Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Prof. Ricardo Biloti (biloti@unicamp.br)
https://www.ime.unicamp.br/~biloti

Exercícios de Cálculo Numérico

1 Introdução a Octave

Os exercícios desta seção foram pensados para completar um curso introdutório de Cálculo Numérico usando o ambiente de computação científica Octave. Como o Octave e o MATLAB™ são muito compatíveis, todos os exercícios prestam-se igualmente para o MATLAB.

1.1. Observe o seguinte experimento e explique-o.

```
>> 1/7
ans =  0.14286
>> p = 0.14286;
>> e = p - 1/7
e =    2.8571e-06
>> format long
>> 1/7
ans =  0.142857142857143
>> p = 0.142857142857143;
>> e = p - 1/7;
>>
```

Qual deve ser o valor da variável `e` ao final deste bloco execução? Teste isto no Octave e explique o que aconteceu.

1.2. Observe as seguintes linhas executadas no Octave.

```
>> A = [ 1 2; 3 4];
>> B = [ 1 1; 2 2];
>> C = (A + B) - (A .+ B);
>> D = (A * B) - (A .* B);
>> E = A.^B;
```

Qual o resultado esperado para as matrizes C, D e E? Tente descobrir por si mesmo, antes de executá-las no Octave.

1.3. Construa no Octave uma matriz quadrada de ordem 10, com 2 na diagonal principal e 3 na diagonal superior. Sua solução também funcionaria bem para matrizes de ordem bem maior, por exemplo, de ordem 10.000?

1.4. Construa no Octave a matriz quadrada A de ordem n, tal que $a_{ij} = i + j$. Construa cada uma das matrizes descritas abaixo.

(a) B é a matriz que contem apenas as linhas pares de A.

(b) C é a matriz que contem apenas as colunas ímpares de A.

(c) D é um menor principal de ordem k de A (*menor principal* é a submatriz quadrada formada apenas pelas primeiras k linhas e colunas de A, ou seja, a matriz quadrada de ordem k que fica no "canto superior" de A).

(d) E formada a partir de A retirando-se uma borda de largura k, ou seja, sem as primeiras e últimas k linhas e colunas.

1.5. Faça os gráficos das seguintes funções, nos intervalos prescritos.

(a) $f(x) = -3x^3 + 7x^2 - 5$, $0 \leq x \leq 2$;

(b) $g(x) = \cos(x)/\sqrt{x^2+1}$, $0 \leq x \leq 20$;

(c) $h(x) = e^{3x} - e^{-3x}$, $-1 \leq x \leq 1$.

Você deve precisar das funções: `cos`, `sqrt` e `exp`.

1.6. Da expansão de Taylor para função exponencial sabemos que

$$e^x = \lim_{n\to\infty} S_n(x), \quad \text{onde} \quad S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

(a) Compute $S_{10}(2)$. Qual o erro em aproximar e^2 por $S_{10}(2)$?

(b) Descubra para que valor n, $|e^2 - S_n(2)| < 10^{-6}$.

1.7. A função cosseno pode ser escrita como

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Escreva uma função Octave que compute $\cos x$ pela fórmula acima.

(a) Quantos termos são necessários para computar $\cos 1$, com a mesma acurácia da função `cos` do Octave?

(b) É possível fixar a ordem máxima que será empregada (a quantidade de termos na soma), garantindo que a acurácia seja a melhor possível?

(c) Tente computar $\cos(40)$ e veja o que acontece. Pense a respeito. Investigue o que aconteceu.

1.8. Escreva uma função que retorne o índice do primeiro termo igual a 1 na sequência de Collatz iniciada com um valor natural prescrito. Por exemplo, para a sequência de Collatz abaixo, o índice desejado é 8, pois o valor 1 apareceu na oitava posição da sequência (o primeiro índice é assumido como zero).

$$6, 3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1.$$

1.9. Seja $\{f_n\}$, a sequência de Fibonacci, definida por $f_0 = 1$, $f_1 = 1$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, para $n \geq 2$.

(a) Fixado um N, é possível computar os termos $f_1, f_2, \ldots, f_N$ da sequência de Fibonacci de forma vetorial?

(b) Construa uma função no Octave que retorne os termos da sequência de Fibonacci até um certo N fornecido.

(c) Usando sua função, exiba a sequência de razões entre termos consecutivos da sequência de Fibonacci, ou seja, $r_n = f_n/f_{n-1}$, para $n \geq 1$. Pesquise sobre a razão áurea.

Experimente melhorar seus gráficos com as funções: `title`, `xlabel`, `ylabel`, `legend` e `grid`.

2 Computação em precisão finita

O Octave/MATLAB tem uma função, `chop`, que pode ser utilizada para simular um sistema de ponto flutuante com N dígitos. Para isso, experimente

```
# N=3; x=pi, chop(x,N+1,10)
```

Para saber mais, `help chop`.

2.1. Estime a unidade de arredondamento de seu computador, calculadora científica e calculadora do celular. Para isso utilize o algoritmo abaixo.

```
▷ u ← 1
▷ enquanto (1+u) > 1, faça
    ▷ u ← u/2
▷ u ← 2u
```

Qual dos seus dispositivos tem a melhor precisão? Sobre o algoritmo acima, por que u foi inicializado em 1? Por que o valor de u é reduzido sempre por um fator 2? Por que u foi redefinido como $2u$, no último passo do algoritmo?

2.2. Em um sistema de ponto flutuante com base 10, 4 dígitos na matissa e 1 dígito para expoente, determine o resultado das operações abaixo e qual o erro relativo em cada uma delas, quando realizadas no sistema de ponto flutuante.

(a) $a = 4.226$, $b = 0.003811$, $c = a + b$.

(b) $x = 12.82$, $y = 0.4114$, $w = xy$.

(c) $u = \pi^2$.

(d) $p = 25.67$, $q = 0.03285$, $r = 0.03297$, $s = p - q - r$ e $u = p - (q + r)$.

2.3. Considere um sistema de ponto flutuante com base 10, 6 dígitos para mantissa e 2 para expoente.

(a) Qual o maior número positivo representável?

(b) Qual o menor número positivo representável?

(c) Qual a unidade de arredondamento para esse sistema de ponto flutuante?

(d) Suponha $x \in \mathbb{R}$ e x está entre o menor e o maior números de ponto flutuante positivos representáveis. Seja $\hat{x} = \mathrm{fl}(x)$, a representação de ponto flutuante de x. Quais os erros absoluto e relativo máximos que podem ocorrer quando x é representado como $\hat{x}$?

2.4. Avalie as expressões abaixo em um sistema de ponto flutuante com cinco dígitos significativos. Compute o erro relativo em cada operação executada e no resultado final. Identifique que operação contribui mais expressivamente para o erro final.

(a) $72126 + 24.821 - 72160$

(b) $\sqrt{1 + 1.4 \cdot 10^{-4}} - 1$

(c) $10000 + \sum_{n=1}^{25000} 0.4$

(d) $\left(\sum_{n=1}^{25000} 0.4\right) + 10000$

2.5. (Greenbaum e Chartier, 2012, p.123) Na Guerra do Golfo em 1991, o míssel de defesa Patriot falhou devido a erros de arredondamento. O problema foi gerado por um computador que calculava a trajetória do míssel usando um relógio interno que contava o tempo em múltiplos inteiros de décimos de segundo, que era armazenado de forma aproximada em binário com 24 bits (precisão simples), como

$$0.1_{10} \approx 0.00011001100110011001100_2.$$

(a) Converta o número binário acima para uma fração decimal. Chame-a de x.

(b) Qual o erro absoluto neste número, ou seja, qual a diferença entre x e $1/10$?

(c) Qual o erro em segundos, depois de 100 horas de operação, ou seja, quanto é $|360.000 - 3.600.000x|$?

(d) Qual da distância percorrida por um míssel voando a 3750 milhas por hora, durante o erro de tempo computado no ítem anterior?

(e) Se fosse utilizado precisão dupla (53 bits), teríamos que

$$0.1_{10} \approx 0.0001100110011001100110011001100110011001100110011001_2.$$

Neste caso, descubra qual teria sido o erro em segundos após 100 horas de operação e quanto isso representaria em distância para o míssel.

2.6. Compare os resultados obtidos para $f(500)$ e $g(500)$, em um sistema de ponto flutuante com cinco dígitos significativos, onde $f(x) = x\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right)$ e $g(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$ (*note que* $f(x) = g(x)$).

2.7. Reorganize as expressões abaixo para amenizar possíveis erros de cálculo. Escolha valores para x que evidenciem os erros.

(a) $\sqrt{x^2 + 1} - x$

(b) $\sqrt{1 + x^2} - 1$

(c) $\sqrt{(1 + \cos x)/2}$

(d) $(1 - \cos x)/\sin(x)$

2.8. Abaixo há três representações para o mesmo polinômio. Qual delas fornece resultado mais preciso, quando avaliadas em $x = 2.72$? E quando avaliadas em $x = 0.975$? Considere um sistema de ponto flutuante com quatro dígitos significativos.

$$p(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1, \qquad q(x) = [(x - 3)x + 3]x - 1, \qquad r(x) = (x - 1)^3.$$

2.9. Faça um programa em Octave para comparar a acurácia das duas fórmulas para o cálculo da área de um triângulo de lados $a \geq b \geq c$.

