Departamento de Matemática - IMECC - Unicamp
MA111- Primeiro Semestre de 2019
Prova 2 - 23/05/2019 (5^a - Noturno)

Nome: GABARITO ______________________________

RA: ______________________________ Turma

Questões	Notas
Q1	2.0
Q2	2.0
Q3	1.5
Q4	3.0
Q5	1.5
Total	10.0

- Desligue o celular.
- A prova contém cinco questões. Resolva cada questão em sua respectiva folha.
- Não retire o grampo da prova nem destaque páginas da prova.
- Não é permitido o uso de calculadoras.
- Respostas sem justificativas não serão consideradas.

Justifique suas respostas!

Questão 1. (2.0 pontos) Calcule as derivadas das seguintes funções.

(a) $f(x) = x \ln x^2$;

(b) $g(x) = \dfrac{\cos(x^3)}{\sqrt{x}}$.

Solução: (a) Como $\ln x^2 = 2\ln x$ temos pela regra do produto que

$$f'(x) = \big(x \ln x^2\big)' = (2x \ln x)' = 2\ln x + 2x\frac{1}{x} = \ln x^2 + 2.$$

(b) Pela regra da cadeia, temos que

$$\frac{d}{dx}\cos(x^3) = -3x^2 \operatorname{sen}(x^3).$$

Além disso,

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Logo, pela regra do quociente,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(\frac{\cos(x^3)}{\sqrt{x}}\right)' \\ &= \frac{(\cos(x^3))'\sqrt{x} - \cos(x^3)\left(\sqrt{x}\right)'}{(\sqrt{x})^2} \\ &= \frac{-3x^2 \operatorname{sen}(x^3)\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\cos(x^3)}{x} \\ &= -3x\sqrt{x}\operatorname{sen}(x^3) - \frac{1}{2x\sqrt{x}}\cos(x^3). \end{aligned}$$

Questão 2. (2.0 pontos) Uma certa quantidade de areia é despejada a uma taxa de $20\,m^3/min$, formando um monte cônico. Se a altura do monte for sempre o dobro do raio da base, com que taxa a altura estará crescendo quando o monte tiver $8\,m$ de altura?

Solução: Se h denota a altura do monte, queremos encontrar $h'(t_0)$ onde t_0 é o tempo no qual $h(t_0) = 8$.

A relação entre o raio e a altura é dada por $h(t) = 2r(t)$. Assim, o volume do monte é dado por

$$V(t) = \frac{\pi r(t)^2 h(t)}{3} = \frac{\pi h(t)^3}{12}.$$

Derivando implicitamente, obtemos

$$V'(t) = \frac{\pi h(t)^2 h'(t)}{4}.$$

Avaliando em t_0 obtemos

$$20 = V(t_0) = \frac{\pi 8^2 h'(t_0)}{4} implies h'(t_0) = \frac{80}{64\pi} = \frac{5}{4\pi} m/min,$$

ou seja, a altura estará crescendo a uma taxa de $5/4\pi$ m/mim.

Questão 3. (1.5 ponto) Avalie os limites abaixo e encontre o correspondente valor caso exista.

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\cos x - e^x - e^{-x}}{2x^2}$;

(b) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^{x^2}$.

Solução: (a) Por continuidade

$$\lim_{x\to 0}(2\cos x - \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}) = \lim_{x\to 0} 2x^2 = 0,$$

de forma que temos uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Além disso,

$$\left(2\cos x - \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}\right)' = -2\operatorname{sen} x - \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} \quad \text{e} \quad \left(2x^2\right)' = 4x \neq 0 \text{ se } x \neq 0.$$

Pela regra de L'Hospital,

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\cos x - \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-2\operatorname{sen} x - \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{4x}$$

se o limite da direita da igualdade existir. Novamente por continuidade,

$$\lim_{x\to 0}(-2\operatorname{sen} x - \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) = \lim_{x\to 0} 4x = 0$$

e temos novamente uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Como

$$\left(-2\operatorname{sen} x - \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right)' = -2\cos x - \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} \quad \text{e} \quad (4x)' = 4 \neq 0,$$

estamos novamente nas condições da regra de L'Hospital. Assim,

$$\lim_{x\to 0} \frac{-2\operatorname{sen} x - \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{4x} = \lim_{x\to 0} \frac{-2\cos x - \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{4} = -1$$

e portanto,

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\cos x - \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2x^2} = -1.$$

