Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Prof. Ricardo Biloti (`biloti@ime.unicamp.br`)
`http://www.ime.unicamp.br/~biloti`

MS380 – Matemática Aplicada à Biologia

1° sem. 2018

`goo.gl/tiLMjF`

1. Resolva os sistemas lineares abaixo, descritos por suas matrizes de coeficientes e termos independente.

(a) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -7.6 \\ -1.8 \\ -4.0 \\ 10.0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 9 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 15.2 \\ 35.7 \\ 80.4 \\ 46.8 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 8 & 5 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$

2. Resolva, se possível, os sistemas lineares abaixo, determinados pelas matrizes aumentadas dos sistemas.

(a) $\left[\begin{array}{rrr|r} 7 & 2 & 1 & -9.0 \\ -1 & -1 & 0 & 0.5 \\ 8 & 5 & 0 & -8.5 \\ 6 & 0 & 2 & -8.0 \end{array}\right]$

(b) $\left[\begin{array}{rrr|r} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -3 & 7 \\ 0 & 5 & -1 & 6 \\ 4 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right]$

(c) $\left[\begin{array}{rrrr|r} -4 & 2 & 0 & 6 & -22 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 6 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 10 \end{array}\right]$

(d) $\left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & 4 & -2 & 0 & 12 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right]$

3. Determine os valores de k de modo que o sistema linear abaixo, representado por sua matrix aumentada, tenha (a) uma única solução, (b) nenhuma solução e (c) infinitas soluções.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & k & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & k & 3 & 2 \end{array}\right]$$

4. Considere o sistema linear

$$\begin{aligned} ax + by &= e, \\ cx + dy &= f, \end{aligned}$$

nas variáveis x e y. Mostre que o sistema tem solução única apenas se $ad - bc \neq 0$. Em que situação o sistema terá infinitas soluções?

5. Do livro Batschelet (1978), faça os exercícios de 13.2.1 a 13.4.4.

6. Dois camundongos são treinados, em separado, para encontrar a saída de um labirinto. Dado um prazo de 2 minutos para sair do labirinto, Zorro, o primeiro camundongo, consegue se libertar em 40% das tentativas. Akira, o segundo camundongo, consegue a liberdade em 25% das tentativas.

(a) Qual a probabilidade dos dois camundongos se libertarem em menos de 2 minutos?

(b) Qual a probabilidade de pelo menos um dos dois se libertarem em menos de 2 minutos?

(c) Qual a probabilidade de apenas um se libertar em menos de 2 minutos?

(d) Sabendo que Zorro se libertou, qual a probabilidade de que Akira também escape do labirinto a tempo?

7. Em uma determinada população os grupos sanguíneos A (antígeno A), B (antígeno B), AB (antígeno A e B) e O (nenhum antígeno) tem as seguintes probabilidades:

$$p(A) = 0.35, \quad p(B) = 0.42, \quad p(AB) = 0.18, \quad p(O) = 0.05.$$

Já o fator RH positivo (P) ou negativo (N) aparece com as probabilidades:

$$p(P) = 0.70, \quad p(N) = 0.30.$$

Suponha que essas duas características sejam totalmente independentes. Com o propósito de caracterizar um indíviduo, precisamos conhecer tanto seu tipo sanguíneo como o fator RH.

(a) Explicite qual o espaço amostral.

(b) Qual a probabilidade de que um indivíduo tenha antígeno A?

(c) Qual a probabilidade de que um indivíduo não tenha antígeno algum?

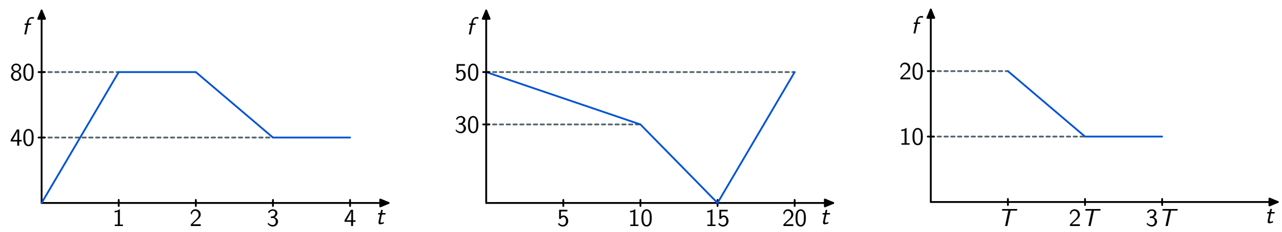
(d) Qual a probabilidade de um indíviduo ter sangue tipo A, com fator RH negativo?

(e) Qual a probabilidade de um indivíduo ser um doador universal?

(f) Qual a probabilidade de um indivíduo ser um receptor universal?

(g) Qual a probabilidade de um indivíduo poder receber transfusão de sangue de sangue $B-$?

8. Para cada gráfico de distância abaixo, construa o gráfico correspondente da velocidade.

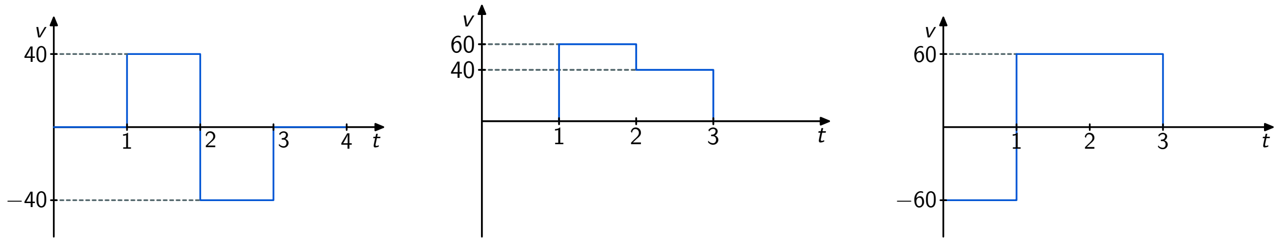


(a) (b) (c)

9. Escreva as fórmulas (por partes) de cada função graficada no exercício anterior.

10. Para a função f do gráfico (b) do exercício 8, quanto vale $f(12)$?

11. Para cada gráfico de velocidade abaixo, construa o gráfico correspondente da distância *líquida* percorrida, partindo de $f = 0$ em $t = 0$.



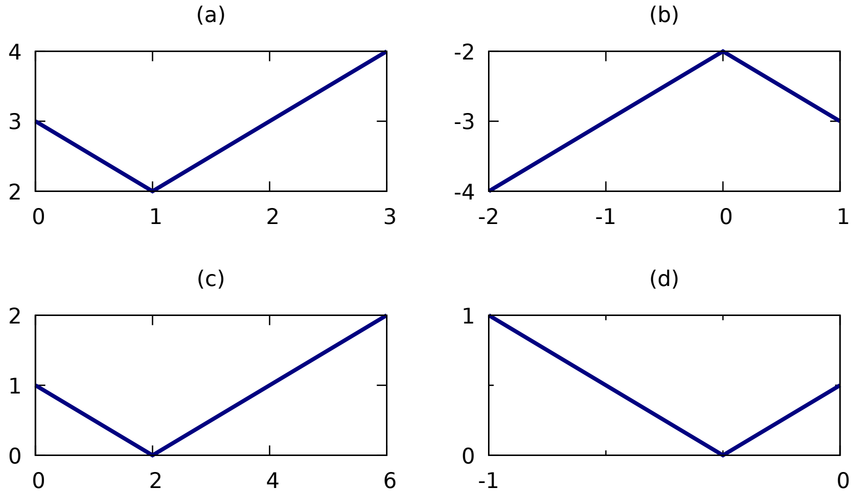
(a) (b) (c)

12. Para o movimento descrito pela velocidade do gráfico (a) do exercício anterior, em que posição o carro estará quando $t = 2.5$? Para o moviemento descrito pela velocidade do gráfico (b) do exercício anterior, em que posição o carro estará quando $t = 3$.

