Grupos de Heisenberg: da Geometria ao Operador de Kohn - Laplace

Igor Leite Freire

Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica - IMECC
Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP
C.P. 6065, 13083-970 - *Campinas - SP, Brasil*
E-mail: igor@ime.unicamp.br

Resumo

Neste trabalho apresentamos brevemente os Grupos de Heisenberg, algumas de suas propriedades geométricas e a equação semilinear de Kohn - Laplace.

Comentamos também resultados recentes envolvendo tais equações e a geometria de H^n, bem como problemas em aberto envolvendo a estrutura geométrica de H^n e grupos de simetrias da equação semilinear de Kohn - Laplace para $n > 1$.

Palavras-chaves: Grupos de Heisenberg, Equação de Kohn - Laplace

1 Introdução

O objetivo do presente trabalho é fazer uma introdução despretenciosa e apresentar alguns resultados acerca dos chamados *Grupos de Heisenberg*.

Tais grupos são amplamente pesquisados nas mais diversas áreas da matemática, como por exemplo, Equações Diferenciais (vide [1, 2, 6, 13, 14, 15, 17]), Geometria (vide [7, 19, 20, 21, 22]) e Análise Harmônica (vide [9]). Uma boa introdução aos Grupos de Heisenberg, feita do ponto de vista da Análise, pode ser encontrada em [24]. Em [11] há uma ampla lista de referências dos Grupos de Heisenberg em Física-Matemática, Análise e Geometria.

Nossa ênfase principal neste texto é o Grupo de Heisenberg tridimensional, que é uma das oito possíveis geometrias em dimensão três (vide [26]) e é o grupo de Lie nilpotente mais simples e de mais baixa dimensão.

No que segue, apresentaremos as origens físicas dos Grupos de Heisenberg. Àqueles que não se interessam ou tenham aversão à Física, podem, sem perda de conteúdo, passar à próxima seção.

A álgebra de Lie de Heisenberg tem esse nome porque as equações de estrutura são as relações de comutação canônicas de Heisenberg na Mecânica Quântica. Tais relações, todavia, são versões quantizadas dos parênteses de Poisson para coordenadas canônicas na Mecânica Hamiltoniana.

O estado de um sistema clássico é descrito, na Mecânica Hamiltoniana, por n coordenadas $q_1, \cdots, q_n$ e n momentos $p_1, \cdots, p_n$. As $2n$ variáveis constituem as variáveis canônicas do sistema. Outras importantes funções na Física, tais como energia e momentum, são funções das variáveis canônicas e são chamados observáveis. Tais funções constituem uma álgebra de Lie de dimensão infinita com respeito aos parênteses de Poisson

$$\{F, G\} := \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \right).$$

As equações de movimento

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \{q_i, H\} \quad e \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = \{p_i, H\},$$

onde o ponto denota derivada em relação ao tempo, são chamadas as *equações de Hamilton*, e H é a Hamiltoniana do sistema.

Mais geralmente, a evolução temporal de um observável é dada pela equação

$$\dot{F} = \{F, H\}$$

e neste caso, para descrevermos o comportamento da partícula, teremos $2n + 1$ variáveis, a saber, $(q_1, \cdots, q_n, p_1, \cdots, p_n, t)$.

A descrição, do ponto de vista da Mecânica Quântica, do mesmo sistema, é feita encontrando-se uma álgebra de operadores hermitianos num espaço de Hilbert cujo produto de Lie é dado por um colchete (de Lie), como dito na Mecânica Quântica, um comutador dos observáveis.

Isto é feito de modo que se A e B são dois operadores correspondentes às funções clássicas a e b, então $[A, B]$ é um operador que corresponde à função clássica $i\hbar\{a, b\}$, onde $\hbar = h/2\pi$ e h é a constante de Planck. Em particular, o conjunto das variáveis canônicas q_i, p_j satisfazem $\{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0$ e $\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$, onde δ_{ij} é o símbolo de Kroenecker. Na Mecânica Quântica os respectivos operadores satisfazem as seguintes relações de comutação

$$[Q_i, Q_j] = 0, \quad [P_i, P_j] = 0, \quad [Q_i, P_j] = i\hbar\delta_{ij}\mathbb{I}, \tag{1}$$

onde $\mathbb{I}$ denota o operador identidade.

