Q1.(1.5) Calcule

(a) (0.5) $\lim_{x\to\frac{3}{2}} \dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right)}{\text{sen}[\pi(x-\frac{1}{2})]}$

(b) (1.0) $\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$

Resolução:

(a) Como

$$\lim_{x\to\frac{3}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{3}x\right) = 0 \text{ e } \lim_{x\to\frac{3}{2}} \text{sen}[\pi(x-\frac{1}{2})] = 0,$$

temos uma indeterminação da forma "$\frac{0}{0}$". Pela regra de L'Hôpital,

$$\lim_{x\to\frac{3}{2}} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right)}{\text{sen}[\pi(x-\frac{1}{2})]} = \lim_{x\to\frac{3}{2}} \frac{-\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}x\right)\frac{\pi}{3}}{\cos[\pi(x-\frac{1}{2})]\cdot\pi} = \frac{-1\cdot\frac{\pi}{3}}{-1\cdot\pi} = \frac{1}{3}. \ (0.5)$$

(b) Observe que

$$x^{\frac{1}{x-1}} = e^{\frac{1}{x-1}\ln(x)}. \ (0.2)$$

Como

$$\lim_{x\to 1} \ln(x) = 0 \text{ e } \lim_{x\to 1} x-1 = 0$$

temos uma indeterminação da forma "$\frac{0}{0}$". Aplicando L'Hôpital obtemos que

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x} = 1. \ (0.5)$$

Portanto, como a exponencial é contínua

$$\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x\to 1} e^{\frac{1}{x-1}\ln(x)} = \exp(\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1}) = e^1 = e. \ (0.3)$$

Q2. (a) (1.5) Prove que a função

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{se } x > 0, \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

é diferenciável em $x = 0$. Dica: Use a regra de L'Hôpital.
(b) (1.0) Calcule as derivadas primeira e segunda da seguinte função

$$g(t) = \arccos(\operatorname{sen}(t)).$$

Resolução:

(a) A função é diferenciável em $x = 0$ se existe $f'(0)$. Por definição

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h - 0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h}. \text{ (0.2)}$$

Calculemos os limites laterais:

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{0}{h} = 0; \text{ (0.2)}$$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{h}}}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\frac{1}{h}}{e^{\frac{1}{h}}}. \text{ (0.4)}$$

Como

$$\lim_{h\to 0^+} e^{\frac{1}{h}} = +\infty \quad \text{ e } \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h} = +\infty,$$

temos uma indeterminação da forma "$\frac{\infty}{\infty}$". Pela regra de L'Hôpital,

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\frac{1}{h}}{e^{\frac{1}{h}}} = \lim_{h\to 0^+} \frac{-\frac{1}{h^2}}{e^{\frac{1}{h}}\frac{-1}{h^2}} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{e^{\frac{1}{h}}} = 0. \text{ (0.5)}$$

Como os limites laterais são iguais, concluímos que $f'(0)$ existe e é igual a 0. (0.2)

(b) Temos que

$$g(t) = \arccos(\operatorname{sen}\,(t)) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}\,(t)) = \frac{\pi}{2} - t,$$

portanto $g'(t) = -1$ (0.8) e $g''(t) = 0$. (0.2)

Outra forma: Temos que

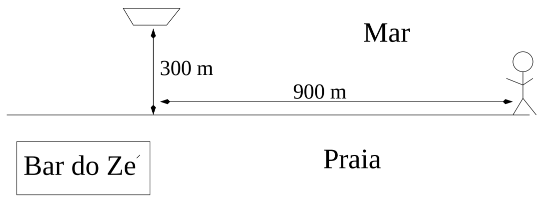
$$(\arccos(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \text{ (0.3)}$$

Usando a regra da cadeia,

$$g'(t) = \frac{-1}{\sqrt{1 - (\operatorname{sen}\,t)^2}} \cdot \cos t = -\frac{\cos t}{\cos t} = -1\ , \text{ (0.5)} \qquad g''(t) = 0. \text{ (0.2)}$$