13. Se $f(t) = 6t + 2$, para $0 \le t \le 4$, esboce os gráfico de:

    (a) $f(t)$
    (b) $f(t) - 20$
    (c) $f(t-2)$
    (d) $\frac{1}{2}f(t)$
    (e) $f(-t/2) + 1$
    (f) $2 - f(t+1)$

14. Se $f : [0, 3] \to \mathbb{R}$ tem o gráfico exibido na figura (a) abaixo, encontre a expressão, em função de f para as três funções graficadas em (b), (c) e (d).



15. Suponha que $f(t) = 4t$ e $g(t) = 2t+1$. Encontre $g(3)$, $f(g(3))$ e $f(g(t))$. Como é a inclinação de $f(g(t))$ em relação às inclinações de f e g?

16. Se $f = f_0, f_1, f_2, \ldots$, encontre v_1, v_2, v_3, sabendo que $v_j = f_j - f_{j-1}$, para as funções abaixo:

    (a) $f = 1, 3, 5, 7, \ldots$
    (b) $f = 0, 1, 0, 1, \ldots$
    (c) $f = 0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \ldots$

17. Se $v = 1, 3, -3, 5$ e $f_0 = 2$, encontre f.

18. Se $v = 2, -1, 0, 6$ e $f_2 = 1$, encontre f.

19. Suponha que uma doença fúngica tenha surgido no meio de um pomar, em um única árvore, e que a área acometida cresça radialmente a uma taxa constante de 4 metros ao dia. Qual será a área comprometida após 2 dias, 4 dias e 8 dias? Escreva uma equação para expressar a área comprometida ao longo do tempo, medido em dias.

20. A quantidade de madeira em uma floresta jovem cresce exponencialmente, a uma taxa de 3.5% ao ano. Qual o crescimento esperado após 10 anos? Quantos anos serão necessários para que a quantidade de madeira duplique?

21. Para as funções abaixo, compute $[f(t+h) - f(t)]/h$. Depois verifique o que ocorre quando $h \to 0$.

    (a) $f(t) = 5t$
    (b) $f(t) = 5t + c$
    (c) $f(t) = \frac{1}{2}at^2$
    (d) $f(t) = at^2 + bt + c$
    (e) $f(t) = t^3$
    (f) $f(t) = (t+1)^2$

22. Encontre a velocidade média entre $(t - h)$ e $(t + h)$ para:

(a) $f(t) = t^2$ (b) $f(t) = t^3 - 2t$

23. Calcule a velocidade média em t, de $f(t) = \frac{1}{3}t^3$, de duas maneiras difentes: (1) computando a média entre t e $(t+h)$, e (2) computando a média entre $(t-h)$ e $(t+h)$. Se a velocidade média, para um valor de h pequeno fosse utilizada como aproximação para o valor da velocidade instantânea em t, qual das duas abordagens produziria a melhor aproximação?

    Para verificar sua resposta, faça um experimento numérico. Escolha um valor para t, digamos $t = 4$, e um valor para h. Lembre que a velocidade média será uma boa aproximação para a velocidade instantânea, apenas se a média for computada sobre um intervalo pequeno. Tome $h = 0.1$ ou $h = 0.01$, por exmeplo. Compute a velocidade instantânea e as velocidade médias pelas duas formas e veja qual das duas resultou em uma aproximação melhor.

24. Se $f(t) = t^n$, para um inteiro n, compute $[f(t+h) - f(t)]/h$. Depois verifique o que ocorre quando $h \to 0$. Dica: $(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + c_1a^{n-2}b^2 + \cdots + c_{n-2}ab^{n-1} + b^n$, com coeficientes $c_j \neq 0$.

25. Qual o gráfico de f, em $[0,2]$ para a velocidade $v(t) = |1-t|$, sabendo que $f(0) = 1$?

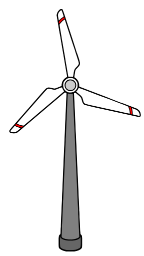
26. Se $f(0) = 0$, qual o gráfico de f, em $[0,3]$ para a velocidade

$$v(t) = \begin{cases} 2, & 0 < t < 1, \\ t+1, & 1 < t < 2, \\ 9-3t, & 2 < t < 3. \end{cases}$$

27. Se $f(1) = 1$, qual o gráfico de f, em $[0,2]$ para a velocidade

$$v(t) = \begin{cases} 2, & 0 < t < 1, \\ 4-2t, & 1 < t < 2. \end{cases}$$

28. Uma turbina de para geração eólica de energia (catavento) tem pás de 45m de comprimento, que podem dar de 9 a 18 voltas por minuto. Na situação em que as pás estejam completando 16 voltas por minuto, qual o módulo da velocidade registrada na ponta de uma pá, em km/h? Para o tempo t registrado em minutos, encontre a expressão para as coordenadas x e y da ponta da pá (as pás giram no sentido horário). Qual a velocidade vertical da ponta da pá, em função do tempo?



29. Considere um relógio de parede cujo ponteiro dos minutos mede 15cm e o ponteiro das horas mede 8cm. Qual o módulo da velocidade média nas extremidades desses ponteiros?

30. Encontre os números A e B para que a reta $y = x$ toque suavemente (tangencie) a curva $Y = A + Bx + x^2$ em $x = 1$, ou seja para que $y(1) = Y(1)$ e $y'(1) = Y'(1)$.

31. Escolha c tal que a reta $y = x$ seja tangente à parabola $y = x^2 + c$.

32. Suponha que $\frac{f(x)}{x} \to 7$, quando $x \to 0$. Conclua que $f(0) = 0$ e que $f'(0) = 7$. Exiba um exemplo para f que não seja $f(x) = 7x$.

33. Qual das razões abaixo se aproxima de 1 quando $x \to 0$?

    (a) $\dfrac{x}{\sin x}$ (b) $\dfrac{\sin^2 x}{x^2}$ (c) $\dfrac{\sin x}{\sin 2x}$ (d) $\dfrac{\sin(-x)}{x}$

34. Encontre os limites abaixo, quando $x \to 0$.

(a) $\dfrac{\sin 3x}{x}$ (b) $\dfrac{\sin 5x}{5x}$ (c) $\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ (d) $\dfrac{1-\cos^2 x}{x^2}$

35. Faça os exercícios de 1 a 26 e 34, página 77 do livro Strang (2010).

A expressão **se e somente se** em matemática é uma forma concisa de fazer *duas* afirmações. Utilizar esta expressão, significa que se a expressão à esquerda do *se e somente se* for verdadeira, então a expressão à direita também será verdadeira; e que se a expressão à direita do *se e somente se* for verdadeira, então a expressão à esquerda também será verdadeira. Ou seja, podemos "trocar" um *se e somente se* por duas frases, do tipo *se* ____ *então* ____.