No caso particular de uma partícula, os operadores Q_1, Q_2, Q_3 são chamados, respectivamente, de X, Y, Z, e correspondem à multiplicação pelas componentes que representam. Por exemplo, se $|\psi>$ é um ket (um vetor num espaço de Hilbert), então $X|\psi>= x|\psi>$, etc, e os operadores momento são equivalentes a $P_x = \dfrac{\hbar}{i}\dfrac{\partial}{\partial x}$, $P_y = \dfrac{\hbar}{i}\dfrac{\partial}{\partial y}$ e $P_z = \dfrac{\hbar}{i}\dfrac{\partial}{\partial z}$.

Embora tenhamos mostrado a relação entre os observáveis clássicos a, b e seus análogos na Mecânica Quântica A, B, há uma grande diferença na maneira de interpretá-los.

Na Mecânica Clássica os valores de todos os observáveis são completamente determinados, no mundo quântico isto não é verdade: em um dado estado, os observáveis tem apenas uma distribuição de propabilidade para seus valores, que eventualmente ele pode assumir num determinado ponto. O *Princípio de Incerteza de Heisenberg* traduz bastante bem essa diferença.

Enquanto que na Mecânica Newtoniana, sabendo-se a velocidade e a posição de uma partícula em um dado instante, digamos 0, é suficiente para descrevermos toda a sua trajetória e momento, em qualquer tempo, na Mecânica Quântica isso é vetado pelo Princípio de Incerteza de Heisenberg, que nos permite obter informação sobre apenas um dos observáveis, em detrimento do outro.

Para maiores detalhes acerca de Mecânica Quântica e grupos de Lie, consultar [8, 25] e [23], respectivamente.

2 Identificando $\mathbb{R}^{2n+1}$ com o Grupo de Heisenberg

Considere $\mathbb{R}^{2n+1}$ com as coordenadas

$$(x^1, \cdots, x^n, y^1, \cdots, y^n, t) =: (x, y, t)$$

e defina em $\mathbb{R}^{2n+1}$ o seguinte colchete de Lie

$$[(x, y, t), (x', y', t')] := (0, 0, [(x, y), (x', y')]), \tag{2}$$

onde

$$[(x, y), (x', y')] := 2(x \cdot y' - y \cdot x').$$

É fácil ver que $(\mathbb{R}^{2n+1}, [\ ,\ ])$ forma uma álgebra de Lie. Isto nos motiva à seguinte definição:

Definição 1. *Considere o espaço vetorial* $\mathbb{R}^{2n+1}$ *e o colchete de Lie dado por* (2). *A álgebra de Heisenberg é definida como sendo* $\mathfrak{h}_n := (\mathbb{R}^{2n+1}, [\ ,\ ])$.

Sejam $M_k(\mathbb{R}),\ k \in \mathbb{N}$, o conjunto das matrizes $k \times k$ sobre o corpo dos reais, $X_1, \cdots, X_n$, $Y_1, \cdots, Y_n,\ T$ uma base de $\mathbb{R}^{2n+1}$ e $[\ ,\ ]$ um colchete tal que as constantes de estrutura da álgebra de Lie sejam

$$[X_i, X_j] = [Y_i, Y_j] = [X_i, T] = [Y_j, T] = 0, \qquad [X_i, Y_j] = 4\delta_{ij} T. \tag{3}$$

Dado $(x, y, t) \in \mathbb{R}^{2n+1}$, defina matriz $m(x, y, t) \in M_{n+2}(\mathbb{R})$ como

$$m(x,y,t) := \begin{pmatrix} 0 & 2x^1 & \dots & 2x^n & t \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 2y^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 2y^n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Um cálculo bastante simples mostra que

$$m(x, y, t)m(x', y', t') = m(0, 0, 4x \cdot y'),$$

e se definirmos

$$M(x, y, t) := I + m(x, y, t)$$

então

$$M(x, y, t)M(x', y', t') = M(x + x', y + y', t + t' + 4x \cdot y'), \tag{4}$$

onde I denota a matriz identidade.