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \qquad s = (a+b+c)/2, \tag{1}$$

$$A = \frac{1}{4}\sqrt{(a+(b+c))(c-(a-b))(c+(a-b))(a+(b-c))}. \tag{2}$$

Teste triângulos com altura cada vez menores (veja o gráfico sobre a Fórmula de Heron, nas notas de aula).

3 Polinômio de Taylor e diferenciação numérica

3.1. Obtenha o polinômio de Taylor de grau n de f em torno de x_0 para cada caso abaixo.

(a) $f(x) = 1/(1-x)$, $x_0 = 0$

(b) $f(x) = \sin(x)$, $x_0 = 0$

(c) $f(x) = e^x$, $x_0 = 1$

(d) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$

3.2. Considere a função f definida por $f(x) = \exp(4x/5) + \exp(5-x)$.

(a) Apresente a expressão analítica do polinômio de Taylor de f de grau n em torno de x_0.

(b) Construa um programa que avalia o polinômio de Taylor de grau n em torno de x_0, para a função f.

(c) No intervalo $[0, 5]$, encontre empiricamente qual o primeiro polinômio de Taylor, em torno da origem ($x_0 = 0$), que satisfaz $|f(x) - p(x)| < 0.5$, para todos os pontos do intervalo.

(d) Repita o item anterior, mas agora considerando $x_0 = 2.5$.

3.3. Determine o grau do polinômio de Taylor ao redor de 0 que deve ser utilizado para aproximar $e^{0.1}$ de tal forma que o erro seja menor que 10^{-6}.

3.4. Mostre que

$$f''(x) \approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2},$$

onde h é um número positivo e pequeno em relação a x. Verifique que essa é uma aproximação de segunda ordem, ou seja, que o erro entre a aproximação e o valor real de $f''(x)$ é proporcional a h^2.

3.5. Usando os dados da tabela a seguir, estime $f'(0.6)$ e $f''(0.6)$.

x	0.20	0.40	0.60	0.80	1.00
$f(x)$	7.11	10.21	20.98	32.91	1.12

3.6. Deduza a fórmula

$$f'(x) \approx \frac{f(x+3h) - f(x-h)}{4h},$$

e estime o erro de aproximação ao usá-la.

3.7. Determine o valor ótimo de h que deve ser utilizado para aproximar a derivada de $f(x) = \ln(x)$ no intervalo $[24, 26]$, pela fórmula de diferenças centradas. Para tanto, proceda a análise do erro da fórmula de diferença centrada, juntamente com o erro de cálculo em precisão finita da função f.

Verifique sua descoberta numericamente. Para isso, avalie a diferença centrada, com $h = 10^{-1}, 10^{-2}, \dots, 10^{-14}$ e faça um gráfico exibindo o erro entre a aproximação computada por diferença centrada e o valor exato da derivada, por exemplo em $x = 25$. Como os erros são pequenos, para melhor observá-los, exiba-os em escala logarítmica (veja o comando `semilogy` do Matlab/Octave).

O valor ótimo de h que você descobriu acima também seria a melhor escolha se quiséssemos estimar a derivada em $x = 5000$? Experimente e pense a respeito.

4 Equações não-lineares

4.1. Prove que a equação $\cos\left(\frac{x+2}{x+6}\right) + \frac{x}{6} = 0$ tem pelo menos uma raiz. Encontre um intervalo de comprimento finito que contenha uma raiz desta equação.

4.2. Prove que cada equação abaixo tem solução, identifique um intervalo finito contendo pelo menos uma solução da equação e analise se é possível garantir a unicidade dessa solução no intervalo identificado.

(a) $4\cos(x) - e^{2x} = 0$

(b) $(x + 2)^2 = e^{-x^2+2}$

(c) $1 - x\ln(x) = 0$

(d) $\frac{x}{2} = \tan(x)$

4.3. Mostre que a função $h(t) = 2t^{-1/2} - e^{t/7}$ tem exatamente um zero e exiba um intervalo que o contenha.

4.4. Determine um intervalo fechado de comprimento máximo 0.1 contendo apenas um zero de $f(x) = (2 + x/8)^4 - 3(1.5 - x/17)^2$. Aplique o método da bissecção para encontrar esse zero.

4.5. Implemente uma função no Octave para realizar o método da bissecção. A função deve ter a seguinte chamada:

```
function x = bissec(f, a, b, tol)
```

onde `f` é a função para a qual se quer procurar um zero, `a` e `b` são os extremos do intervalo inicial, `tol` é a tolerância para o critério de parada ($|b - a| < tol$) e `x` é estimativa para a raiz. Teste sua implementação nas situações abaixo, usando `tol`$= 10^{-10}$.

(a) $f(x) = \cos x$, em $[0, 2]$;

(b) $f(x) = x$, em $[-1, 1]$;

(c) $f(x) = x^2$, em $[-1, 2]$;

(d) $f(x) = \int_{-1}^{x} e^{-u^2} - u^3\, du$, $[0, 2]$;

(e) $f(x) = x^3 - 2.5x^2 - 2.5x - 3.5$, $[-5.5, 10.5]$.

4.6. Enquanto que no método da bissecção a cada iteração o novo ponto a ser testado é sempre o ponto médio do intervalo, no método da posição falsa tenta-se fazer uma melhor escolha do próximo iterando, visando acelerar o método. Uma iteração do método da posição falsa seria assim:

(1) Seja $[a, b]$ o intervalo corrente onde a função troca de sinal.

(2) Seja r a reta que passa por $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

(3) Determine o x onde a reta r reta se anula.

(4) Avalie a função em x.

(5) Reduza o intervalo $[a, b]$ para o intervalo $[a, x]$ ou para o intervalo $[x, b]$, dependendo de qual dos dois apresentar a alternância de sinal para a função.

A Figura 1 ilustra uma iteração do método da posição falsa. Sobre o método da posição falsa, pede-se:

(a) Deduza a fórmula de iteração do método da posição falsa.

(b) Escreva um algoritmo para esse método.

(c) Utilizando o Octave, aplique este método para estimar o zero de $h(x) = [\ln(x + 1.2)]^{-1} - 0.025(x - 1)^{2.3}$.

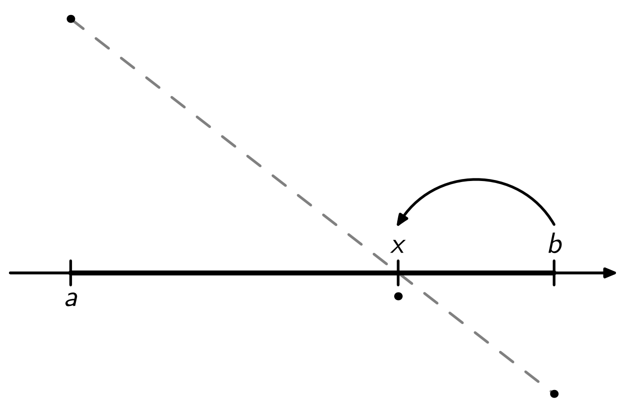


Figura 1: Exemplo para uma iteração do método da posição falsa. O valor x é determinado pela intersecção da reta que passa por $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ com o eixo horizontal. Como o valor da função em x é negativo, o extremo b é atualizado para x.

4.7. Sejam $\varepsilon = 10^{-12}$ e a função

$$h(x) = \frac{x+2}{x^2} - \frac{x^3}{60}.$$

Identifique um intervalo que contenha um zero de h. Partindo do intervalo encontrado, aproxime um zero de h usando:

(a) Método da bissecção, com critério de parada $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$.

(b) Método da bissecção, com critério de parada $|f(x_k)| < \varepsilon$.

(c) Método da posição falsa, com critério de parada $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$.

(d) Método da posição falsa, com critério de parada $|f(x_k)| < \varepsilon$.

Quantas iterações foram necessárias em cada caso. Compare o desempenho dos dois métodos. O comportamento observado corresponde ao que você esperava?

5 Método de Newton

5.1. Implemente em Octave o método de Newton para uma função real de uma variável. Sua função deve ter o seguinte protótipo:
`function [x, fx, n] = newton(f, g, x0, tol, N)`
onde `f` é uma função definida *inline* no Octave, `g` é uma função definida *inline* no Octave que computa a derivada da função `f`, `x0` é a aproximação inicial para um zero de `f`, `tol` é a tolerância para o critério de parada e `N` é o limite para a quantidade de passos. Sua implementação deve retornar a aproximação para a raiz, `x`, o valor da função em `x`, `fx`, e a quantidade de iterações necessárias, `n`.

Sua implementação deve ser capaz de reproduzir a seguinte saída no Octave.

```
>> f = @(x) x.^2 + x .* cos(2*x) - 3;
>> g = @(x) 2*x + cos(2*x) - 2*x.*sin(2*x);
>> [x,fx,n] = newton(f, g, 1, 1e-12, 20)
x = -1.3410
fx = 0
n =  7
>>
>> [x,fx,n] = newton(f, g, 2, 1e-12, 20)
x =  2.0465
fx =    1.7764e-15
n =  4
>>
```

5.2. Aplique o método de Newton para cada função abaixo, partindo do ponto inicial indicado. Observe o valor de $f(x)$ em cada iteração e tente entender o que está acontecendo. Depois disso, trace o gráfico de f e veja se coincide com o que você pensou.

