Q1. (2.0) Considere a curva definida pela equação $x^6 + y^6 + 8xy + 6 = 0$. Calcule y' e encontre a aproximação linear à curva no ponto $(1, -1)$.

Resolução: Derivamos implicitamente a equação:

$$6x^5 + 6y^5y' + 8y + 8xy' = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{-6x^5 - 8y}{6y^5 + 8x}. \ (1.0)$$

A aproximação linear à curva no ponto $(1, -1)$ é dada por

$$L(x) = y'(1)(x - 1) + y(1).$$

Como o ponto $(1, -1)$ pertence à curva, para $x = 1$ temos que $y = -1$ e portanto

$$y'(1) = 1.$$

Logo,

$$L(x) = (x - 1) - 1 = x - 2. \ (1.0)$$

Q2. (2.5) Calcule

(a) (0.5) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{2x^3}$

(b) (1.0) $\lim_{x\to+\infty} x^2 \mathrm{tg}\Big(\dfrac{1}{x}\Big)$

(c) (1.0) $\lim_{x\to 0^+} [\mathrm{sen}(x)]^{(2x)}$

Resolução:

(a) Como

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty \text{ e } \lim_{x\to+\infty} 2x^3 = +\infty$$

então temos uma indeterminação do tipo "$\frac{\infty}{\infty}$" e portanto, pela Regra de L'Hospital, temos que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{2x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{6x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{6x^3} = 0. \ (0.5)$$

(b) Observe que

$$x^2 \mathrm{tg}\Big(\frac{1}{x}\Big) = \frac{\mathrm{tg}\Big(\frac{1}{x}\Big)}{\frac{1}{x^2}}. \ (0.3)$$

Como

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \text{ e } \lim_{x\to+\infty} \mathrm{tg}\Big(\frac{1}{x}\Big) = 0$$

temos uma indeterminação do tipo "$\frac{0}{0}$". Usando a Regra de L'Hôpital concluímos que

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 \mathrm{tg}\Big(\frac{1}{x}\Big) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{tg}\Big(\frac{1}{x}\Big)}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sec^2\Big(\frac{1}{x}\Big)\big(\frac{-1}{x^2}\big)}{\frac{-2}{x^3}} = \lim_{x\to+\infty} 2x \sec^2\Big(\frac{1}{x}\Big) = +\infty. \ (0.7)$$

(c) Observe que

$$[\mathrm{sen}(x)]^{(2x)} = e^{2x \ln(\mathrm{sen}\ x)} = \exp\Big(2\frac{\ln(\mathrm{sen}\ x)}{\frac{1}{x}}\Big). \ (0.2)$$

Como

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(\mathrm{sen}\ x) = -\infty \text{ e } \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

temos uma indeterminação da forma "$\frac{\infty}{\infty}$". Aplicando L'Hôpital obtemos que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\mathrm{sen}\ x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\cos x}{\mathrm{sen}\ x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{x^2\cos x}{\mathrm{sen}\ x}. \ (0.3)$$

Observe que o limite da direita é uma indeterminação do tipo "$\frac{0}{0}$". Aplicando L'Hôpital novamente obtemos que

$$\lim_{x\to 0^+} -\frac{x^2\cos x}{\mathrm{sen}\ x} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{2x\cos x - x^2 \mathrm{sen}\ x}{\cos x} = \frac{0}{1} = 0 \ (0.3).$$

Portanto, como a exponencial é contínua

$$\lim_{x\to 0^+} [\mathrm{sen}(x)]^{(2x)} = \lim_{x\to 0^+} \exp\Big(2\frac{\ln(\mathrm{sen}\ x)}{\frac{1}{x}}\Big) = \exp\Big(\lim_{x\to 0^+} 2\frac{\ln(\mathrm{sen}\ x)}{\frac{1}{x}}\Big) = e^{2.0} = 1. \ (0.2)$$

Q3. (3.5) Considere a seguinte função
$$f(x) = x^5 e^{-x}.$$

(a) (0.5) Encontre o domínio de f, os pontos de intersecção do gráfico de f com os eixos e analise a simetria de f.

