de traçado de raios, isto é

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\sigma} = \lambda(\mathbf{x})\mathbf{p}, \quad \frac{d\mathbf{p}}{d\sigma} = -\frac{\lambda(\mathbf{x})}{c(\mathbf{x})^3}\nabla c(\mathbf{x}), \quad \frac{d\tau}{d\sigma} = \frac{\lambda(\mathbf{x})}{c(\mathbf{x})^2},$$

para alguma função $\lambda : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, diferenciável e não-nula. Mostre que se a equação iconal for satisfeita em algum ponto dessa curva, então a equação iconal será satisfeita para todos os pontos da curva.

6.2. Resolva a equação Iconal em 1D.

- 6.3. Resolva a equação Iconal em 3D, em um meio homogêneo. Interprete geometricamente.
- 6.4. Encontre a solução do sistema de traçamento cinemático de raios, em 3D, em um meio com simetria cilíndrica ($c(\mathbf{x}) = v(z)$).
- 6.5. Compute a velocidade RMS ao longo de um raio vertical, partindo da superfície, em um meio com velocidade crescendo linearmente com a profundidade, isto é, $c(\mathbf{x}) = a + bz$. A saber,

$$v_{RMS}(t)^2 = \frac{1}{t} \int_0^t c(\gamma(t))^2 dt,$$

onde $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ é a curva que descreve a trajetória do raio, parametrizada pelo tempo de trânsito.

- 6.6. Reescreva o sistema de traçamento cinemático de raios 2D (ou seja, no plano $x-z$), parametrizado pelo tempo de trânsito, na forma

$$\frac{dX}{dt} = F(X, t), \quad X(0) = X_0,$$

onde $X_0 \in \mathbb{R}^4$, $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$, $F : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$. Implemente no Octave a resolução deste sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, usando para isto o comando `lsode`. Em cada um dos meios determinados pelos campos de velocidades abaixo, trace raios, a partir de uma fonte pontual em $\mathbf{x} = (0, 0)$, e para diferentes parâmetros de raio iniciais. Construindo um feixe de raios, exiba algumas frentes de onda.

- (a) $c(\mathbf{x}) = 1000$.
- (b) $c(\mathbf{x}) = 1000 + x_3$.
- (c) $c(\mathbf{x}) = 1000 + x_1$.
- (d) $c(\mathbf{x}) = 3000 + 2000 \sin(10^{-7}x_1x_3)$.

- 6.7. Suponha que $c(\mathbf{x}) = 2000 + z/2$. Resolvendo numericamente o sistema de traçamento de raios dinâmico, estime o valor de $\tau(\mathbf{x})$ e $A(\mathbf{x})$, para \mathbf{x} sobre uma malha regular recobrimdo o plano $x-z$, com $x \in [0, 200]$ e $z \in [0, 500]$. Considere uma fonte pontual em $\mathbf{x} = (0, 0, 0)^T$. Exiba os campos de tempo de trânsito e de amplitude.