(b) Como para x próximo e a direita de zero, $\operatorname{sen} x > 0$ temos que

$$\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{\ln(\operatorname{sen} x)^{x^2}} = \exp\left\{\lim_{x\to 0^+} x^2 \ln(\operatorname{sen} x)\right\},$$

onde a última igualdade é válida pela continuidade da função exponencial, se o limite entre colchetes existe. Agora,

$$\lim_{x\to 0^+} x^2 \ln(\operatorname{sen} x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\operatorname{sen} x)}{\frac{1}{x^2}},$$

e sendo que

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(\operatorname{sen} x) = -\infty, \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty,$$

$$(\ln(\operatorname{sen} x))' = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \quad \text{e} \quad \left(\frac{1}{x^2}\right)' = \frac{-2}{x^3} \neq 0$$

temos por L'Hospital que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\operatorname{sen} x)}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}{\frac{-2}{x^3}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^3}{2\operatorname{tg} x},$$

se o limite da direita da igualdade existe. Como,

$$\lim_{x\to 0^+} -x^3 = \lim_{x\to 0^+} \operatorname{tg} x = 0,$$

e sendo que

$$\left(-x^3\right)' = -3x^2 \, (2\operatorname{tg} x)' = 2\sec^2 x \quad \text{e} \quad (2\operatorname{tg} x)' = 2\sec^2 x \neq 0, \quad x \neq 0$$

podemos aplicar L'Hospital novamente. Assim,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\operatorname{sen} x)}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^3}{2\operatorname{tg} x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-3x^2}{2\sec^2 x} = 0,$$

por continuidade. Consequentemente,

$$\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^{x^2} = \exp\left\{ \lim_{x\to 0^+} x^2 \ln(\operatorname{sen} x) \right\} = \mathrm{e}^0 = 1.$$

Questão 4. (3.0 pontos) Seja $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$.

(a) (1.0) Determine os intervalos de crescimento/decrescimento de f, e os seus pontos de máximo e mínimo local, se existirem.

(b) (0.8) Determine os intervalos onde f é côncava para cima/baixo e os seus pontos de inflexão, se existirem.

(c) (0.4) Caso existam, encontre as assíntotas horizontais e verticais de f.

(d) (0.8) Esboce o gráfico de f usando (pelo menos) as informações obtidas nos itens (a), (b) e (c).

Solução: (a) A análise de crescimento e decrescimento é feito via análise de sinal da primeira derivada. Derivando, obtemos

$$f'(x) = \frac{e^x}{x^2}(x-1),$$

e portanto, o sinal de f' só depende de $(x-1)$, uma vez que e^x e x^2 são sempre positivas. Assim,

$$f'(x) < 0 \quad \text{se } x < 1 \implies f \text{ é decrescente em } (-\infty, 1) \setminus \{0\}$$

e

$$f'(x) > 0 \quad \text{se } x > 1 \implies f \text{ é crescente em } (1, +\infty).$$

Além disso, como $x = 0$ não está no domínio de f, temos que $x = 1$ é o único ponto crítico de f. Como f' muda de negativo para positivo em $x = 1$ temos (pelo teste da primeira derivada) que $x = 1$ é um ponto de mínimo local de f.

(b) A análise da concavidade de f é feito via análise do sinal da segunda derivada de f. Derivando f', obtemos

$$f''(x) = \frac{e^x}{x^3}(x^2 - 2x + 2).$$

Como $x^2 - 2x + 2$ possui discriminante positivo, é sempre positiva. Portanto, o sinal de f'' depende do sinal x^3. Assim,

- em $(-\infty, 0)$ temos que x^3 é negativa e portanto $f''(x) < 0$;
- em $(0, +\infty)$ temos que x^3 é positiva e portanto $f''(x) > 0$.

Portanto, pelo Teste de Concavidade, f é côncava para baixo no intervalo $(-\infty, 0)$ e côncava para cima em $(0, +\infty)$.