Além disso, tomando o comutador

$$[m(x, y, t), m(x', y', t')] = m(0, 0, 4(x \cdot y' - y \cdot x')), \tag{5}$$

a correspondência $X \mapsto M(X)$ é um isomorfismo entre $\mathfrak{h}_n$ e $\{m(X) : X \in \mathbb{R}^{2n+1}\}$, cujo correspondente grupo de Lie pode ser obtido a partir da aplicação exponencial. Decorre, de (5), que

$$m(x, y, t)^2 = m(0, 0, 4x \cdot y) \quad e \quad m(x, y, t)^k = 0 \quad \text{para } k > 2.$$

Então

$$e^{m(x,y,t)} = I + m(x, y, t) + \frac{1}{2} m(0, 0, 4x \cdot y) = M(x, y, t + 2x \cdot y). \tag{6}$$

Conseqüentemente, a aplicação exponencial é uma bijeção entre $\{m(X) : X \in \mathbb{R}^{2n+1}\}$ em $\{M(X) : X \in \mathbb{R}^{2n+1}\}$ e forma um grupo com a lei de composição dada em (4). É imediato que

$$e^{m(x,y,t)} e^{m(x',y',t')} = e^{m(x+x', y+y', t+t'+2(x \cdot y' - y \cdot x'))}.$$

Identificando cada $X \in \mathbb{R}^{2n+1}$ com a matriz $e^{m(X)}$, podemos fazer de $\mathbb{R}^{2n+1}$ um grupo, como se vê na definição que se segue:

Definição 2. *Considere a lei de composição* $\phi : \mathbb{R}^{2n+1} \times \mathbb{R}^{2n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$ *definida por*

$$\phi((x,y,t),(x',y',t')) := (x+x', y+y', t+t'+2(x'\cdot y - y'\cdot x)). \tag{7}$$

Então $(\mathbb{R}^{2n+1}, \phi) =: H^n$ *é um grupo, chamado Grupo de Heisenberg, para todo* $n \in \mathbb{N}$*.*

É fácil ver que o inverso de (x,y,t) com respeito à lei de composição (7) é o elemento $(-x,-y,-t)$.

3 Dilatações e homogeneidade

Nesta seção nos preocuparemos em apresentar as definições de dilatação e homogeneidade no grupo de Heisenberg, a partir das quais será possível calcular-se a dimensão homogênea de H^n, que necessitaremos mais adiante. Para maiores detalhes acerca deste tópico, consultar [2] e [16]. Para álgebras de Lie, veja [18].

Definição 3. *A série central descendente de uma álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ *é definida indutivamente como sendo*

$$\mathfrak{g}^1 := \mathfrak{g},$$

$$\mathfrak{g}^2 := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}],$$

$$\vdots$$

$$\mathfrak{g}^k := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{k-1}].$$

onde $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] := \{[X,Y],\ X, Y \in \mathfrak{g}\}$ *e os demais são definidos de maneira análoga.*

É claro que se existir um natural k, tal que $\mathfrak{g}^k = 0$, necessariamente teremos, para todo $l \geq k$, que $\mathfrak{g}^l = 0$.