(a) $f(x) = x^2 - x - 3$, $x_0 = 1.6$

(b) $f(x) = x^3 - 3x - 2$, $x_0 = 2.1$

(c) $f(x) = x^2 - x + 2$, $x_0 = -1.5$

5.3. Construa a iteração de Newton para estimar o zero da função $f(x) = x^3$. Partindo de $x_0 = 1$, observe como o erro reduz a cada iteração. A sequência aparenta estar convergindo quadraticamente? Por quê?

5.4. *Algoritmo para raiz cúbica.* Partindo de $f(x) = x^3 - A$, onde A é um número real qualquer, obtenha a fórmula

$$x_{k+1} = \frac{2x_k + A/x_k^2}{3}.$$

Utilizando esta fórmula, calcule $\sqrt[3]{10}$.

5.5. A convergência do Método de Newton só pode ser garantida numa vizinhança da solução. Grafique as funções abaixo e observe o comportamento das iterações produzidas pelo método de Newton a partir do ponto inicial x_0 dado. Para cada função, exiba outro ponto inicial, para o qual a iteração de Newton de fato converge para o zero da função.

(a) $f(x) = xe^{-x}$, $x_0 = 2$

(b) $g(x) = x^3 - x - 3$, $x_0 = 0$

(c) $h(x) = \arctan(x)$, $x_0 = 1.45$

5.6. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se x^* for um zero de f, defina $I(x^*)$ como o maior intervalo contendo x^* tal que para todo $x_0 \in I(x^*)$, a sequência gerada pelo método de Newton, partindo de x_0, converge para x^*. Considere $f(x) = x^2 \sin x + x \cos(2x) - 3$.

(a) Aplique o método de Newton para encontrar os primeiros dois zeros positivos de f, digamos x_1^* e x_2^*, e os primeiros dois zeros negativos de f, digamos x_{-1}^* e x_{-2}^*.

(b) Estime $I(x_{-1}^*)$ e $I(x_1^*)$.

5.7. Uma ótima referência sobre Método de Newton é o livro Kelley (2003). Este livro discute aspectos teóricos e computacionais.

(a) Após ler esta referência, tente reescrever uma rotina em Matlab/Octave que implemente o método de Newton. Teste-a com as funções dos exercícios dessa seção e da anterior.

(b) Baixe a rotina `newtsol.m`, distribuída juntamente com o livro Kelley (2003), disponível no endereço `http://www.siam.org/books/fa01/newtsol.m`. Utilize-a nos mesmos testes do item anterior.

(c) Estude como a rotina `newtsol.m` foi implementada. Tente identificar os pontos importantes da implementação.

6 Outros métodos para equações não-lineares

6.1. Verifique se cada função abaixo tem ponto fixo e se a iteração de ponto fixo convergirá. Para isto, faça a análise utilizando o gráfico da função. Compute as iterações de ponto fixo e observe seu comportamento.

(a) $f(x) = 1 + \exp(-x^3 + 1.3x - 1.2)$.

(b) $g(x) = 2\ln(x + 1) - 0.5$.

(c) $h(x) = x^2 - 3x + 3$.

6.2. Estime um zero da função $f(x) = 2x - \sqrt{\frac{x^2+3}{x^3+1}}$, usando para isto uma iteração de ponto fixo.

6.3. Estime um zero da função $f(x) = -x + 2\ln(x) + 3$, através do método da secante.

7 Revisão de Álgebra Linear

7.1. Seja A uma matriz quadrada. Pegue seu livro de Álgebra Linear e relembre conceitos básicos. Demonstre a equivalência entre as seguintes afirmações:

(a) Existe a matriz inversa A^{-1}.

(b) O sistema linear $Ax = b$ tem solução única.

(c) Não existe $x \neq 0$ tal que $Ax = 0$.

(d) O determinante de A é diferente de zero.

(e) As linhas/colunas de A são linearmente independentes.

7.2. Sejam A e B matrizes quadradas. Mostre que o produto AB é não-singular se e somente se A e B são não-singulares.

7.3. Suponha que A tenha inversa. Qual seria a inversa de A^T?

7.4. Prove ou forneça um contra-exemplo para a seguinte afirmação: Se A e B são matrizes quadradas e simétricas então AB é simétrica.

7.5. Sejam $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $a_j \in \mathbb{R}^m$ a j-ésima coluna de A e $x \in \mathbb{R}^n$. Mostre que $y = Ax = x_1a_1 + x_2a_2 + \cdots + x_na_n$, ou seja, y é combinação linear das colunas de A, com as componentes de x como sendo os coeficientes dessa combinação linear.

7.6. Seja $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Defina $\mathcal{R}(A) = \{y \in \mathbb{R}^m \mid y = Ax,\ x \in \mathbb{R}^n\}$. Mostre que $\mathcal{R}(A)$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$. $\mathcal{R}(A)$ é denominado o *espaço coluna de A*.

7.7. O produto interno canônico do $\mathbb{R}^n$ é $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots x_ny_n$. Mostre que $\langle x, y\rangle = x^Ty$.

7.8. Se $S \subset \mathbb{R}^m$ é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$, então $S^\perp = \{v \in \mathbb{R}^m \mid \langle v, u\rangle = 0, \forall u \in S\}$ é dito o *complemento ortogonal* de S. Para cada subespaço S a seguir, determine $S^\perp$.

(a) Se $S = \operatorname{span}\{(1, 1)^T\} \subset \mathbb{R}^2$.

(b) Se $S = \operatorname{span}\{(1, 1, 0)^T, (0, 1, 1)^T\} \subset \mathbb{R}^3$.

7.9. Um teorema importante de Álgebra Linear diz que $\mathbb{R}^m = S \oplus S^\perp$, ou seja, qualquer $x \in \mathbb{R}^m$ pode ser escrito unicamente como $x = u + v$ onde $u \in S$, $v \in S^\perp$. Em cada item a seguir, para o subespaço S e o vetor x, escreva x como $u + v$, com $u \in S$ e $v \in S^\perp$.

(a) $S = \operatorname{span}\{(1, 1)^T\} \subset \mathbb{R}^2$, $x = (1, 0)^T$.

(b) $S = \operatorname{span}\{(1, 1, 0)^T, (0, 1, 1)^T\} \subset \mathbb{R}^3$, $x = (1, 2, 3)^T$.

7.10. Mostre que $\mathcal{R}(A)^\perp = \{y \in \mathbb{R}^m \mid A^Ty = 0\} \equiv \mathcal{N}(A^T)$ (*núcleo de* A^T). Isto demonstra o importante *Teorema do núcleo e da imagem* que afirma que $\mathbb{R}^m = \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{N}(A^T)$.

8 Eliminação de Gauss

8.1. Demonstre as identidades abaixo.

$$\sum_{k=1}^{n} 1 = n, \qquad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1), \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3}n(n+1/2)(n+1).$$

8.2. Mostre que as aproximações abaixo coincidem na ordem mais alta.

$$\sum_{k=1}^{n} 1 \approx \int_0^n 1\, dk, \qquad \sum_{k=1}^{n} k \approx \int_0^n k\, dk, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 \approx \int_0^n k^2\, dk.$$

O custo computacional de um algoritmo é estimado pelo número de operações de ponto flutuante que o algoritmo realiza. Como só há interesse em avaliar o custo computacional quando a dimensão do problema for grande, o termo realmente importante é o de maior ordem apenas. Assim, é conveniente aproximar a soma do número de operações de ponto flutuante por uma integral.

8.3. Conte o número de operações realizadas para computar o produto de uma matriz quadrada por um vetor.

8.4. C é uma matriz de ordem n, tal que $c_{ij} = 0$ para $j > i$ ou para $j < i - m$, para algum $0 \leq m < n$, fixo.

(a) Se $n = 100$ e $m = 4$, quantos elementos de C são nulos com certeza e quantos podem ser não-nulos?

(b) Suponha $n > 0$, fixo. Para $0 \leq m < n$, seja $p(m)$ a porcentagem dos elementos de C que podem ser não-nulos. Faça o gráfico de p em função de m.

(c) Proponha uma estrutura para armazenar na memória, de forma econômica, a matriz C.

(d) Escreva um algoritmo para computar o produto Cx, aproveitando a estrutura da matriz para economizar operações. Qual o custo computacional desse algoritmo (número de operações de soma/produto realizadas)?

(e) Escreva um algoritmo para encontrar a solução do sistema linear $Cx = b$, aproveitando a estrutura da matriz para economizar operações. Qual o custo computacional desse algoritmo (número de operações de soma/produto realizadas)?

8.5. Escreva um algoritmo para encontrar a solução de um sistema triangular superior (ou inferior). Conte o número de operações, em função da dimensão n da matriz.

8.6. Utilizando o algoritmo de Eliminação de Gauss, encontre a solução dos sistemas lineares

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & 1 & 1 \\ 6 & 5 & 2 & 2 \\ -4 & -3 & 6 & 5 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 5 \\ -9 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & 1 & 1 \\ 6 & 5 & 2 & 2 \\ -4 & -3 & 6 & 5 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \\ -15 \end{bmatrix}.$$

9 Decomposição LU

9.1. Se $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}$ e $U = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ são os fatores da decomposição LU de uma matriz A, resolva o sistema linear $Ax = b$, para $b = (18, 20, 17.5)^T$.