(b) (0.7) Caso existam, determine as assíntotas horizontais e verticais de f.

(c) (0.8) Determine os intervalos de crescimento e decrescimento de f, seus pontos de máximo e mínimo e os seus valores.

(d) (0.8) Determine os intervalos onde f tem concavidade para cima e para baixo e os pontos de inflexão.

(e) (0.7) Esboce o gráfico de f usando as informações obtidas nos itens anteriores.

Resolução:

(a) O domínio de f é $\mathbb{R}$. (0.1)

Temos que $f(0) = 0$ e portanto o gráfico de f intercepta o eixo y em $y = 0$. (0.1) Além disso, temos que

$$f(x) = 0 \iff x^5 e^{-x} = 0 \iff x = 0,$$

portanto o gráfico de f intercepta o eixo x em $x = 0$. (0.1)

Como $f(-x) = -x^5 e^x$ então f não é nem par nem ímpar. (0.2)

(b) *Assíntotas horizontais:* Usando a Regra de L'Hôpital repetidas vezes obtemos que

$$\lim_{x\to+\infty} x^5 e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^5}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{5x^4}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{20x^3}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{60x^2}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{120x}{e^x} \lim_{x\to+\infty} \frac{120}{e^x} = 0.$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^5 e^{-x} = -\infty.$$

Portanto, $y = 0$ é assíntota horizontal. (0.4)
Assíntotas verticais: Não há . (0.3)

(c) Para encontrar os intervalos de crescimento e decrescimento de f temos que calcular sua derivada. Pela regra do quociente temos que

$$f'(x) = 5x^4 e^{-x} - x^5 e^{-x} = e^{-x} x^4 (5 - x). \text{ (0.2)}$$

Como $f'(x) > 0$ em $(-\infty, 5)$ então f é crescente em $(-\infty, 5)$. (0.2)

Como $f'(x) < 0$ em $(5, +\infty)$ então f é decrescente em $(5, +\infty)$. (0.2)

Observe que $f'(x) = 0$ em $x = 0$ e $x = 5$. Pelo teste da primeira derivada temos que $x = 5$ é um ponto de mínimo local e $f(5) = \frac{5^5}{e^5}$ é valor de mínimo local. (0.2)

(d) Para determinar a concavidade do gráfico vamos calcular f''. Pela regra do quociente temos que

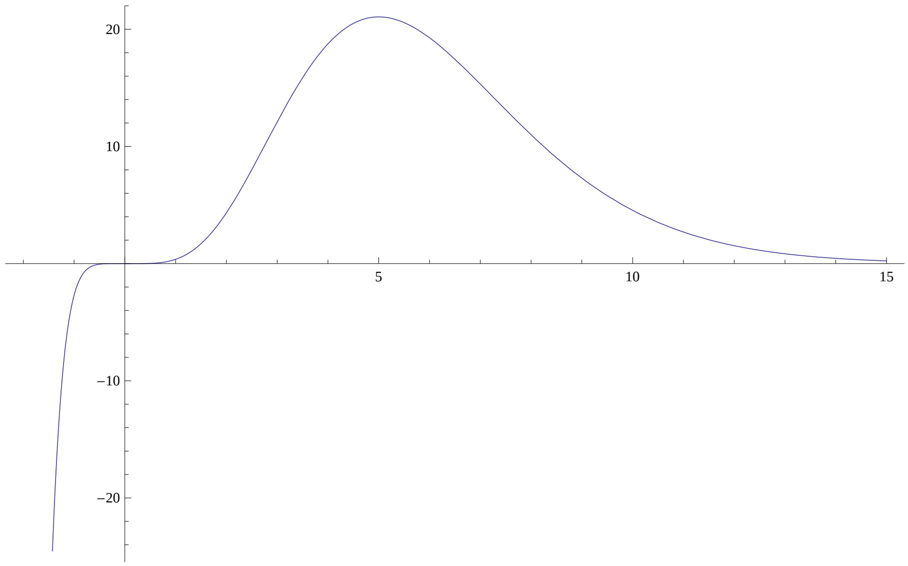
$$f''(x) = -e^{-x}(5x^4 - x^5) + e^{-x}(20x^3 - 5x^4) = e^{-x} x^3 (x^2 - 10x + 20) = e^{-x} x^3 (x - (5+\sqrt{5}))(x - (5-\sqrt{5})). \text{ (0.2)}$$