Por exemplo, "Eu respiro se e somente se estou vivo". significa que:
"Se eu respiro então estou vivo", e "Se estou vivo então eu respiro".

Sendo assim, (P) se e somente se (Q) é equivalente a se (P) então (Q) **e** se (Q) então (P).
Simbolicamente, (P) se e somente se (Q) representa-se por (P) $\iff$ (Q). Já uma implicação simples do tipo se (P) então (Q), representa-se por (P) $\Rightarrow$ (Q).

36. Mostre, através de exemplos, que as afirmações abaixo são falsas:
    (a) Se $a_n \to L$ e $b_n \to L$, então $a_n/b_n \to 1$.
    (b) $a_n \to L$ se e somente se $a_n^2 \to L^2$.
    (c) Se $a_n < 0$ e $a_n \to L$, então $L < 0$.
    (d) Se infinitos a_n's estão dentro de cada faixa ao redor do zero, então $a_n \to 0$.

37. Faça os exercícios de 7 a 24, página 84 do livro Strang (2010).

38. Os oceanos recobrem $3.6 \cdot 10^8$ km^2, aproximadamente 71% da superfície da Terra. Se todo o gelo da Antártida, $26.5 \cdot 10^6$ km^3, derretesse, quanto aproximadamente seria a elevação do nível do mar? Se a Antártida perdesse gradualmente sua cobertura gelada, a uma taxa de 0.15% ao ano, quanto tempo levaria para que o nível médio dos oceanos subisse 3m? Com qual velocidade o nível do mar subiria?

39. Encontre a aproximação linear $Y(x)$ para $y(x) = x \sin x$, ao redor de $a = \pi$. Utilize esta aproximação para estimar $y(3)$. Com auxílio da calculadora, compute o erro da aproximação.

40. Em 1838, o fisiologista Jean Poiseuille descobriu a fórmula que relaciona o raio de uma artéria com o volume de sangue que flue pela artéria, sob pressão constante, em um pequeno intervalo de tempo: $Q = kr^4$, onde k é uma constante, Q é a tava volumétrica de fluxo e r é o raio da artéria. Esta é a conhecida "Lei de Poiseuille". Com esta equação é possível relacionar o quanto uma artéria deve ter seu raio expandido para conseguir um determinado aumento no fluxo sanguíneo.
    (a) Encontre a derivada de Q com respeito à r.
    (b) Construa a equação que relaciona o diferencial dQ com o diferencial dr, ou seja, $dQ = \frac{dQ}{dr}dr$.
    (c) Construa uma equação que relacione variações relativas, ou seja, que relacione $\frac{dQ}{Q}$ com $\frac{dr}{r}$.
    (d) Por fim, um aumento de 10% no raio de um vaso representará que aumento percentual no fluxo?

41. **Aproximando a solução de equações** Considere o problema de encontrar x^* tal que $f(x^*) = 0$. A menos que a expressão de f seja simples, este problema raramente pode ser resolvido exatamente. Vamos considerar a seguinte estratégia para aproximar a solução de $f(x^*) = 0$:
    (a) Seja $x = a$ uma aproximação para x^* (um palpite).
    (b) Construa a aproximação linear Y para f ao redor de a.
    (c) Resolva o problema $Y(x) = 0$ e verifique se a solução deste problema mais simples é uma aproximação melhor para a solução de $f(x) = 0$ (como?)

Partindo da aproximação inicial $a = 1.5$, aplique a estratégia descrita para estimar a solução de

$$x\cos x + \frac{1}{8}x^2 + 0.1 = 0.$$

Se a aproximação conseguida com esta estratégia ainda não for satisfatória, o que pode ser feito para melhorá-la?

42. Três medições da temperatura de uma amostra de material biológico em fermentação foram feitas em pontos diferentes da amostra, resultando em 32°, 33° e 30°. Qual valor de T minimizaria o erro quadrático, isto é, que valor T minimiza $(T-32)^2 + (T-33)^2 + (T-30)^2$? Se a última medida não foi tão confiável como as primeiras duas, podemos atribui-lhe um peso menor, refletindo nossa desconfiaça. Que valor T minimiza $(T-32)^2 + (T-33)^2 + \alpha(T-30)^2$, para $0 < \alpha < 1$ fixo? Se $\alpha = 0.85$, qual queria o T encontrado?

43. Encontre A e B tais que $\sqrt{1+x} \approx 1 + Ax + Bx^2$, para $x \approx 0$. Teste a qualidade da aproximação para $x = 10^{-2}$ e para $x = 10^{-4}$. Faça o gráfico de $\sqrt{1+x}$ e da aproximação obtida para inspecionar o quão boa a aproximação é.

44. Encontre A e B tais que $\cos x \approx 1 + Ax + Bx^2$, para $x \approx 0$. Teste a qualidade da aproximação para $x = 10^{-1}$ e para $x = 10^{-3}$. Faça o gráfico de $\cos x$ e da aproximação obtida para inspecionar o quão boa a aproximação é.

45. Nestor viajou de Campinas à Salvador para participar do Carnaval fora de época. O odômetro de sua Fiat 76 registrou um deslocamento de 2120km. A viagem inteira durou 56 horas, contando com suas paradas para descanso, alimentação e compras de souveniers. Enquanto Nestor dirigia, que velocidade certamente seu Fiat deve ter atingido em algum momento? Como Nestor tinha um "Sem-Parar" instalado em seu Fiat 76, ficou registrado que ele cruzou o pedágio de Itatiba (km 110) às 8:00 e o pedágio de Atibaia (km 80) às 8:20. Podemos afirmar que neste trecho o Fiat de Nestor, em algum momento, atingiu qual velocidade?

46. Compute a derivada das funções abaixo.

    (a) $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x+1}}$

    (b) $g(x) = [\sqrt{x^2+1} - 3x^2]^6$

    (c) $h(t) = \cos(\alpha t)\sin(\alpha^2 t^2)$

    (d) $m(t) = \sqrt[3]{3 - \sin(t^2)}$

    (e) $v(z) = \dfrac{3z\sin(2z)}{6z^2\cos(5z+1)}$

    (f) $d(y) = \tan\left(\dfrac{c\pi y}{\sqrt{y^2+1}}\right)$

47. Se $h(x) = \sin\left(e^{x+1}\right)$, compute $\dfrac{d^2h}{dx^2}$.

48. Se $f(3) = 3$, $g(3) = 5$, $f'(3) = 2$ e $g'(3) = 4$, compute as derivadas das funções abaixo, em $x = 3$, se possível.

    (a) $f(x)g(x)$

    (b) $f(g(x))$

    (c) $g(f(x))$

    (d) $f(f(x))$

49. Organismos semélparos possuem apenas um período reprodutivo durante a vida seguido de mortalidade, como com o salmão do Pacífico, o bambú, alguns insetos, entre outras espécies. A taxa de crescimento per capita, r, pode ser entendida com uma medida da aptidão reprodutiva. Quanto maior for r, maior será a prole produzida por um indivíduo. A taxa de crescimento intrínseca é tipicamente uma função da idade do indivíduo, x. Modelos para a taxa de crescimento em populações de organismos semélparos predizem que

$$r(x) = \frac{\ln(\ell(x)m(x))}{x},$$

onde $\ell(x)$ é a probabilidade de sobrevivência de um indivíduo com idade x, e $m(x)$ é o número de nascimento de fêmeas na idade x. A idade ótima para reprodução é a idade x que maximiza $r(x)$.