9.2. Compute os fatores L e U da decomposição LU das matrizes do exercício 8.6. Utilize-os para resolver os sistemas propostos naquele exercício.

9.3. Escreva um algoritmo para computar os fatores L e U da decomposição LU de uma matriz quadrada. Estime o número de operações de seu algoritmo.

9.4. Verifique que $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ é não-singular. Mostre que A não tem decomposição LU.

9.5. Suponha que A tem decomposição LU. Discuta como utilizar os fatores L e U para calcular (a) o determinante de A, e (b) a matriz inversa, A^{-1}.

9.6. Considerando o seu computador, qual a ordem da maior matriz quadrada capaz de ser armazenada em memória? Para simplificar, suponha que 100% da memória do seu computador está disponível para isso. Quantas operações de ponto flutuante seriam necessárias para computar a decomposição LU dessa matriz? Quantas operações de ponto flutuante o seu computador é capaz de realizar por segundo?

10 Pivoteamento

10.1. Nesse exercício, trabalhe com apenas 4 dígitos significativos.

(a) Escalone o sistema linear abaixo (método de eliminação de Gauss) e resolva-o.

$$\begin{cases} 10^{-8}x & + & 10^{-4}y & = & 10^{-4} \\ 20x & + & y & = & 21 \end{cases}$$

(b) Escalone o sistema linear abaixo (método de eliminação de Gauss) e resolva-o.

$$\begin{cases} 20x & + & y & = & 21 \\ 10^{-8}x & + & 10^{-4}y & = & 10^{-4} \end{cases}$$

(c) Observe que os dois sistemas lineares anteriores diferem apenas pela ordem das equações e que a solução exata é $x \approx 1$ e $y \approx 1$. As soluções obtidas no ítem (a) e (b) foram as mesmas? Explique o que aconteceu.

10.2. Resolva o sistema linear abaixo com e sem pivoteamento, utilizando um sistema de ponto flutuante com quatro dígitos significativos. Note que $x = y = 1$ é a solução exata.

$$\begin{cases} 1.133x & + & 5.281y & = & 6.414 \\ 24.14x & - & 1.210y & = & 22.93 \end{cases}$$

Compare as soluções numérica obtidas.

10.3. Compute a decomposição LU com pivoteamento para as matrizes dos exercícios 8.6 e 9.4.

10.4. Resolva o sistema linear abaixo, computando para isso a decomposição LU com pivoteamento.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 6 & -2 & 0 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} -7 \\ -2 \\ -8 \end{bmatrix}.$$

10.5. Se $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/5 & 1 & 0 & 0 \\ -2/5 & 3/4 & 1 & 0 \\ 4/5 & 2/4 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}$, $U = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ e $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ são os fatores da decomposição LU com pivoteamento de uma matriz A, resolva o sistema linear $Ax = b$, para $b = (-5, 5, -7, -4.5)^T$.

11 Método de Jacobi

11.1. Escreva um algoritmo para o método de Jacobi e conte o número de operações realizadas em cada iteração do método. Implemente seu algoritmo em Octave.

11.2. Para cada sistema linear abaixo, explique se é possível (e como) aplicar o método Jacobi para aproximar a solução do sistema de maneira a ter garantia de convergência.

(a) $\begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 6 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 2 & 5 & -2 \\ 6 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 6 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 6 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 6 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 6 & -3 & 2 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 2 & -8 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$

11.3. Para cada sistema linear do exercício anterior:

(a) Escreva como ficam as equações que definem uma iteração do método de Jacobi.

(b) Reescreva essas equações na forma matricial, ou seja, reescreva a iteração de Jacobi como $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c$.

(c) Verifique se a matriz original é diagonalmente dominante.

(d) Calcule $\|B\|_\infty$ e $\|B\|_1$.

(e) Que conclusão pode ser tirada sobre a aplicação do método de Jacobi.

11.4. Considere o sistema linear $\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 4 \end{bmatrix}$.

(a) É possível garantir a convergência do método de Jacobi para esse sistema?

(b) Aplique o método de Jacobi, a partir de $x^{(0)} = (1, 1, 1)^T$. Calcule o resíduo na norma infinito em cada iteração, ou seja $\|Ax - b\|_\infty$. O que você observou? Qual poderia ser uma explicação plausível para o comportamento observado?

11.5. Esboce graficamente no plano o comportamento do método de Jacobi para sistemas lineares com duas equações e duas incógnitas nas seguintes situações:

(a) o sistema linear tem solução única e o método converge rapidamente;

(b) o sistema linear tem solução única e o método diverge lentamente;

(c) o sistema linear não tem solução;

(d) o sistema linear tem infinitas soluções.

11.6. Considere o sistema linear $Ax = b$, com A uma matriz quadrada de ordem $n = 300$. Suponha que, para um propósito específico, seja suficiente encontrar $\hat{x}$ tal que $\|\hat{x} - x^*\| < 10^{-4}$, onde x^* é a solução exata do sistema linear.

(a) Qual o custo computacional de uma iteração do método de Jacobi? (Veja exercício 11.1).

(b) Sabendo que para a resolução do sistema linear por Eliminação de Gauss é necessário realizar da ordem de $\frac{2}{3}n^3$ operações, até quantas iterações do método de Jacobi poderiam ser realizadas para estimar $\hat{x}$, sem ultrapassar o custo completo da Eliminação de Gauss?

(c) Sabendo que no método de Jacobi

$$\|x^{(k)} - x^*\| \le \alpha^k \|x^{(0)} - x^*\|,$$

onde α é uma constante positiva relacionada à matriz A, e que o erro na aproximação inicial da solução do sistema linear era da ordem de 10^2, para que valores de α poderemos garantir que o método de Jacobi vai produzir uma aproximação $x^{(k)}$ dentro da tolerância desejada e ainda assim ser mais barato que a Eliminação de Gauss?

11.7. Seja A uma matriz de $n \times n$, tal que

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{se } |i-j| = 1, \\ 1, & \text{se } (i,j) = (1,n) \text{ ou } (i,j) = (n,1), \\ -4, & \text{se } i = j, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Verifique que é possível aplicar o método de Jacobi para um sistema linear com essa matriz de coeficientes. Para $b = (-2, -2, \dots, -2)^T$, encontre a expressão geral para os iterando produzidos pelo método de Jacobi para o sistema linear $Ax = b$, partindo de $x^{(0)} = b$. Qual a solução desse sistema? Qual o real custo de cada iteração do método de Jacobi neste caso?

12 Gauss–Seidel

12.1. Escreva um algoritmo para o método de Gauss–Seidel. Compare o custo computacional deste algoritmo com o custo do algoritmo para o método de Jacobi (exercício 11.1).

12.2. Refaça o exercício 11.5 considerando o método de Gauss–Seidel.

12.3. Considere os sistemas lineares

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 & -4 \\ 6 & 18 & -3 \\ -4 & -3 & 21 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 35 \\ 60 \\ -75 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 9 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Para cada sistema linear, responda:

(a) É possível garantir a convergência do método de Jacobi para esse sistema?

(b) Realize três iterações do método de Jacobi, a partir de $x^{(0)} = (1, 0, 0)^T$. Calcule o resíduo em cada iteração.

(c) Realize três iterações do método de Gauss–Seidel, a partir de $x^{(0)} = (1, 0, 0)^T$. Calcule o resíduo em cada iteração.

(d) O que você observou? Qual poderia ser uma explicação plausível para o comportamento observado?

12.4. Seja $A = L + D + U$, onde L e U são as porções estritamente triangular inferior e superior, respectivamente, de A e D é a matriz diagonal coincidente com a diagonal de A. Considere o *spliting* construído da seguinte forma. Se $Ax = b$, então para um parâmetro ω fixo, $\omega Ax = \omega b$, e portanto $Dx + \omega Ax = Dx + \omega b$. Subsituindo A por $(L + D + U)$, mostre que

$$(D + \omega L)x = [(1 - \omega)D - \omega U]x + \omega b.$$

Com isto, obtenha um método iterativo cuja matriz de iteração é dada por

$$B = (D + \omega L)^{-1}[(1 - \omega)D - \omega U].$$

Esse método é denominado método de Sobrerrelaxações Sucessivas (SOR). Mostre que para $\omega = 1$, o método SOR torna-se o método de Gauss–Seidel.

Para determinados problemas, a escolha de ω, tal que $1 < \omega < 2$, acelera bastante a convergência.