Se $\mathfrak{g}$ é uma álgebra com esta propriedade, significa que sua série central descendente forma uma cadeia estritamente decrescente de álgebras que converge para a álgebra nula. Tais álgebras são de amplo interesse. E isso nos motiva a

Definição 4. *Uma álgebra de Lie é nilpotente se sua série central descendente se anula, ou seja, existe* $k \in \mathbb{N}$ *tal que* $\mathfrak{g}^k = 0$*.*

Neste caso, a álgebra é dita ser nilpotente de ordem $n := \min_{k\in\mathbb{N}}\{k \in \mathbb{N} \mid \mathfrak{g}^k = 0\}$*.*

Definição 5. *Uma família de dilatações em uma álgebra de Lie nilpotente* $\mathfrak{Nil}$*, com grupo associado Nil, é um grupo uniparamétrico de automorfismos da álgebra, determinada por*

$$\delta_\lambda(X_j) = \lambda^{a_j} X_j,$$

onde $X_j \in \mathfrak{Nil}$ *e* $a_j \in \mathbb{R}$*. O grupo Nil munido com as dilatações é chamado de grupo homogêneo.*

Das dilatações e da série central descendente surge a questão se uma álgebra pode ser decomposta em uma soma direta ou não. Para o Grupo de Heisenberg isso é verdade. Antes de demonstrar esta afirmação, precisamos do seguinte conceito.

Definição 6. *Uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é dita ser graduada se ela possui uma decomposição*

$$\mathfrak{g} = \sum_{j=1}^{r} \oplus \mathfrak{g}^j$$

com a seguinte propriedade: $[\mathfrak{g}^j, \mathfrak{g}^k] \subseteq \mathfrak{g}^{j+k}$*, se* $j + k \leq r$*.*

Teorema 1. *A álgebra de Heisenberg* $\mathfrak{h}_n$ *é uma álgebra graduada da forma* $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{g}^1 \oplus \mathfrak{g}^2$*, com dim* $\mathfrak{g}^2 = 1$*.*

Demonstração. Seja

$$\mathfrak{g}^1 := \{X_i,\ Y_i,\ 1 \leq i \leq n\}.$$

Pela definição das regras de comutação em H^n (equação (3)), é fácil ver que $[\mathfrak{g}^1, \mathfrak{g}^1] = \{T\}$. Definindo $\mathfrak{g}^2 := \{T\}$, vemos que $\mathfrak{g}^1 \cap \mathfrak{g}^2 = \{0\}$, $\mathfrak{g}^1 \cup \mathfrak{g}^2 = \mathfrak{h}_n$, o que conclui a demonstração. □

Definição 7. *Seja* $(\mathbb{R}^n, \phi)$ *um grupo e* $\mathfrak{g}$ *a álgebra de Lie associada. Considere* $\mathbb{R}^n$ *munido de uma estrutura homogênea determinada por uma família de automorfismos de grupos de Lie* $\{\delta_\lambda\}_{\lambda>0}$ *da forma*

$$\delta_\lambda(x) = (\lambda x^{(1)}, \lambda^2 x^{(2)}, \cdots, \lambda^r x^{(r)}), \tag{8}$$

onde $x^{(i)} \in \mathbb{R}^{n_i}$*,* $1 \leq i \leq r$ *e* $n_1 + \cdots + n_r = n$*. Para* $i = 1, \cdots, n_1$*, defina* X_i *como os únicos campos vetoriais na álgebra que na origem coincidem com a base canônica de* $\mathbb{R}^{n_1}$*. Suponha que a álgebra gerada pelos campos* $X_1, \cdots, X_{n_1}$ *seja a mesma de* $\mathfrak{g}$*.*

A terna $\mathbb{G} := (\mathbb{R}^n, \phi, \delta_\lambda)$ *é chamada Grupo de Carnot (homogêneo). Dizemos que que* $\mathbb{G}$ *é nilpotente de ordem* r *e possui* $m := n_1$ *geradores.*

Seja $A(\lambda)$ a matriz jacobiana da função dilatação dada em (8). Então

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \lambda & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda^2 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \lambda^2 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 0 & \lambda^r & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \lambda^r \end{pmatrix}.$$

Definição 8. *O número*

$$Q := traço\left(\frac{dA}{d\lambda}\,|_{\lambda=1}\right) = \sum_{j=1}^{r} j n_j \tag{9}$$

é chamado dimensão homogênea de $\mathbb{G}$.