(a) Encontre a idade ótima de reprodução se $\ell(x) = e^{-ax}$ e $m(x) = bx^c$, onde a, b e c são constantes positivas.

(b) Esboce o gráfico de r quando $a = 0.1$, $b = 4$ e $c = 0.9$.

50. Um estudo ambiental de uma determinada comunidade indicou que o nível médio diário de monóxido de carbono no ar é modelado por

$$C(p) = \sqrt{0.5p^2 + 17}$$

partes por milhão, quando a população é p (em milhares de habitantes). Em t anos estima-se que população será

$$p(t) = 3.1 + 0.1t^2$$

milhares de habitantes. Qual será a taxa de variação do nível de monóxido de carbono no ar daqui a três anos?

51. A produtividade de uma cultura irrigada depende da temperatura média do ambiente, da seguinte forma

$$p(T) = 8 - \left[(T - 18)^2 + 5\right]^{1/3},$$

onde $p(T)$ é a produtividade da cultura, medida em toneladas por hectare, e T é a temperatura em graus Celsius. Sabe-se ainda que a temperatura média varia com a época ano, de acordo com a lei empírica dada por

$$T(m) = 22 + 3\cos\left((m-1)\frac{\pi}{6}\right),$$

onde m é o mês do ano ($0 \leq m < 1$, para janeiro, $1 \leq m < 2$ para fevereiro, etc). Determine a variação da produtividade em função da época do ano.

52. Nos peixes, denote por C a massa do cérebro, P a massa do peixe, ambos em gramas, e L seu comprimento em centímetros. Estas características foram relacionadas experimentalmente por $C = 0.007P^{2/3}$, e $P = 0.12L^{2.53}$. Se, em 10 milhões de anos, o comprimento médio de uma certa espécie de peixes evoluiu de 15 cm para 20 cm a uma taxa constante, quão rápido estava crescendo o cérebro dessa espécie quando o comprimento médio era 18 cm?

53. Encontre uma antiderivada das funções abaixo. Verifique suas respostas através do cálculo das derivadas.

(a) $a + bx$

(b) $\cos(3x) - \sin(3x)$

(c) $x\cos x + \sin x$

(d) $-\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$

(e) $x\sqrt{x}$

(f) $\dfrac{x}{\sqrt{5x^2+1}}$

(g) $3[p(x)]^2\, p'(x)$

(h) $2x\, f'(x^2)$

(i) $f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

Para esboçar o **gráfico de uma função** podemos seguir o roteiro:

1. Explicitar o domínio da função.
2. Determinar os intervalos de crescimento e decrescimento da função.
3. Estudar concavidade e pontos de inflexão.
4. Calcular limites laterais de f em p, onde p é extremo de intervalos que compõem o domínio de f ou é ponto de descontinuidade.
5. Identificar assíntotas.
6. Calcular os limites de f para $x \to \infty$ e $x \to -\infty$.
7. Determinar ou localizar os zeros da função.

54. Esboce cuidadosamente o gráfico das seguintes funções abaixo.

(a) $g(x) = x^3 - x^2 - x + 1$

(b) $x(u) = \dfrac{4u+5}{u^2-1}$

(c) $s(t) = \sqrt[3]{t^3 - t^2}$

(d) $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x^2+1}$

55. Reescreva os somatórios abaixo para que todos se iniciem em 0. Calcule algumas parcelas dos somatórios, para verificar seu resultado.

(a) $\displaystyle\sum_{j=3}^{7} (j^2 - 6j + 9)$

(b) $\displaystyle\sum_{j=-1}^{4} \left[\frac{(j+1)^2}{1+(1-j)^3}\right]$

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{101} \left[k^2 - k\right]$

(d) $\displaystyle\sum_{k=-n}^{n} k \cdot f(k)$

56. Reescreva os somatórios abaixo utilizando a transformação indicada. Calcule algumas parcelas dos somatórios, para verificar seu resultado.

(a) $\displaystyle\sum_{j=4}^{12} j(j+8),\ k = j+4$

(b) $\displaystyle\sum_{j=7}^{\infty} \frac{1}{(j+3)^2},\ k = j-6$

(c) $\displaystyle\sum_{j=-6}^{6} (j-3)(j+3),\ k = j+6$

57. Utilize substituição para obter uma integral mais simples e depois calcule-a.

(a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{3t}{(1+t^2)^4}\, dt$

(b) $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \sin x \cos^2 x\, dx$

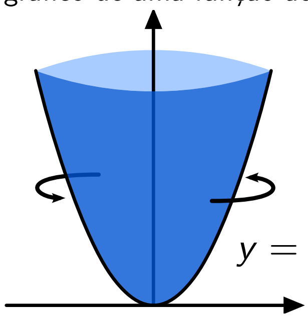
(c) $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2} \sin x(1-\cos^2 x)\, dx$

(d) $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\, dx$

(e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^3)^3}\, dx$

(f) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \sin x\sqrt{\cos x}\, dx$

58. Compute o volume do sólido de revolução gerado pela função $y = x^2$, para y de 0 a H. Sólido de revolução é o sólido obtido rotacionando-se o gráfico de uma função ao redor de um eixo (neste caso é o eixo y).



59. Para o mesmo sólido do exercício anterior, qual seria a área de sua superfície?
Dica: $A = \int_0^H 2\pi r(y)\sqrt{1+[r'(y)]^2}\, dy$, onde $r(y)$ é o raio da secção circular à altura y.

60. Uma colônia circular de bactérias tem raio 1cm. A distância r do centro da colônia, a densidade de bactérias, medida em milhões de células por centímetros quadrados, é dada por $b(r) = 1 - r^2$. Qual a quantidade total de bactérias na colônia?

61. A intensidade da ação de determinada droga no organismo é dada por $r(m) = 2m\sqrt{10 + 0.5m}$, onde m é a dosagem administrada da droga em miligramas. A *sensitividade* do paciente à droga é dada por $r'(m)$. Encontre $r'(50)$, ou seja, a sensitividade à dosagem de 50 mg.

62. Nossa intenção é estimar quanto seria $\lim_{h\to 0} \left(\frac{b^h-1}{h}\right)$.

(a) Para $b = 2$, utilizando sua calculadora, compute $\frac{b^h-1}{h}$ para valores pequenos de h, digamos 0.01, 0.001, 0.0001 e 0.00001.

(b) Repita o processo para $b = 3$.

(c) Estime para que valor de b, a fração $\frac{b^h-1}{h}$ deve tender a 1.

63. A quantidade madeira cresce exponecialmente a uma taxa constante de 3,5% ao ano (vide exercício 20). Encontre a expressão para $M(t)$ em termos da função exponencial, sabendo que no ano zero (início das observações) a quantidade de madeira era $M(0) = 110$ km^3.

64. **População americana** A variação da população dos Estados Unidos é acompanhada a cada década pelo senso americano. Na tabela a seguir estão os valores registrados durante o século XX e início do século XXI.

Ano	População
1910	92.228.496
1920	106.021.537
1930	122.775.046
1940	132.164.569
1950	150.697.361
1960	179.323.175
1970	203.392.031
1980	226.545.805
1990	248.709.873
2000	281.421.906
2010	308.745.538

(a) Em um gráfico, marque os pontos tabelados. É possível identificar um comportamento exponencial?