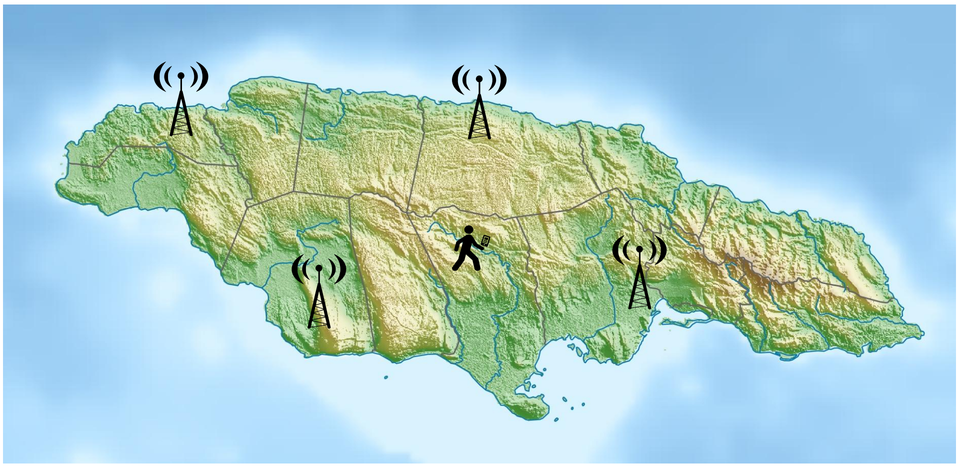
13 Sistemas não-lineares

13.1. Represente graficamente os sistemas não lineares abaixo e utilize o método de Newton para estimar uma solução aproximada, com precisão de 10^{-4}, partindo do ponto indicado.

(a) $x_1^2 + x_2^2 = 2, \quad e^{x_1-1} + x_2^3 = 2.$ $x^{(0)} = (1.5, 2.0)^T$.

(b) $10(x_2 - x_1^2) = 0, \quad 1 - x_1 = 0.$ $x^{(0)} = (-1.2, 1)^T$.

13.2. Um aventureiro está no meio da floresta, em posição incerta, munido apenas de receptor capaz de captar o sinal de antenas de rádio.



O sinal emitido informa as coordenadas da antena e a hora da emissão. Na região de alcance do receptor há quatro antenas. Os dados coletados pelo receptor estão na tabela abaixo.

	Antena 1	Antena 2	Antena 3	Antena 4
x (km)	47.00	90.00	140.00	190.00
y (km)	102.00	43.00	101.00	47.00
Δt (μs)	465.15	301.04	236.67	297.21

Na tabela, (x, y) é a coordenada de cada antena, em quilômetros, e Δt é o tempo que o sinal levou para se propagar da antena até o receptor, medido em microssegundos (o sinal propaga-se à velocidade da luz $c = 300.000$ km/s). Estes intervalos de tempo Δt foram computados pela diferença da hora enviada no sinal das antenas e a hora do relógio interno do receptor. É seguro assumir que os relógios das antenas estão todos sincronizados e corretos. Entretanto, não há como garantir que o relógio do receptor esteja correto. O objetivo do aventureiro (que havia acabado de ser aprovado em MS211) é determinar sua posição (X, Y) corretamente.

(a) Supondo que o relógio do receptor esteja correto, formule um sistema não-linear, cuja solução seja a posição do aventureiro. Represente graficamente as equações do sistema não-linear que você construiu. Quantas antenas são necessárias para determinar a posição? Dentre as quatro antenas, como escolher quais delas utilizar? O resultado é alterado se é alterada a escolha das antenas em uso? Qual seria um procedimento razoável para determinar a posição do aventureiro nessas condições?

(b) Se o relógio do receptor estiver incorreto, ainda é possível determinar corretamente a posição do aventureiro? (Dica: considere que $\Delta t = \Delta t' + \epsilon$, onde $\Delta t'$ é o intervalo de tempo correto e ϵ é o erro do relógio do receptor, a ser determinado.) Represente graficamente as equações do sistema não-linear que você construiu.

(c) Tente descobrir a posição do aventureiro da melhor maneira possível. Represente graficamente a solução.

14 Aula de exercícios

14.1. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Usando estratégia de pivoteamento parcial, obtenha os fatores L e U de A e a matriz e de permutação P.

(b) Usando (a), resolva o sistema linear $Ax = b$, para $b = [0, -2, 4]^T$.

14.2. Avalie se é possível aplicar o método de Jacobi para estimar a solução do sistema linear abaixo e, se possível, itere o método até que $\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_\infty < 10^{-8}$.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 0 \\ -4 & 2 & 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

14.3. Considere o problema de encontrar x tal que $f(x) = 0$.

(a) Mostre que para $f(x) = x^3 - 1.1x^2 - 0.0375x + 0.225$ este problema tem solução e encontre um intervalo que contenha pelo menos uma raiz da equação. Utilize o método de Newton para encontrar uma aproximação $\hat{x}$ para essa raiz, tal que $|f(\hat{x})| < 10^{-8}$.

(b) Para $f(x) = -x + 2\ln(x) + 3$, confirme a existência de uma única raiz em $[0.2, 1.2]$. Utilizando o método de Newton encontre uma aproximação $\hat{x}$ para essa raiz tal que $|f(\hat{x})| < 10^{-8}$.

15 Problema de ajuste

15.1. Considere os dados tabelados abaixo.

t_i	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
y_1	1.1	1.2	1.3	1.3	1.4

(a) Faça um gráfico (manualmente), marcando os pontos da tabela. Usando uma régua esboce a reta que, em sua opinião, melhor aproximaria esses pontos.

(b) Construa um sistema sobredeterminado, obtido pela imposição de que os dados tabelados sejam interpolados por uma reta.

(c) Utilizando o Octave, "resolva" o sistema linear $Ax = b$ do item anterior, utilizando o operador "\" ($x = A\backslash b$). Esse operador é utilizado para resolver sistemas lineares, e produz automaticamente a solução de quadrados mínimos no caso de sistemas sobredeterminados.

(d) Sobre o gráfico construído no item (a), desenhe também a reta computada no item anterior.

16 Quadrados mínimos

16.1. Considere a tabela de pontos abaixo.

x	1.00	2.00	3.00	4.00	5.00	6.00	7.00	8.00	9.00
y	0.06	−0.45	−0.98	−1.48	−1.89	−2.16	−2.27	−2.22	−2.05

Ajuste à esses pontos um polinômio de grau no máximo 3, no sentido de quadrados mínimos. Qual o resíduo quadrático desse ajuste?

16.2. Exiba graficamente os pontos amostrados e a eles ajuste a curva $\phi(x) = c_1 e^{-x} + c_2 + c_3 e^{x}$. Qual o resíduo?

x	−2.00	−1.00	0.00	1.00	2.00	3.00
y	9.10	3.51	1.13	1.78	4.83	14.00

16.3. Exiba graficamente os pontos amostrados e experimente diversas curvas para ajustá-los. Calcule o resíduo para cada curva proposta.

x	−4.044	−3.044	−2.044	−1.044	−0.044	0.955	1.955	2.955	3.955	4.955
y	54.969	31.561	15.420	4.980	−0.926	−3.391	−3.757	−4.040	−7.596	−20.233

16.4. Baixe o conjunto de dados qm1.dat. Carregue este arquivo no Octave e veja seu conteúdo, executando no Octave os comandos:

```
>> load qm1.dat
>> whos
Variables visible from the current scope:

variables in scope: top scope

  Attr   Name        Size                     Bytes  Class
  ====   ====        ====                     =====  =====
```

```
     xa        25x1                      200  double
     xb        75x1                      600  double
     xc        40x1                      320  double
     xd        50x1                      400  double
     ya        25x1                      200  double
     yb        75x1                      600  double
     yc        40x1                      320  double
     yd        50x1                      400  double

Total is 380 elements using 3040 bytes
>>
```

Temos quatro conjuntos de dados, `xa` e `ya`, `xb` e `yb`, `xc` e `yc`, e, por fim, `xd` e `yd`. Para cada um desses conjuntos, siga o roteiro:

(a) Exiba os pontos do conjunto de dados em um gráfio.

(b) Proponha funções $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ (você escolhe quantas) que pareçam boas escolhas para definir o espaço de aproximação. Você pode (e deve) testar diferentes combinações.

(c) Determine a curva de melhor ajuste no sentido de quadrados mínimos, para a escolha de funções de base que você propôs.

(d) Exiba um gráfico com os pontos amostrados e a função de melhor ajuste computada. Compute o resíduo.

Você conseguiu escolhas razoáveis para as funções $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$, em cada caso? Trabalhando com colegas, ompare suas escolhas com as de outros colegas. Se limitarmos o número de funções de base a $n = 5$, quais foram os melhores ajuste?

16.5. Geralmente, nas conta de luz ou água é possível consultar o consumo nos últimos 12 meses. Procure uma dessas contas e aos dados de consumo proponha e ajuste uma curva.

16.6. Suponha que, no problema de ajuste de curvas por quadrados mínimos, a função a ser ajustada é da forma

$$\phi(t) = c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) + \cdots + c_n\phi_n(t),$$

e os dados para o ajuste são as m amostras $\{(t_1, y_1), \ldots, (t_m, y_m)\}$.

(a) Construa explicitamente a matriz do sistema normal $A = \Phi^T\Phi$, ou seja, exiba uma fórmula fechada para a_{ij}.
Se for conveniente, utilize a notação $\langle f, g\rangle = \sum_{k=1}^{m} f(t_k)g(t_k)$.

(b) No caso particular em que $\phi_j(t) = t^{j-1}$, como fica a matriz A?