Q3.(2.5) Um triatleta se encontra numa praia reta, a 900 m do Bar do Zé, quando vê uma criança cair de um barco no mar a 300 m da praia, na altura deste bar. Se o atleta corre na areia a 500 m/min e nada a 400m/min, determine o caminho que ele deve escolher para chegar o mais rápido possível ao resgate da criança e demonstre que é o mais rápido. Quanto tempo vai demorar para percorrer este caminho? (Obs: 300^2+400^2=500^2)

Resolução:



O atleta corre uma distância x na praia e depois nada uma distância y no mar, diretamente na direção da criança. Portanto, o tempo em minutos do percurso é $t = x/500 + y/400$. A distância y nadada é dada por $y = \sqrt{z^2 + 300^2}$, onde z é a distância do bar a partir da qual o atleta começa a nadar, i.e., $z = 900 - x$. Assim, a função a ser minimizada é

$$t(x) = \frac{x}{500} + \frac{\sqrt{(900-x)^2 + 300^2}}{400}, \quad x \in [0, 900]. \ (1.0)$$

Estamos a procura do mínimo absoluto desta função no intervalo [0,900]. Os pontos críticos desta função se encontram onde $t'(x) = \dfrac{1}{500} + \dfrac{1}{800\sqrt{(900-x)^2+300^2}} \cdot 2(900-x)\cdot(-1) = \dfrac{1}{500} - \dfrac{900-x}{400\sqrt{(900-x)^2+300^2}} = 0$ ou onde $t'(x)$ não existe. Ela é igual a zero em

$$\begin{aligned}
\frac{1}{500} &= \frac{900-x}{400\sqrt{(900-x)^2+300^2}}\\
\sqrt{(900-x)^2+300^2} &= \frac{500}{400}(900-x)\\
(900-x)^2+300^2 &= \left[\frac{5}{4}(900-x)\right]^2 = \frac{25}{16}(900-x)^2\\
300^2 &= \left(\frac{25}{16}-1\right)(900-x)^2 = \frac{9}{16}(900-x)^2\\
300 &= \frac{3}{4}(900-x) \qquad \text{raízes positivas!}\\
400 &= 900-x\\
x &= 500. \ (0.5)
\end{aligned}$$

Pelo método do intervalo fechado, basta avaliarmos t no ponto crítico e nos extremos do intervalo, o menor desses valores será o mínimo absoluto.

$$t(500) = \frac{500}{500} + \frac{\sqrt{(900-500)^2+300^2}}{400} = 1 + \frac{500}{400} = \frac{9}{4}; \quad t(0) = \frac{\sqrt{900^2+300^2}}{400} = \frac{3\sqrt{10}}{4};$$

$$t(900) = \frac{900}{500} + \frac{\sqrt{300^2}}{400} = \frac{9}{5} + \frac{3}{4} = \frac{51}{20}.$$

O menor desses valores é $\frac{9}{4}$.

Resposta: O atleta deve correr ao longo da praia pelos primeiros 500 m e depois nadar diretamente na direção da criança. Ele vai demorar $\frac{9}{4} = 2.25$ min para chegar lá. (1.0)

Outra forma para encontrar o mínimo absoluto. Calculamos a derivada segunda de t.

$$t''(x) = \frac{1}{400\sqrt{(900-x)^2+300^2}} + \frac{-1}{2}\frac{x-900}{400\sqrt{(900-x)^2+300^2}^3}\cdot(2(900-x)\cdot(-1) = \frac{300^2}{400\sqrt{(900-x)^2+300^2}^3}.$$

Portanto, $t''(500) = \dfrac{300^2}{400\sqrt{400^2+300^2}^3} = \dfrac{300^2}{400\cdot 500^3} > 0$. Logo, o tempo tem um mínimo relativo em $x = 500$. É o mínimo absoluto? Sim, pois não há outros pontos críticos no interior do intervalo $[0, 900]$, mas somente nos extremos que, uma vez que a função é contínua em $[0, 900]$, são necessariamente máximos.

Q4.(3.5) Considere a seguinte função
$$f(x) = \frac{x^2+7x+10}{x+1}.$$

(a) (0.5) Encontre o domínio de f, os pontos de intersecção do gráfico de f com os eixos e analise a simetria de f.