(b) Construa uma tabela auxiliar cuja primeira coluna seja $T = (t - 1950)/10$ e a segunda coluna de $P = \log_{10} p$, onde t é o ano e p a população medida. Isto serve apenas para trabalharmos com valores numéricos menores.

(c) Em um segundo gráfico, plote os pontos (T, P). Verifique se estes pontos condizem com um crescimento exponencial.

(d) Estime a reta que melhor ajusta os pontos (T, P). Este processo é conhecido como *regressão linear*. Para ajustar a reta $Y = a + b \cdot T$ a uma coleção de pontos, basta resolver o sistema linear:

$$\begin{cases} n \cdot a & + & (\sum T_j)b & = \sum P_j \\ (\sum T_j)a & + & (\sum T_j^2)b & = \sum T_j P_j \end{cases},$$

onde n é a quantidade de pontos medidos. Resolvido este sistema, obtem-se $Y(T) \approx P(T)$.

(e) Calcule $y(t) = 10^{a+b(t-1950)/10}$ e marque os pontos sobre o gráfico construído no primeiro em (a). Observe assim que $p(t) \approx y(t) = A \cdot B^t$. Quem é A e B?

65. **População brasileira** O IBGE acompanha a evolução da população brasileira. Os dados estão presentes na tabela abaixo.

Ano	População
1872	9.930.478
1890	14.333.915
1900	17.438.434
1920	30.635.605
1940	41.236.315
1950	51.944.397
1960	70.992.343
1970	94.508.583
1980	121.150.573
1991	146.917.459
2000	169.590.693
2010	190.755.799

(a) Para melhor analizar os dados construa uma tabela auxiliar relacionando a população em centenas de milhões de habitantes com a década em relação à década de 1950. Ou seja, se $p(t)$ é a população total medida no ano t, então $P(T)$ é a população (em centenas de milhões de habitantes) medida no ano $t = 1950 + 10T$.

(b) Faça o gráfico de $\log_{10}(P(T))$ em função de T. É razoável supor a população brasileira tem crescido exponencialmente?

(c) Estime a reta que melhor ajusta os pontos $(T, \log_{10}(P(T)))$.

(d) Encontre a expressão para $p(t) \approx 10^{\alpha+\beta t}$.

(e) Comparando com o exercício anterior, qual país, Brasil ou EUA, tem uma taxa de crescimento populacional maior?

66. **Dinâmica populacional** Os modelos contínuos para crescimento polacional partem da premissa que a *taxa de variação* da população é proporcional ao tamanho da população, ou seja,

$$\frac{dN}{dt} = f(N) \cdot N,$$

onde $N(t)$ é a população no tempo t, e $f(N)$ é *taxa de crescimento per capita* da população. Os modelos diferem entre si pelas hipóteses que assumem, o que, em última instância, se reflete na expressão para a função f.

Em 1798, Thomas Malthus propôs um modelo simples em que a taxa de variação da população fosse determinada apenas pela taxa de natalidade e taxa de mortalidade, ou seja

$$\frac{dN}{dt} = (b-d)N, \tag{1}$$

onde b é a taxa de nascimento e d é a taxa de mortalidade, ambas constantes e positivas.

(a) Se N_0 é a população inicial, qual função N deve satisfazer a equação (1)?

(b) O que acontece com a população de $b < d$? E se $b > d$?

(c) Quais devem ser as unidades de b e d para que a equação (1) faça sentido?

Em 1838, Pierre François Verhulst propôs um modelo mais sofisticado que o de Malthus, considerando que o crescimento populacional é auto limitado, isto é, considerando que há um limite imposto pelo ambiente para o tamanho da população. Em seu modelo a taxa de variação da população é dada por

$$\frac{dN}{dt} = r\left(1 - \frac{N}{K}\right)N, \tag{2}$$

onde r representa a taxa de crescimento e K a capacidade máxima do meio, ambas constantes e positivas.

(d) Qualitativamente, o que se pode afirmar se população inicial N_0 for menor que K? E se $N_0 > K$?

(e) Se em algum momento $N(t) = K$, o que aconteceria deste tempo em diante?

(f) Verifique que a solução de (2) é dada por

$$N(t) = \frac{N_0 K e^{rt}}{K + N_0(e^{rt} - 1)}.$$

67. **Modelo Presa-Predador** O sistema de equações de Lotka–Volterra modela a interação entre presas (N) e predadores (P). Nesse modelo assume-se que o crescimento da população de presas segue a lei de Malthus, na ausência de predadores, que o encontro de presas com predadores é prejudicial às presas e benéfico aos predadores (claro), e que a população de predadores decairia segundo a lei de Matlhus na ausência de presas. Dessa forma, obtem-se o sistema:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{dN}{dt} & = & N(a - bP), \\ \dfrac{dP}{dt} & = & P(cN - d). \end{array} \right. \tag{3}$$

Os termos com produto NP modelam o encontro de indivíduos das duas espécies.

(a) Para que valores de N e P, as populações permancem constantes?

(b) Se $u = (c/d)N$ e $v = (b/a)P$, verifique que o sistema de equações acima transforma-se em

$$u' = a(1-v)u, \qquad v' = d(u-1)v.$$

(c) Se for feita a mudança de variável $\tau = at$, então este último sistema converte-se em

$$\frac{du}{d\tau} = (1-v)u, \qquad \frac{dv}{d\tau} = \alpha(u-1)v,$$

onde $\alpha = d/a$.

68. No exercício anterior, foi considerado que o crescimento da população de presas, na ausência de predadores, seguia a lei de Malthus. Se ao invés disto for considerada a lei de Verhulst, obteríamos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dt} &= N\left[a\left(1-\frac{N}{K}\right) - bP\right], \\ \dfrac{dP}{dt} &= P(cN-d). \end{cases} \tag{4}$$

(a) Encontre os valores para os quais a população de presas e predadores fica estabilizada.

(b) Fazendo a mudança de variáveis $u = (c/d)N$, $v = (b/a)(1/\beta)P$, onde $\beta = (1 - \frac{d}{cK})$, e $\tau = at$, obtenha o sistema equivalente

$$\frac{du}{d\tau} = u[1-u+\beta(u-v)], \qquad \frac{dv}{d\tau} = \alpha v(u-1),$$

onde $\alpha = d/a$.

69. No combate a infecções é necessário manter uma quantidade adequada de antibiótico no corpo. Como a concentração do medicamento no organismo começa a decair logo após ser administrado, é necessário que o paciente tome várias doses. Se y é a quantidade de medicamento, a taxa com que y varia é dada por

$$\frac{dy}{dt} = -ky,$$

onde k é uma constante para cada medicamento, medida experimentalmente. Este modelo considera que o antibiótico entra em circulação imediatamente, por exemplo por ter sido injetado diretamente na corrente sanguínea.

(a) Se a dose administrada ao paciente é y_0, resolva a equação diferencial acima para encontrar a quantidade de medicamento que ainda estará em circulação após t horas.

(b) Após T horas, uma nova dose de medicamento é administrada. Nesse momento qual será a quantitade total de medicamento no organismo do paciente? Resolva novamente a equação diferencial acima, porém utilizando como condição inicial a quantidade de mendicamento no instante T.

(c) Verifique que

$$y(nT) = y_0\left(1 + e^{-kT} + e^{-2kT} + \cdots + e^{-nkT}\right),$$

para n inteiro.