16.7. A tabela a seguir mostra o tempo médio (t), em segundos, gasto no cálculo da decomposição LU de matrizes aleatórias, computadas pelo MATLAB, em função da ordem da matriz (n).

n	t (s)	n	t (s)	n	t (s)
100	0.0003	1000	0.0425	6000	2.5825
200	0.0014	2000	0.2163	7000	3.7516
400	0.0043	3000	0.5015	8000	5.2557
600	0.0126	4000	0.9702	9000	7.0075
800	0.0244	5000	1.6451	10000	9.0550

O termo dominante no número de operações realizadas no algoritmo convencional da decomposição LU é $\frac{2}{3}n^3$. Supondo que o tempo gasto no cálculo da decomposição seja proporcional ao número de operações realizadas, encontre os parâmetros a e b de modo que a função $t(n) = an^b$ melhor se ajuste aos dados. Com base no que você descobriu, é possível afirmar que o algoritmo se comporta como previsto? Que outras perguntas você imagina que possam surgir dessa análise? Formule algumas.

16.8. Seja A uma matriz quadrada de ordem n. É sempre possível encontrar matrizes Q e R, tais que $A = QR$, onde Q é uma matriz quadrada de ordem n, tal que $Q^TQ = I$ (matriz ortogonal) e R é uma matriz quadrada de ordem n, triangular superior. Essa fatoração é conhecida como fatoração (ou decomposição) QR. O custo computacional teórico das operações de ponto flutuante realizadas no cálculo da decomposição QR é da ordem de $\frac{4}{3}n^3$ operações.

Idealize um experimento numérico para descobrir se o algoritmo da decomposição QR do Octave realmente tem o comportamento descrito. Exiba um gráfico com os dados coletados em seu experimento e com os resultados que você obteve. A saber, para medir tempo no Octave, use as funções `tic` e `toc`. Para computar a decomposição QR de uma matriz no Octave, basta rodar:

```
>> [Q,R] = qr(A)
```

16.9. Exiba graficamente os pontos amostrados e a eles ajuste a curva $\phi(x) = \alpha\sqrt{x}e^{\beta x}$. Qual o resíduo?

x	1.00	1.50	2.00	2.50	3.00	4.00	5.00	6.00
y	1.72	1.90	1.99	2.03	2.00	1.89	1.73	1.55

16.10. Sejam $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_m, y_m)$ pontos no plano. Neste exercício vamos utilizar a estratégia de ajuste de curvas por quadrados mínimos para tentar encontrar o círculo que melhor se ajusta a esses pontos, ou seja queremos encontrar o centro (x_*, y_*) e o raio r tal que

$$\sum_{k=1}^{m} \left[(x_k - x_*)^2 + (y_k - y_*)^2 - r^2\right]^2 \tag{3}$$

seja o menor possível.

(a) Por que a estratégia de ajuste de curvas por quadrados mínimos não se aplica ao problema como descrito acima?

(b) Veja que a equação de um círculo também pode ser escrita como

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy = 1,$$

onde $A = (r^2 - x_*^2 - y_*^2)^{-1}$, $B = -2Ax_*$ e $C = -2Ay_*$.

(c) Considerando A, B e C como parâmetros, veja que o problema de ajuste pode ser formulado como

$$\min_{A,B,C} \sum_{k=1}^{m} \left[A(x_k^2 + y_k^2) + Bx_k + Cy_k - 1\right]^2.$$

(d) Rescreva o problema acima como

$$\min_{u} \|Mu - e\|^2,$$

onde $u = (A, B, C)^T$ e $e = (1, 1, \ldots, 1)^T$. Quem é M?

(e) Utilize o código Octave abaixo para gerar dados aleatórios para esse problema. Com esses dados, encontre o círculo que melhor se ajusta no sentido descrito no item anterior.

```
m = 150;                      % Quantidade de pontos
s = 1;                        % Escala do ruído
R = 4 * rand(1,1);            % Raio do círculo
C = 6 * (rand(2,1) - 0.5);    % Centro do círculo
t = sort ( 2*pi*rand(m,1) ); % Ângulos aleatórios
                              % Pontos sobre o círculo
x = C(1) + R * cos(t);
y = C(2) + R * sin(t);
                              % Pontos com ruído
X = x + s*(rand(m,1) - 0.5);
Y = y + s*(rand(m,1) - 0.5);
```

(f) Faça um gráfico exibindo os pontos aleatórios gerados e o círculo ajustado.

16.11. Anna Braum deciciu, com pesar, que precisa vender seu carro, um Chevrolet Celta 1.0 4P (flex), modelo 2013, com 65.000km rodados. Seu colega, Charles Dukan fez uma proposta. Anna, que não acompanha a dinâmica do mercado automotivo, não faz ideia se a proposta de Charles é justa. Mas Anna tem uma vantagem: acabou de cursar a disciplina de Cálculo Numérico. Anna resolve então descobrir o valor de mercado de seu estimado carro. O roteiro que Anna seguiu foi o seguinte:

(a) Pesquisou em um site de anúncios de carros usados, por ofertas de carros do mesmo modelo, com no máximo 10 anos de uso, em sua região.

(b) Montou uma tabela com ano do modelo, a quilometragem e o preço anunciado dos carros. Para ter confiança na estimativa que faria, coletou informação de pelo menos de 40 anúncios, tomando o cuidado de ter pelo menos 3 anúcios de carros de cada ano pesquisado.

(c) Utilizando seus conhecimentos numéricos, descobriu os coeficientes c_0, c_1 e c_2 da função

$$P = c_0 + c_1 A + c_2 K,$$

onde P é o preço anunciado do carro, A representa o ano do modelo e K a quilometragem do carro, sendo que todas as quantidades foram normalizadas e adimensionalizadas.

Com base nessa análise, Anna estimou o valor de mercado de seu veículo. O que sabemos é que Charles Dukan e Anna Braum fecharam o negócio, e todos ficaram felizes.

Siga o roteiro de Anna Braum e estime o valor de mercado do veículo dela.

(a) Pesquise no site `webmotors.com.br` (ou outro simliar) por pelo menos 40 anúncios de veículos em condições similares às condições do Celta da Anna.

(b) Adimensionalize e normalize os dados de preço, ano e quilometragem, coletados. Ou seja, se p_i, a_i e k_i, representam, respectivamente, essas três quantidades para o anúncio i, defina $P_i = (p_i - \bar{p})/(p_{\max} - p_{\min})$, $A_i = (a_i - \bar{a})/(a_{\max} - a_{\min})$, e $K_i = (k_i - \bar{k})/(k_{\max} - k_{\min})$, onde $\bar{p}$ é o valor médio do preço do veículos dos anunciados, $p_{\max}$ e $p_{\min}$ são os máximos e mínimos dos preços dos veículos anunciados, e o mesmo vale para $\bar{a}$, $a_{\max}$ e $a_{\min}$, e $\bar{k}$, $k_{\max}$ e $k_{\min}$.

(c) Formule o problema de ajuste e estime os coeficientes c_0, c_1 e c_2. Exiba o sistema linear a ser resolvido e a solução encontrada.

(d) A função que Anna concebeu para relacionar o ano e a quilometragem do veículo com o preço anunciado foi uma boa escolha? Com base nos coeficientes estimados, qual foi o erro médio quadrático entre a previsão de valor de mercado e os valores anunciados dos veículos?

(e) Compute o agio percentual de cada anúncio, dado por $h_i = 100 \cdot \frac{(p_i - p(a_i,k_i))}{p(a_i,k_i)}$, onde $p(a,k)$ é o preço de mercado estimado para um carro com modelo do ano a e quilometragem k. Se considerarmos que o preço anunicado é justo quando $|h_i| < 10\%$, quantos anúncios tinham preço justo, quantos estavam com preços muito acima e quantos representavam boas oportunidades? Faça um gráfico, exibindo para cada anúncio o agio computado. Qual dos anúncios coletados representa a melhor barganha?

(f) A cada 10.000 km rodados, qual a depreciação esperada no valor do carro? A cada ano, qual a depreciação esperada no valor do carro?

(g) Qual seria o valor justo para o Celta de Anna Braum?

Que outras perguntas relevantes poderiam ser respondidas por uma análise como essa? Quem mais poderia se beneficiar dessa análise? Pense outros cenários onde o que foi feito neste exercício também seria útil.

16.12. Se u e v são vetores ortogonais, mostre que $\|u+v\|_2^2 = \|u\|_2^2 + \|v\|_2^2$.

16.13. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$. Escreva $b = u + v$, com $u \in \mathcal{R}(A)$ e $v \in \mathcal{N}(A^T)$. Verifique que $u \perp v$. Qual a solução de quadrados mínimos do sistema linear $Ax = b$?

16.14. Se $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, com $m > n$, o sistema linear $Ax = b$, pode não ter solução. Mostre, entretanto, que o sistema normal, $A^T Ax = A^T b$, sempre tem solução.
Dica: use o teorema do núcleo e da imagem (veja Strang (1988)).

17 Interpolação

17.1. Encontre um polinômio p de grau no máximo 2 que satisfaça as condições: $p(-1) = -32$, $p(2) = 1$, $p(4) = 3$.

17.2. Resolva novamente o exercício anterior, mas considerando p representado como $p(x) = c_0 + c_1(x+1) + c_2(x+1)(x-2)$.