Definição 9. *Definimos o espaço linear-homogêneo do grupo* $(\mathbb{R}^n, \phi)$ *como sendo o sub-espaço gerado pelos campos* $X_1, \cdots, X_{n_1}$.

Teorema 2. *O Grupo de Heisenbeng possui a seguinte dilatação homogênea:* $\delta_\lambda(x) = (\lambda x, \lambda y, \lambda^2 t)$, *onde* $x, y \in \mathbb{R}^n,\ t \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Primeiro, note que na notação do Teorema 1, $\mathfrak{g}^1 \cup \{[\mathfrak{g}^1, \mathfrak{g}^1]\} = \mathfrak{h}_n$. Segue, do mesmo teorema, que os Grupos de Heisenberg são nilpotentes de ordem 2. Logo, $r = 2$, o que conclui na dilatação requerida. □

A definição de grupo homogêneo exige que a álgebra gerada pelos campos vetoriais cuja dilatação é linear coincida com a álgebra de todo o espaço. Tal sub-espaço será útil mais adiante, quando estivermos tratando do operador de Kohn - Laplace.

No caso particular do grupo de Heisenberg H^n, $n_1 = 2n,\ n_2 = 1,\ r = 2$ e então, $Q = 2n+2$. Além disso, concluímos então que os Grupos de Heisenberg são casos particulares dos Grupos de Carnot.

Para encerrar esta seção, muniremos o Grupo de Heisenberg de uma norma compatível com a dilatação dada em (8), de modo a podermos introduzir uma distância em H^n.

Definição 10. *Uma função $N : H \to H$ satisfazendo*

1. $N(x) \geq 0$ *e* $N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
2. $x \mapsto N(x)$ *é contínua e diferenciável em* $H \setminus \{0\}$,
3. $N(\delta_\lambda(x)) = \lambda N(x)$,

é chamada função norma homogênea de um grupo homogêneo H.

Definição 11. *A distância entre dois pontos $P = (x, y, t)$, $P_0 \in H^n$, definida por*

$$d(P, P_0) = d(\phi(P_0^{-1}, P), 0), \tag{10}$$

onde

$$d(P, 0) := \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i^2 + y_i^2)^2 + t^2 \right)^{\frac{1}{4}},$$

é chamada distância homogênea do grupo de Heisenberg e ϕ é a lei de composição em H^n.

Do ponto de vista topológico, a definição de distância acima nos mostra que a topologia do Grupo de Heisenberg é a mesma de $\mathbb{R}^n$. Como conseqüência desta, tornaremos H^n um espaço normado, através do próximo teorema.

Teorema 3. *Seja d a função dada em (10) e defina $N(x) := d(x, 0)$. Então N é uma norma homogênea no grupo de Heisenberg H^n, chamada norma homogênea.*

Demonstração. Segue imediatamente das definições. $\square$

4 Campos invariantes à esquerda

Da lei de composição (7) decorre que as translações invariantes à esquerda no grupo de Heisenberg são

$$L_{(x,y,t)}(x', y', t) = \phi((x, y, t), (x,', y', t')).$$

Logo, uma base para a álgebra de Lie dos campos vetoriais invariantes à esquerda em H^n é dada por

$$\begin{aligned}
X_j &= \frac{d}{ds}\phi((x, y, t), (se_j, 0, 0))|_{s=0} &= \frac{\partial}{\partial x^j} + 2y^j \frac{\partial}{\partial t}, \\
Y_j &= \frac{d}{ds}\phi((x, y, t), (0, se_{n+j}, 0))|_{s=0} &= \frac{\partial}{\partial y^j} - 2x^j \frac{\partial}{\partial t}, \\
T &= \frac{d}{ds}\phi((x, y, t), (0, 0, s))|_{s=0} &= \frac{\partial}{\partial t},
\end{aligned} \tag{11}$$