(d) Verifique que quando $n \to \infty$ a quantidade de medicamento no organismo tende a $y_0/(1-e^{-kT})$.

Suponha que x_n represente o estado de uma determinada quantidade no n-ésimo instante de tempo. Por exemplo, x_n poderia representar a população de leões no Serengeti, depois de n anos, a partir de 1980, ou seja, x_0 é a população de leões em 1980, x_1 é a população de leões em 1981, e assim por diante.

Um **processo evolutivo discreto** é definido, geralmente, por uma fórmula recursiva, da forma

$$x_{n+1} = f(x_n).$$

Com isto, estamos modelando um processo em que o estado futuro, x_{n+1}, é determinado exclusivamente pelo estado atual, x_n. A regra que descrever como *evoluir* do estado atual para o futuro é representada pela função f.

Um **estado estacionário** é um valor x^* que satisfaz

$$x^* = f(x^*),$$

ou seja, é um estado a partir do qual não há mais alteração com o passar do tempo.

Um estado estacionário pode ser **estável** ou **instável**. Um estado estacionário estável é aquele que, quando sujeito a uma pequena perturbação, gradativamente retorna ao seu valor original, enquanto que um estado estacionário instável, quando perturbado afasta-se de seu valor original. Matematicamente, seja x^* um estado estacionário para o processo definido por f. Considere a sequência definida por

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \\ x_0 &= x^* + y, \end{aligned}$$

onde y é uma pequena perturbação. Se x^* é estável então,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x^*.$$

Podemos caracterizar a estabilidade de estados estacionários através da derivada de f. Valem os seguintes resultados:

Se $x^* = f(x^*)$ e $|f'(x^*)| < 1$, então x^* é um estado estacionário estável.

Se $x^* = f(x^*)$ e $|f'(x^*)| > 1$, então x^* é um estado estacionário instável.

Para saber mais, estude o capítulo 2 de Murray (2011).

70. Para os processos evolutivos discretos abaixo, encontre todos os estados estacionários.

    (a) $x_{n+1} = x_n/(1 + x_n)$ (b) $x_{n+1} = x_n e^{-ax_n}$ (c) $x_{n+1} = a/(b + c/x_n)$

71. Para os processos evolutivos discretos abaixo, encontre os estados estacionários e estude a estabilidade deles.

    (a) $x_{n+1} = x_n^2(x_n - 1)$ (b) $x_{n+1} = 1/(2 + x_n)$ (c) $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$

72. Considere o processo evolutivo definido por

    $$u_{n+1} = u_n \exp[r(1 - u_n)],$$

    onde $r > 0$ é um parâmetro constante.

    (a) Encontre os dois estados estacionários deste processo.
    (b) Mostre que um deles é *incondicionalmente* instável, ou seja, é um estado estacionário instável, independentemente de qual seja o parâmetro r.
    (c) Encontre qual condição deve ser imposta ao parâmetro r para que o segundo estado estacionário seja estável.

73. Um modelo frequente para população de peixes é dado pela equação de Ricker

$$p_{n+1} = \alpha p_n e^{-\beta p_n}.$$

Nesta equação α representa a taxa de crescimento máxima e β é a inibição do crescimento causada pela superpopulação.

   (a) Mostre que esta equação tem um estado estacionário $\bar{p} = (\ln \alpha)/\beta$.

   (b) Mostre que este estado estacionário é estável se $|1 - \ln \alpha| < 1$.

74. Verifique se equações abaixo são separáveis, e resolva as que forem.

   (a) $\frac{du}{dt} = t(u-1)$

   (b) $\frac{du}{dt} = \frac{u}{t}$

   (c) $\frac{du}{dt} = 1 + u^2$

   (d) $\frac{du}{dt} = u(t^2+1)$

   (e) $\frac{du}{dt} = e^{-u} t \sqrt{t^2+1}$

   (f) $\frac{du}{dt} = e^{u}(u^2+t^2)$

75. Resolva as seguintes integrais.

   (a) $\int x \ln x \, dx$

   (b) $\int x^2 \ln x \, dx$

   (c) $\int x \sin x \, dx$

   (d) $\int (2x+1) e^x \, dx$

   (e) $\int (\sin x)^2 \, dx$

   (f) $\int e^{2x} \cos x \, dx$

76. Seja X o intervalo de tempo que você deve esperar para receber uma ligação. A densidade de probabilidade associada à X, é $p(t) = e^{-t}$, onde t é o tempo de espera pela ligação. Se cada ligação dura 3 minutos, qual a probabilidade de que seu telefone esteja ocupado quando alguém tentar te ligar?

77. O tempo de espera até seu próximo acidente de carro tem densidade de probabilidade $p(t) = \frac{1}{2} e^{-t/2}$. Qual o tempo médio para que um acidente ocorra? Qual a chance de acontecer um aciendente nos próximos dois anos?

78. Uma empresa aérea costuma vender 374 passagens para seus voos com capacidade para 368 passageiros. Na média sabe-se que 2 passageiros a cada 100 costumam não aparecer na hora do embarque. Qual a chance um passageiro não conseguir embarcar por falta de assentos? Se para a empresa o risco aceitável de *overbooking* for de no máximo 8%, quantas passagens a mais elas aceitaria vender?

Referências

Batschelet, E. (1978). *Introdução à matemática para biocientistas*. Interciência, Rio de Janeiro.

Ledder, G. (2013). *Mathematics for the Life Sciences: Calculus, Modeling, Probability, and Dynamical Systems*. Springer Undergraduate Texts in Mathematics and Technology. Springer New York.

Murray, J. (2011). *Mathematical Biology: I. An Introduction*. Interdisciplinary Applied Mathematics. Springer New York.

Strang, G. (2010). *Calculus*. Wellesley Cambridge Press, segunda edição.

Respostas de alguns exercícios.
Use com cuidado!

1. (a) $(1.6, 2.1, -4.0, 2.0)$, (b) $(3.2, -4.1, -2.4, 7.8)$, (c) $((3-5a)/8, a, -1, 1)$, para $a \in \mathbb{R}$.

2. (a) $(-2, 1.5, 2)$, (b) o sistema não tem solução, (c) há infintas soluções da forma $(6+a, 1-a, a-5, a)$, para $a \in \mathbb{R}$, (d) há inifitas soluções da forma $(a+2b, 3-b, a, b)$, para $a, b \in \mathbb{R}$.

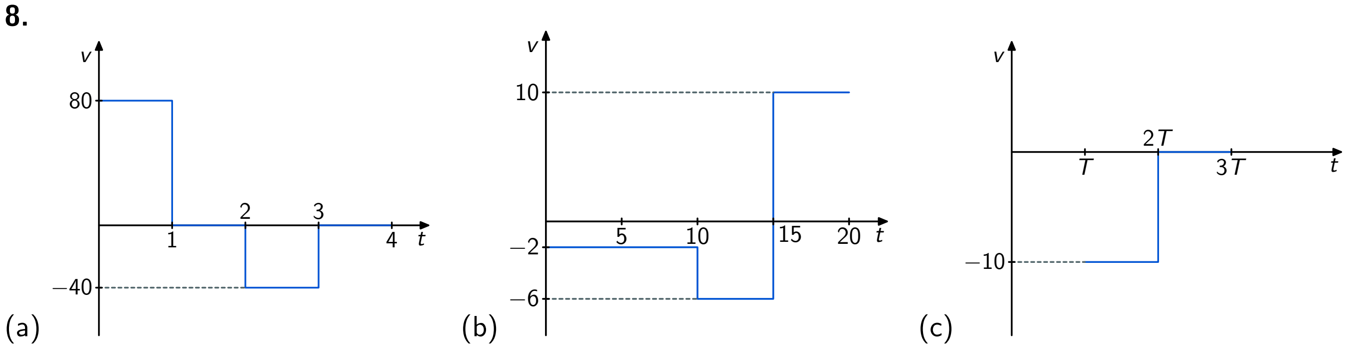
3. (a) $k \neq 2$ e $k \neq -3$, (b) $k = -3$ e (c) $k = 2$.