17.3. Qual polinômio p de grau no máximo 2 satisfaz as condições: $p(2) = -1$, $p(3) = 1$ e $p'(3) = 0$. Proponha uma representação para p, na qual a resolução do problema de interpolação fique mais simples.

17.4. Encontre o polinômio interpolador de grau 3 que satisfaz as condições

$$p(-1) = \alpha_0, \qquad p(1) = \alpha_1,$$
$$p'(-1) = \beta_0, \qquad p'(1) = \beta_1.$$

Dica: represente p como combinação linear de

$$\left\{\frac{(x+2)(x-1)^2}{4},\ 1-\frac{(x+2)(x-1)^2}{4},\ \frac{(x+1)(x-1)^2}{4},\ \frac{(x+1)^2(x-1)}{4}\right\}$$

Faça o gráfico destas funções. O que elas têm de especial?

18 Polinômios de Lagrange e análise de erro

18.1. (a) Encontre o polinômio interpolador p da função $f(x) = e^x$ em 0, 1/2 e 1.

(b) Faça o gráfico de f e de p, no intervalo $[-1, 2]$. Você acha seguro utilizar o polinômio interpolador para prever o comportamento da função fora do intervalo de interpolação (extrapolação)?

(c) Aparentemente, em qual ponto do intervalo $[0, 1]$ a aproximação de f pelo polinômio interpolador foi pior?

18.2. Encontre o ponto de intersecção das duas funções tabeladas, utilizando interpolação quadrática.

x	0.000	0.600	1.200	1.800	2.400	3.000
$f(x)$	1.300	1.383	1.223	0.919	0.626	0.435

x	0.400	0.900	1.400	1.900	2.400	2.900
$g(x)$	0.615	0.810	1.079	1.425	1.786	1.993

18.3. Com que grau de precisão podemos aproximar $\sqrt{115}$ usando interpolação quadrática sobre os pontos 100, 121 e 144?

18.4. Considere os pontos tabelados

x	1	2	3	4	5	6	7
$f(x)$	0.91	1.43	1.58	1.55	1.44	1.30	1.18

(a) Obtenha uma aproximação para o valor máximo de f usando interpolação quadrática.

(b) Usando interpolação aproxime a solução de $f(x) = 1.15$.

18.5. Se $\beta = \{q_0, q_1, \ldots, q_n\}$ é uma base para os polinômios de grau menor que $(n+1)$ e considere o conjunto de pontos $\{(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)\}$. Mostre que o problema de determinar o polinômio interpolador, representado na base β, recai em resolver o sistema linear

$$\begin{bmatrix} q_0(x_0) & q_1(x_0) & q_2(x_0) & \cdots & q_n(x_0) \\ q_0(x_1) & q_1(x_1) & q_2(x_1) & \cdots & q_n(x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_0(x_n) & q_1(x_n) & q_2(x_n) & \cdots & q_n(x_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Exiba uma base β para a qual este sistema linear seja triangular inferior.

19 Aula de exercícios

19.1. Em quantos pontos é necessário tabelar a função cosseno para que a sua aproximação por interpolação linear tenha sempre erro inferior a 10^{-4}?

19.2. Seja f uma função contínua definida no intervalo $[-1, 1]$.

(a) Construa o polinômio p que interpola f nos pontos $-2/3$ e $2/3$.

(b) Utilizando o polinômio interpolador p, obtenha uma fórmula de integração numérica para estimar $\int_{-1}^{1} f(x)dx$, através da integração de p.

(c) Se $f(x) = \ln(x + 2)$, calcule uma aproximação para $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ usando a estratégia da questão anterior. Calculando o valor exato da integral, exiba o erro da sua aproximação.

(d) Discuta como aplicar sua fórmula de integração para aproximar $\int_a^b g(t)dt$, para $a, b \in \mathbb{R}$.

19.3. Considere a função $f(x) = \cos(x)$ e a função $g(x)$ tabelada abaixo.

x	0.000	0.500	1.000	1.500	2.000	2.500	3.000
$g(x)$	−0.850	0.011	0.600	0.990	1.233	1.361	1.400

Estime o ponto $\hat{x}$ de intersecção destas duas funções.

20 Integração numérica

20.1. Mostre que o polinômio interpolador de grau 2 para f, nos pontos a, $m = (a + b)/2$ e b é dado por

$$p(x) = f(a) + 2\frac{(x-a)}{(b-a)}\left[f(m) - f(a) + \frac{f(b) - 2f(m) + f(a)}{(b-a)}(x-m)\right].$$

Definindo $h = (b - a)/2$, mostre que

$$\int_a^b p(x)\, dx = \frac{h}{3}\left[f(a) + 4f(m) + f(b)\right].$$

Por fim, para $f(x) = x^3$, mostre que $\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b p(x)\, dx$.

20.2. Neste exercício, você deve obter a fórmula para o erro de integração para a rega de Simpson, quando aplicada para o cálculo de $I = \int_{-h}^{h} f(x)dx$. Para isso, siga o roteiro.

(a) Defina o erro de integração numérica como

$$E = \int_{-h}^{h} f(x)dx - \frac{h}{3}[f(-h) + 4f(0) + f(h)].$$

(b) Expanda $f(x)$, $f(-h)$, $f(0)$ e $f(h)$ em Taylor, em torno de $x = 0$, até quarta ordem e substitua isso na fórmula de E.

Como transportar isso para o caso de uma integral computada em um intervalo $[a, b]$?

20.3. Em quantos subintervalos seria necessário particionar o intervalo $[0, 1]$ para estimar as integrais abaixo com quatro casas corretas usando as regras dos trapézios e de Simpson.

(a) $\int_0^1 \sin(2x)\,dx$

(b) $\int_0^1 e^{-x}\,dx$

(c) $\int_0^1 125t^3 - t^2 + 1\,dt$

(d) $\int_0^1 y^{-1/2}\,dy$

20.4. Seja $f(x) = (x-2)^2/(x+3)^3$.

(a) Estime $A = \int_0^1 f(x)\,dx$ pela regra dos trapézios e pela regra de Simpson utilizando apenas os valores tabelados abaixo.

x	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00
$f(x)$	$1.4815 \cdot 10^{-1}$	$8.9213 \cdot 10^{-2}$	$5.2478 \cdot 10^{-2}$	$2.9630 \cdot 10^{-2}$	$1.5625 \cdot 10^{-2}$

(b) Utilizando também que $f(1.25) = 7.3275 \cdot 10^{-3}$, estime $B = \int_0^{1.25} f(x)\,dx$ pela regra dos trapézios e pela regra de Simpson.

(c) Conhecendo os valores exatos para $A = 6.1988 \cdot 10^{-2}$ e $B = 6.4762 \cdot 10^{-2}$, calcule os erros relativos.

20.5. Aproxime a integral $I = \displaystyle\int_1^2 [x^3 + \ln x]\,dx$, pela regra de Simpson, usando a menor quantidade de subintervalos necessária para garantir um erro inferior a 10^{-3}.

20.6. Estime da melhor maneira possível os valores de $f(x)$ necessários para completar a tabela abaixo.

x	-0.3000	-0.20000	-0.10000	0.0000	0.1000	0.2000	0.3000
$f(x)$	7.7170			3.0000		3.2065	4.2724
$f'(x)$	-26.2925	-19.1218	-12.2101	-5.5000	1.0530	7.4837	13.8191

20.7. A média aritmética dos valores $y_1, y_2, \ldots, y_n$ é simplesmente $m = (y_1+y_2+\cdots+y_n)/n$. No caso em que estes valores são amostras de uma função ($y_j = f(x_j)$), o valor médio da função pode ser também estimado desta forma, desde que as amostras estejam regularmente distribuídas dentro do intervalo de interesse. Entretanto, quando as distribuição das amostras não é regular, o valor de m pode ficar muito enviesado. Neste caso, é melhor estimar o valor médio da função computando numericamente

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Obtenha o conjunto de dados libra.dat.

(a) Carregue esses dados no Octave com `load libra.dat` .

(b) Exiba os pontos deste conjunto de dados.

(c) Compute a média aritmética pela fórmula *ingênua*.

(d) Compute o valor médio $\bar{f}$, estimando numericamente a integral acima.

21 Método de Euler

21.1. Para os problemas de valor inicial abaixo, aproxime $y(1)$ pelo método de Euler, utilizando (i) $h = 0.2$ e (ii) $h = 0.1$. Calcule o erro absoluto nas duas aproximações.

(a) $y' = t^2 - y, \quad y(0) = 1. \quad [\ y(t) = -e^{-t} + t^2 - 2t + 2\ ]$

(b) $y' = 3y + 3t, \quad y(0) = 1. \quad [\ y(t) = \frac{4}{3}e^{3t} - t - \frac{1}{3}\ ]$

(c) $y' = -ty, \quad y(0) = 1. \quad [\ y(t) = e^{-t^2/2}\ ]$

21.2. Mostre que o método de Euler falha em aproximar a solução $y(t) = t^{3/2}$ do problema de valor inicial

$$y' = 1.5y^{1/3}, \quad y(0) = 0.$$

Por que isto acontece? Qual o problema encontrado?

21.3. Considere o sistema de equações não lineares

$$\begin{cases} x'(t) = \sigma(y - x), \\ y'(t) = x(\rho - z) - y, \\ z'(t) = xy - \beta z, \end{cases}$$

onde σ, ρ e β são parâmetros constantes. Denote por $Y(t) = (x(t), y(t), z(t))^T$.