(b) (0.7) Caso existam, determine as assíntotas horizontais e verticais de f.

(c) (0.8) Determine os intervalos de crescimento e decrescimento de f, seus pontos de máximo e mínimo e os seus valores.

(d) (0.8) Determine os intervalos onde f tem concavidade para cima e para baixo e os pontos de inflexão.

(e) (0.7) Esboce o gráfico de f usando as informações obtidas nos itens anteriores.

Resolução:

(a) A função é racional, portanto o seu domínio consiste de todos os números reais onde o seu denominador é diferente de zero, i.e., $\mathbb{D} = \mathbb{R} - \{-1\}$. (0.1)

Temos que $f(0) = 10$ e portanto o gráfico de f intercepta o eixo y em $y = 10$. (0.1)

Além disso, temos que $f(x) = 0$ em $x^2+7x+10 = (x+5)(x+2) = 0$, i.e., em $x = -2$ e $x = -5$, portanto o gráfico de f intercepta o eixo x em $x = -2$ e $x = -5$. (0.1)

Como $f(-x) = \frac{x^2-7x+10}{-x+1}$ então f não é nem par nem ímpar. (0.2)

(b) *Assíntotas verticais:* Possivelmente em $x = -1$:

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{x^2+7x+10}{x+1} = \text{“}\frac{2}{0^+}\text{”} = \infty; \qquad \lim_{x\to -1^-} \frac{x^2+7x+10}{x+1} = \text{“}\frac{2}{0^-}\text{”} = -\infty.$$

Portanto, a reta $x = -1$ é assíntota vertical de f. (0.3)

Assíntotas horizontais: $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+7x+10}{x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+7/x+10/x^2}{1/x+1/x^2} = \text{“}\frac{1}{0^+}\text{”} = \infty$

$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+7x+10}{x+1} = \lim_{x\to -\infty} \frac{1+7/x+10/x^2}{1/x+1/x^2} = \text{“}\frac{1}{0^-}\text{”} = -\infty$

Portanto, f não possui assíntotas horizontais. (0.4)

(c)
$$f'(x) = \frac{(2x+7)(x+1)-(x^2+7x+10)\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2} = \frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)^2}. \ (0.2)$$

$f'(x) = 0$ em $x = 1$ e $x = -3$. A derivada não existe somente em $x = -1$ que não faz parte do domínio de f. Portanto, os pontos críticos de f são $x = 1$ e $x = -3$.

Como $f'(x) > 0$ em $(-\infty, -3)$ e $(1, +\infty)$, temos que f é crescente em $(-\infty, -3)$ e $(1, +\infty)$. (0.2)

Como $f'(x) < 0$ em $(-3, -1)$ e $(-1, 1)$ temos que f é decrescente em $(-3, -1)$ e $(-1, 1)$. (0.2)

Pelo teste da derivada primeira, concluímos que $x = -3$ é um ponto de máximo local e $x = 1$ é um ponto de mínimo local. O valor mínimo local é $f(1) = \frac{1^2+7\cdot 1+10}{1+1} = 9$ e o valor máximo local é $f(-3) = \frac{(-3)^2+7\cdot(-3)+10}{(-3)+1} = 1$. (0.2)

Observação: também poderia ser utilizado o teste da derivada segunda: $f''(1) = \frac{8}{2^3} = 1 > 0 \Rightarrow$ mínimo local e $f''(-3) = \frac{8}{(-2)^3} = -1 < 0 \Rightarrow$ máximo local.

(d)

$$f''(x) = \frac{(2x+2)(x+1)^2 - (x^2+2x-3)\cdot 2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{2x^2+4x+2-2x^2-4x+6}{(x+1)^3} = \frac{8}{(x+1)^3}. \ (0.2)$$

Como $f''(x) > 0$ em $(-1, +\infty)$ então f é côncava para cima em $(-1, +\infty)$. (0.2)

Como $f''(x) < 0$ em $(-\infty, -1)$ então f é côncava para baixo em $(-\infty, -1)$. (0.2)

Não há pontos de inflexão, pois o ponto onde muda a concavidade não pertence ao domínio da função. (0.2)

(e) Esboço do gráfico: (0.7)