5. Respostas no final do livro Batschelet (1978).

6. (a) 10%; (b) 55%; (c) 45%; (d) 25%.

7. (a) $\Omega = \{A+, A-, B+, B-, AB+, AB-, O+, O-\}$; (b) 53%; (c) 5%; (d) 10.5%; (e) 1.5%; (f) 12.6%; (g) 60%.

8.

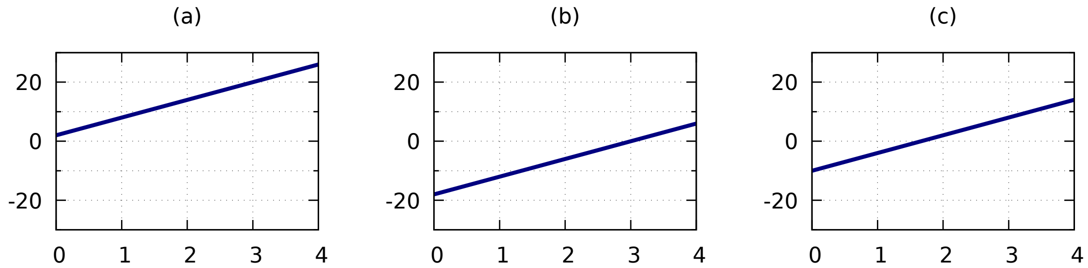


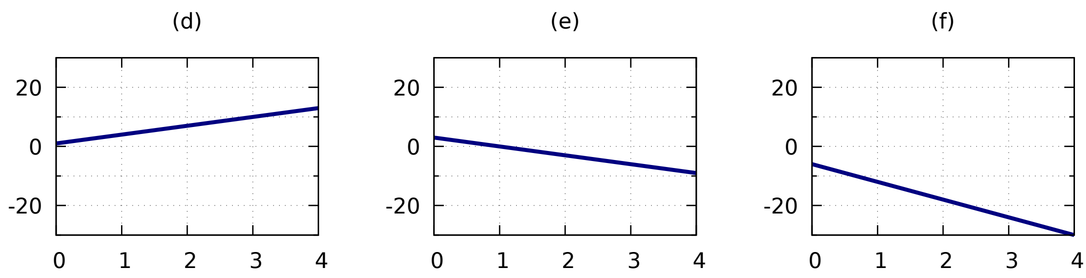
9. (a) $f(t) = \begin{cases} 80t, & 0 \leq t \leq 1 \\ 80, & 1 \leq t \leq 2 \\ 80 - 40(t-2), & 2 \leq t \leq 3 \\ 40, & 3 \leq t \leq 4 \end{cases}$, (b) $f(t) = \begin{cases} 50 - 2t, & 0 \leq t \leq 10 \\ 30 - 6(t-10), & 10 \leq t \leq 15 \\ 10(t-15), & 15 \leq t \leq 20 \end{cases}$

(c) $f(t) = \begin{cases} 20 - \frac{10}{T}(t-T), & T \leq t \leq 2T \\ 10, & 2T \leq t \leq 3T \end{cases}$

10. 18

13.





14. (a) $f(x)$, (b) $g : [-2, 1] \to \mathbb{R}$, com $g(x) = -f(1-x)$, (c) $h : [0, 6] \to \mathbb{R}$, com $h(x) = f(x/2) - 2$, e (d) $p : [-1, 0] \to \mathbb{R}$, com $p(x) = f(-3x)/2 - 1$.

15. $g(3) = 7$, $f(g(3)) = 28$, $f(g(t)) = 4(2t+1)$. $[f(g(t)]' = 8t$, $f'(t) = 4$ e $g'(t) = 2$.

16. (a) $v = 2, 2, 2, \ldots$, (b)$v = 1, -1, 1, \ldots$, (c) $v = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$

17. $f = 2, 3, 6, 3, 8$.

18. $f = 0, 2, 1, 1, 7$.

19. Após 2 dias: 201 m^2. Após 4 dias: 804 m^2. Após 8 dias: 3217 m^2. $A(t) = \pi(4t)^2$.

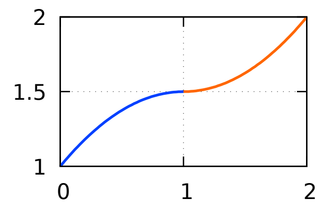
20. 41%. Aproximadamente 20 anos.

21. (a) 5 e 5; (b) 5 e 5; (c) $at + \frac{ah}{2}$ e at; (d) $2at + ah + b$ e $2at + b$; (e) $(3t^2 + 3th + h^2)$ e $3t^2$; (f) $(2t + 2 + h)$ e $2(t+1)$.

22. (a) $2t$; (b) $3t^2 + h^2$.

24. $nt^{n-1} + c_1 t^{n-2} h + \cdots + c_{n-2} t h^{n-2} + h^{n-1}$. Para $h \to 0$, obtemos nt^{n-1}.

25.



28. Velocidade na ponta: 271.43 km/h;

Posição horizontal em metros, dado t em minutos: $x(t) = -45\cos(2\pi(t/16)) = -45\cos(32\pi t)$;

Posição vertical em metros, dado t em minutos: $y(t) = -45\sin(2\pi(t/16)) = -45\sin(32\pi t)$;

Velocidade vertical em metros/min, dado t em minutos: $y'(t) = -45 \cdot 32\pi\cos(32\pi t) = -1440\pi\cos(32\pi t)$.

Velocidade vertical em km/h, dado t em minutos: $y'(t) = -86.4\pi\cos(32\pi t)$.

29. 30π cm/h; $\frac{16\pi}{12}$ cm/h.

30. $Y = 1 - x + x^2$.

31. 1/4.

32. Se $f(0) \neq 0$, $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}$ não existiria. $f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 7$.

33. (a), (b).

34. (a) 3, (b) 1, (c) 1/2.

35. Respostas disponíveis no site do livro Strang (2010).

36. (a) $a_n = 1/(2+n)$, $b_n = 2/(2+n)$; (b) $a_n = (-1)^n$; (c) $a_n = -1/n$; (d) $a_n = 1$ se n é múltiplo de 2 e $a_n = 0$ caso contrário.

37. Respostas disponíveis no site do livro Strang (2010).

38. Caso toda a Antártida derretesse, o mar deveria ter seu nível aumentando em aproximadamente 73.6 m. Perdendo 0.15% ao ano, em aproximadamente 28 anos o nível do mar subiria 3 m.

39. $Y(x) = -\pi(x - \pi)$, $y(3) \approx Y(3) = 0.4448$. Erro: $2.14 \cdot 10^{-2}$.

40. (a) $4kr^3$; (b)$dQ = 4kr^3\, dr$; (c) $\frac{dQ}{Q} = 4\frac{dr}{r}$; (d) 40%.