Ainda mais, como $x = 0$ não está no domínio de f, a função não possui ponto de inflexão de f.

(c) Como $x = 0$ não está no domínio de f, temos que é um candidato a assíntota vertical. Como,

$$\lim_{x\to 0} e^x = 1 > 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^\pm} \frac{1}{x} = \pm\infty,$$

temos que

$$\lim_{x\to 0^\pm} \frac{e^x}{x} = \pm\infty$$

e portanto $x = 0$ é uma assíntota vertical de f.

Para as assíntotas horizontais temos:

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{e^x}{x} = 0, \quad \text{pois} \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x\to -\infty} e^x = 0$$

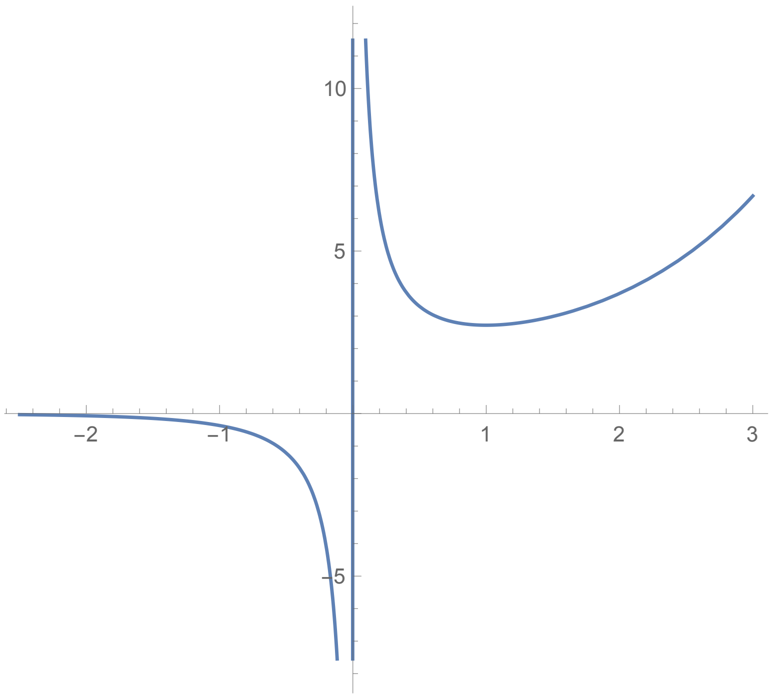
e

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x} = \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$$

por L'Hospital.

Portanto, $y = 0$ é assíntota horizontal de f para $x \to -\infty$.

(d) Um esboço do gráfico é dado abiaxo



Questão 5. (1.5 ponto) Um fabricante de latas deseja fabricar uma lata na forma de um cilindro circular reto com um volume de $16\pi cm^3$. Determine o raio e a altura da lata para que um mínimo de material seja usado em sua fabricação.

Solução: Se h e r denotam, respectivamente, a altura e o raio da base da lata em questão, o material gasto na fabricação da lata é dado por

$$2\pi r^2 + 2\pi r h.$$

Como o volume de um cilindro é dado por $V = \pi r^2 h$ temos que

$$16\pi = \pi r^2 h \implies h = \frac{16}{r^2}.$$

Assim, devemos minimizar a função

$$f(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{16}{r^2} = 2\pi r^2 + \frac{32\pi}{r}.$$

Note que o domínio de f é $(0, +\infty)$ o que implica que os únicos candidatos a mínimo de f são também pontos críticos de f. Derivando, obtemos

$$f'(r) = 4\pi r - \frac{32\pi}{r^2} = \frac{4\pi r^3 - 32\pi}{r^2} \text{ e } f'(r) = 0 \iff 4r^3 - 32 = 0 \iff r = 2.$$

Assim 2 é o único ponto crítico de f. Note que o sinal de f' muda de negativo para positivo em $r = 2$, o que implica, pelo Teste de Primeira Derivada, que $r = 2$ é um ponto de mínimo (absoluto) de f.

Agora observe que neste caso, $h = \frac{16}{2^2} = 4$, donde segue que o raio e a altura da lata devem ser 2 e 4, respectivamente.