Como $f''(x) > 0$ em $(0, 5-\sqrt{5})$ e $(5+\sqrt{5}, +\infty)$ então f é côncava para cima em $(0, 5-\sqrt{5})$ e $(5+\sqrt{5}, +\infty)$. (0.2)

Como $f''(x) < 0$ em $(-\infty, 0)$ e $(5-\sqrt{5}, 5+\sqrt{5})$ então f é côncava para baixo em $(-\infty, 0)$ e $(5-\sqrt{5}, 5+\sqrt{5})$. (0.2)

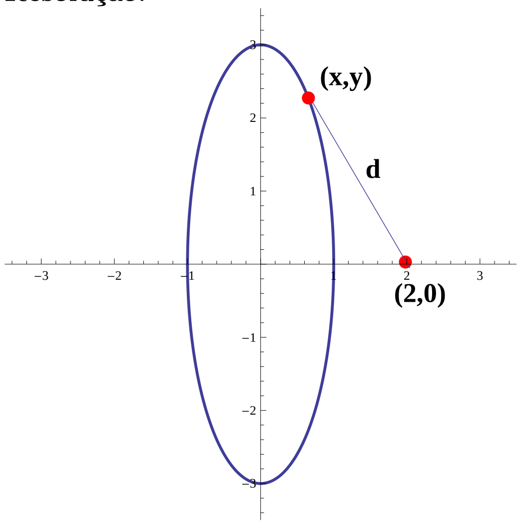
Os pontos de inflexão são $x = 0$ e $x = 5 \pm \sqrt{5}$. (0.2)

(e) Esboço do gráfico de f: (0.7)



Q4. **(2.0)** Encontre os pontos da curva $9x^2 + y^2 = 9$ que estão mais distantes do ponto $(2, 0)$.

Resolução:



Seja (x, y) um ponto sobre a elipse. A distância entre $(2, 0)$ e (x, y) é $d = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$. Como (x, y) está sobre a elipse, temos que $y^2 = 9 - 9x^2$. Substituindo obtemos a função distância em termos de x

$$d(x) = \sqrt{(x-2)^2 + y^2} = \sqrt{(x-2)^2 + 9 - 9x^2} = \sqrt{-8x^2 - 4x + 13}.$$

Observer que maximizar a função distância é equivalente a maximizar a função distância ao quadrado. Seja

$$d^2(x) = f(x) = -8x^2 - 4x + 13. \text{ (1.0)}$$

Calculamos a derivada $f'(x) = -16x - 4$. O único ponto crítico é $x = -\frac{1}{4}$.

Como $f''(x) = -16 < 0$, pelo teste da derivada segunda, f tem um máximo local e absoluto em $x = -\frac{1}{4}$.

Outra opção é analisar o sinal de f': Temos que $f'(x) >$ em $(-\infty, -\frac{1}{4})$ e $f'(x) < 0$ em $(-\frac{1}{4}, +\infty)$. Pelo teste da derivada primeira, $x = -\frac{1}{4}$ é um ponto de máximo absoluto.

A coordenada y é tal que $y^2 = 9 - \frac{9}{16} = 9\frac{15}{16}$. Portanto, temos dois pontos sobre a elipse que são mais distantes de $(2, 0)$: os pontos $(-\frac{1}{4}, \pm\frac{3}{4}\sqrt{15})$. (1.0)