(a) Para $\sigma = 10$, $\rho = 28$ e $\beta = 8/3$, estime $Y(t)$, partindo de $Y_0 = (-6, -6, 15)^T$, para $0 \le t \le 100$.

(b) Faça um gráfico exibindo a trajetória computada, ou seja, plotando os pontos $Y(t)$. (Veja o comando `plot3` do Matlab/Octave.)

(c) Resolva novamente o problema, utilizando porém uma condição inicial perturbada por um fator da ordem de 10^{-5}, ou seja partindo de $\tilde{Y}_0 = Y_0 + R$, com $\|R\| \le 10^{-5}$. Plote a trajetória $\tilde{Y}(t)$ computada. A figura que surgiu se parece com a obtida no item anterior?

(d) Plote a diferença entre as duas trajetórias, ou seja, plot $Y(t) - \tilde{Y}(t)$. O que você observa?

(e) Pesquise sobre o Efeito Borboleta e comente a relação com o experimento acima.

22 Runge-Kutta

22.1. Refaça o exercício 21.1, utilizando agora um método de Runge-Kutta de segunda ordem.

22.2. Considere o problema de valor inicial $y' = f(t, y)$, para $t > t_0$, com $y(t_0) = y_0$. O método do *Retângulo do Ponto-Médio explícito* ou método de *Euler Modificado* (um método de Runge-Kutta de segunda ordem) é dado por:

$$\begin{cases} \hat{y} &= y_n + \frac{h}{2} f(t_n, y_n), \\ y_{n+1} &= y_n + h f(t_n + h/2, \hat{y}). \end{cases}$$

Aplique este método com $h = 1/2$ para aproximar o valor solução do PVI abaixo em $t = 2$.

$$y' = y/t^2, \quad t > 1, \qquad y(1) = 1.$$

Usando o Octave, refaça este exercício usando $h = 10^{-2}$.

22.3. Aplique um método de Runge-Kutta de segunda ordem para resolver os problemas de valor inicial abaixo. Compare a solução obtida com a solução real. (Procure variar o método de Runge-Kutta empregado.)

(a) $y' = 1 + (t - y)^2, \quad 2 \le t \le 3, \quad y(2) = 1, \quad \text{com } h = 10^{-1}. \quad [\ y(t) = t + (1-t)^{-1}\ ]$

(b) $y' = 1 + y/t, \quad 1 \le t \le 2, \quad y(1) = 2, \quad \text{com } h = 10^{-2}. \quad [\ y(t) = t\ln(t) + 2t\ ]$

22.4. Considere a equação diferencial escalar, ordinária e de segunda ordem

$$u'' + p(t)u' + q(t)u = r(t), \quad a \le t \le b,$$

sujeita às condições iniciais

$$u(a) = \alpha, \quad u'(a) = \beta. \tag{4}$$

Neste exercícios veremos como é possível converter esta equação escalar de segunda ordem em um sistema de equações diferenciais acopladas de primeira ordem.

(a) Definindo $y_1 := u$ e $y_2 := u'$, verifique que é possível reescrever a EDO acima como

$$y_2' + p(t)y_2 + q(t)y_1 = r(t). \tag{5}$$

(b) Observe ainda que, diretamente da definição de y_1 e y_2, temos que

$$y_1' = y_2. \tag{6}$$

(c) Definindo $y(t) := (y_1(t), y_2(t))^T$, observe que as equações (5) e (6) podem ser escritas vetorialmente como

$$y'(t) = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ r(t) - p(t)y_2 - q(t)y_1 \end{pmatrix} := f(t, y). \tag{7}$$

(d) Por fim, observe que as condições iniciais (4) impostas à u podem ser traduzidas para y como

$$y(a) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}. \tag{8}$$

22.5. Utilizando o exercício anterior, reescreva os PVI's abaixo como sistemas de equações diferenciais de primeira ordem.

(a) $u'' + 4tu' - 12u = 2t + 1, \quad 1 \le t \le 3, \quad u(1) = 1, \quad u'(1) = 2.$

(b) $u'' - \sin(u) = t^2, \quad 0 \le t \le 2, \quad u(0) = 2, \quad u'(0) = 0.$

23 Diferenças finitas

23.1. Considere o problema de valor de contorno

$$xy'' - 2y' = 6, \quad 0 < x < 1, \qquad y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

Explique com aplicar o método de diferenças finitas com $h = 1/5$ e aproximações da ordem de h^2, para resolvê-lo. Exiba o sistema linear obtido.

23.2. Considere o problema de valor de contorno

$$2y'' - xy' + y = e^x, \quad 0 < x < 1, \qquad y(0) = 1, \quad y(1) = 3.$$

(a) Monte o sistema linear para computar a aproximação de diferenças finitas, utilizando passo $h = 0.25$.

(b) Usando o Octave, resolva esse problema usando $h = 0.05$.

23.3. Considere o PVC do exercício anterior, porém alterando a condição de contorno no extremo direito do intervalo para $y'(1) = 1$.

(a) Discuta como aplicar o método de diferenças finitas neste caso.

(b) Tomando $h = 0.05$ e usando o Octave, encontre a aproximação de diferenças finitas para a solução deste problema.

23.4. Considere o problema de valor de contorno

$$y'' + 2y = -x. \quad 0 < x < 1, \qquad y(0) = 0, \quad y(1) = 0,$$

cuja solução analítica é

$$y(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\sin(n\pi x)}{(n^2\pi^2 - 2)n\pi}.$$

(a) Estime $y(1/2)$.

(b) Esboce o gráfico de y, para $x \in [0, 1]$.

(c) Estime

$$I = \int_0^1 y(x)dx.$$

24 Aula de Exercícios

24.1. Considere as funções tabeladas abaixo.

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	2.0	1.8	1.5	1.3	1.2	1.2

x	0.0	1.3	2.1	2.8	4.1	5.0
$g(x)$	0.6	0.45	0.6	0.8	1.0	0.9

Utilizando interpolação quadrática, aproxime a solução de $f(x) - 2g(x) = 0$.

24.2. Considere a integral $\displaystyle\int_0^2 (5x^3 + x + 9)\, dx$.

(a) Qual o erro cometido na aproximação pela regra de Simpson Repetida, usando $h = 0.25$?

(b) Quantas subdivisões do intervalo de integração seriam necessárias na regra dos Trapézios compostos para garantir que o erro fosse menor que 10^{-2}?

24.3. À tabela abaixo, dentre as curvas $1/(\alpha + \beta x)$ e $a + bx + cx^2$, qual das duas deverá produzir um ajuste de quadrados mínimos melhor? Justifique. Ajuste a tabela apenas à curva escolhida.

x	0.10	0.30	0.50	0.80	1.00	2.00	3.00	5.00
y	0.61	0.35	0.24	0.17	0.13	0.07	0.05	0.03

24.4. Utilize um método de Runge-Kutta explícito de segunda ordem, com passo $h = 0.5$, para aproximar $y(2)$, sabendo que

$$yy' - 2x = 0, \qquad y(1) = 2.$$

25 Tudo junto e misturado

25.1. Seja $y : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, definida pelo problema de valor inicial

$$y' + 3y = 2xe^{-3x}, \qquad y(0) = 0.$$

Estime o valor de x onde y atinge seu máximo, e o valor máximo de y.

25.2. Considere uma curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(\sigma) = (x(\sigma), y(\sigma))$, onde x e y são dados por

$$\frac{dx}{d\sigma} = c(x,y)^2 p, \qquad \frac{dy}{d\sigma} = c(x,y)^2 q,$$
$$\frac{dp}{d\sigma} = -\frac{1}{c(x,y)}\frac{dc}{dx}, \qquad \frac{dq}{d\sigma} = -\frac{1}{c(x,y)}\frac{dc}{dy},$$

e $c : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função conhecida.

(a) Considere $c(x, y) = 2 + 0.2x + 0.4y$. Trace a curva γ, utilizando as condições iniciais

$$x(0) = y(0) = 0, \quad p(0) = q(0) = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

(b) Seja g é uma função contínua. Descreva uma estratégia para encontrar a intersecção da curva γ do item anterior com o gráfico da função g. Considere por exemplo

$$g(x) = 3 + \frac{1}{4}\sin(x/2).$$

25.3. Considere o sistema de equações diferenciais de primeira ordem com condições iniciais, dado por

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = u(1-v), & u(0) = 4, \\ \frac{dv}{dt} = v(u-2), & v(0) = 2. \end{cases}$$

Este sistema modela a interação entre duas populações, uma de presas e outra de predadores.

(a) Faça o gráfico de u e v, para $t \in [0, 20]$.

(b) Descubra qual a população máxima de presas.

(c) Observe que u e v têm um comportamento periódico. Qual o período de u e v?

Referências

Greenbaum, A. e Chartier, T. P. (2012). *Numerical Methods.* SIAM.

Kelley, C. T. (2003). *Solving Nonlinear Equations with Newton's Method.* Número 1 em Fundamentals of Algorithms. SIAM.

Strang, G. (1988). *Linear Algebra and its Applications.* Harcourt Brace & Company, 3ª edição.