42. 31.6667 e $\frac{65+30\alpha}{2+\alpha}$.

43. $1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$.

44. $1 - \frac{1}{2}x^2$.

45. Pelo TVM: $f'(c) = (2120 - 0)/56 = 37.86$ km/h.

46. (a) $f'(x) = \frac{x+2}{(x+1)^{3/2}}$; (b) $g'(x) = 6\left(\sqrt{x^2+1} - 3x^2\right)^5 \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 6x\right)$;
(c) $h'(t) = -\alpha \sin(\alpha t)\sin(\alpha^2 t^2) + 2\alpha^2 t \cos(\alpha t)\cos(\alpha^2 t^2)$; (d) $m'(t) = -\frac{2}{3}\frac{t\cos(t^2)}{[3-\sin(t^2)]^{\frac{2}{3}}}$.

47. $h'' = e^{x+1}\cos(e^{x+1}) - e^{2(x+1)}\sin(e^{x+1})$.

48. (a) $[f(x)g(x)]'_{x=3} = f'(3)g(3) + f(3)g'(3) = 22$; (b) $[f(g(x))]'_{x=3} = f'(g(3))g'(3) = f'(4)\cdot 4$; (c) $[g(f(x))]'_{x=3} = g'(f(3))f'(3) = 8$; (d) $[f(f(x))]'_{x=3} = f'(f(3))f'(3) = f'(2)\cdot 2$.

49. (a) A idade ótima é a solução de $r'(x) = 0$. $r'(x) = \frac{1}{x}\left[\frac{\ell'(x)}{\ell(x)} + \frac{m'(x)}{m(x)}\right] - \frac{r(x)}{x}$.

50. $\frac{dC}{dt} = \frac{dC}{dp}\cdot\frac{dp}{dt}$. Como $\frac{dC}{dp} = \frac{1}{2}\frac{p}{\sqrt{0.5p^2+17}}$ e $\frac{dp}{dt} = 0.1\cdot 2t$, $\frac{dC}{dt}(t) = \frac{0.1t\cdot p(t)}{\sqrt{0.5p(t)^2+17}}$.
Portanto $\frac{dC}{dt}(3) = \frac{0.3\cdot p(3)}{\sqrt{0.5p(3)^2+17}} = 0.24$.

51. $\frac{dp}{dm} = \frac{dp}{dT}\frac{dT}{dm} = \frac{\pi}{3}\left[(T(m)-18)^2+5\right]^{-2/3}\cdot(T(m)-18)\sin\left((m-1)\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3}\frac{(T(m)-18)\sin\left((m-1)\frac{\pi}{6}\right)}{[(T(m)-18)^2+5]^{2/3}}$.

52. $\frac{dC}{dt} = \left.\frac{dC}{dP}\right|_{P=179.90}\left.\frac{dP}{dL}\right|_{L=18}\frac{dL}{dt} = (8.2667\cdot 10^{-4})(25.2853)5 = 0.10451$ gramas a cada 10 milhões de anos.

53. (a) $ax + bx^2$; (b) $\frac{1}{3}[\sin(3x) + \cos(3x)]$; (c) $x\sin(x)$; (d) $-2\sqrt{x+1}$; (e)$\frac{2}{5}x^{5/2}$; (f) $\frac{1}{5}\sqrt{5x^2+1}$; (g) $[p(x)]^3$; (h) $f(x^2)$; (i) $f(x)g(x)$.

54. (a) g está definida em toda a reta real. $g'(x) = 3x^2 - 2x - 1$. Logo, os zeros de g' são $x = -1/3$ e $x = 1$, ou seja $g'(x) = (x-1)(3x+1)$. Assim $g'(x) > 0$ para $x \in (-\infty, -1/3) \cup (1, \infty)$, ou seja, g é crescente nestes intervalos e descrente no intervalo $(-1/3, 1)$. Logo, $-1/3$ é ponto de máximo e 1 é ponto de mínimo. Além disto, $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \pm\infty$. Observe por fim que $g(-1/3) > 1$, $g(0) = 1$ e $g(1) = 0$.

55. (a) $\sum_{j=0}^{4} j^2$; (b) $\sum_{j=0}^{5}\left[\frac{j^2}{1+(2-j)^3}\right]$; (c) $\sum_{j=0}^{100}\left[j^2 + j\right]$; (d) $\sum_{j=0}^{2n}(j-n)f(j-n)$.

56. (a) $\sum_{k=8}^{16}\left[k^2 - 16\right]$; (b) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+9)^2}$; (c) $\sum_{k=0}^{12}(k-9)(k-3)$.

57. (a) $\frac{7}{16}$; (b) $\frac{7}{24}$; (c) $\frac{11}{24}$; (d) $\frac{1}{3}$; (e) $\frac{5}{4}$; (f) $\frac{1}{3}(2 - 2^{1/4})$.

58. $V = \pi H^2/2$.

59. $A = \pi H^2 + \pi H/2$.

60. $\pi/2 \approx 1.57$ milhões de células.

61. 16.06.

62. (a) 0.69556, 0.69339, 0.69317, 0.69315;
(b) 1.1047, 1.0992, 1.0987, 1.0986;
(c) Parece estar entre 2.71 e 2.72.

63. $M(t) = 110e^{0.0344t}$.

64. (d) $a = 8.186055$ e $b = 0.053069$; (e) $p(t) \approx 0.00688 \cdot 1.0123^t$.

65. (c) $\log_{10}(P(T)) \approx -0.252991 + 0.097209T$; (d) $p(t) \approx 10^{-11.209+0.0097209t}$;
(e) O Brasil tem um crescimento populacional mais acelerado.

70. (a) 0; (b) 0; e (c) $(a-c)/b$.

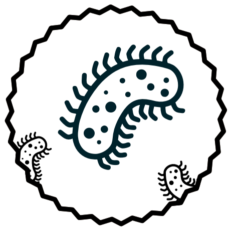
71. (a) 0 (estável) e $(1+\sqrt{5})/2$ (instável); (b) $-1+\sqrt{8}/2$ (estável); (c) $1 - 1/r$ (estável se $1 < r < 3$).

72. (a) $u_1^* = 0$ ou $u_2^* = 1$. (b) Se $f(u) = u\exp[r(1-u)]$, então $f'(u) = (1-ru)\exp[r(1-u)]$, logo $f'(0) = \exp(r) > 1$, visto que $r > 0$. (c) $f'(1) = (1-r)$, logo para que $u_2^* = 1$ seja estável, $|1-r| < 1$ ou $0 < r < 2$.

74. (a) $u = Ce^{0.5t^2} + 1$; (b) $u = Ct$; (c) $u = \tan(t+C)$; (d) $u = C\exp(t^3/3 + t)$; (e) $u = \ln\left[\frac{1}{3}(t^2+1)^{3/2} + C\right]$; (f) não é separável.

75. (a) $\frac{x^2}{4}(2\ln x - 1)$; (b) $\frac{x^3}{9}(3\ln x - 1)$; (c) $\sin x - x\cos x$;
(d) $(2x-1)e^x$; (e) $\frac{1}{2}(x - \sin x\cos x)$; (f) $\frac{e^{2x}}{5}(\sin x + 2\cos x)$.

76. 95%.



77. 2 anos; 63%.

78. 24.36%; 4 passagens.