onde $1 \leq \ i, j \leq n, \ e_1, \cdots, e_n, e_{n+1}, \cdots, e_{2n+1}$ são os versores canônicos de $\mathbb{R}^{2n+1}$ e os colchetes de Lie são, para todos $1 \leq j, k \leq n$,

$$[X_j, X_k] = [Y_j, Y_k] = [X_j, T] = [Y_j, T] = 0 \quad \text{e} \quad [X_j, Y_k] = -4\delta_{jk}T, \tag{12}$$

onde $\delta_{ij} = 0$, se $i \neq j$ e $\delta_{ij} = 1$, se $i = j$.

5 A geometria do Grupo de Heisenberg

Nesta sessão apresentaremos os principais fatos, do ponto de vista da geometria, relacionados ao grupo de Heisenberg H^n. Como conseqüência direta dos campos invariantes à esquerda temos o

Teorema 4. *Os campos vetorias invariantes à esquerda* (11) *determinam a seguinte métrica no grupo de Heisenberg H^n:*

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \delta_{ij} + 4y_i y_j, \quad 1 \leq i, j \leq n, \\ g_{ij} &= \delta_{ij} + 4x_i x_j, \quad 1 \leq i, j \leq n, \\ g_{ij} &= -4x_i y_j, \quad 1 \leq i, j \leq n, \\ g_{2n+1\ 2n+1} &= 1, \end{aligned}$$

cuja representação matricial é

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1+4y_1^2 & 4y_1y_2 & \cdots & 4y_1y_n & -4x_1y_1 & -4x_1y_2 & -4x_1y_n & -2y_1 \\ 4y_1y_2 & 1+4y_2^2 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & -4x_2y_n & -2y_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 4y_1y_n & \cdots & \cdots & 1+4y_n^2 & \cdots & \cdots & -4x_ny_n & -2y_n \\ -4x_1y_1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1+4x_1^2 & \cdots & 4x_1x_n & 2x_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -4x_ny_1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1+4x_n^2 & 2x_n \\ -2y_1 & -2y_2 & \cdots & 2y_n & 2x_1 & \cdots & 2x_n & 1 \end{pmatrix}.$$

No caso particular em que $n = 1$, obtemos

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + (2ydx - 2xdy + dt)^2 \tag{13}$$

e a matriz associada é

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1+4y^2 & -4xy & -2y \\ -4xy & 1+4x^2 & 2x \\ -2y & 2x & 1 \end{pmatrix}.$$

Demonstração. Basta notar que a identidade no grupo de Heisenberg é a origem e que neste ponto o produto interno coincide com o do $\mathbb{R}^{2n+1}$. Tomando o produto interno dos campos (11) neste ponto obtemos o resultado desejado. □

Sejam $\{\Gamma^i_{jk}\}$, $1 \leq i, j, k \leq 3$, uma família de funções com três índices e a partir desta família, para cada índice superior fixado i, considere a matriz 3×3 $\Gamma^i := (\Gamma^i_{jk})$. Como conseqüência do Teorema 4, podemos calcular os símbolos de Christoffel de H^1. Tais símbolos nos são dados pelo próximo resultado.

Corolário 1. *Os símbolos de Christoffel de H^1 são:*

$$\Gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 4y & 0 \\ 4y & -8x & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma^2 = \begin{pmatrix} -8y & 4x & 2 \\ 4x & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma^3 = \begin{pmatrix} 16xy & -8(x^2-y^2) & -4x \\ -8(x^2-y^2) & -16xy & -4y \\ -4x & -4y & 0 \end{pmatrix}.$$

Sabendo-se os símbolos de Christoffel é imediato, embora tedioso, o cálculo de curvaturas. Uma que nos interessa em particular é a seccional.

Teorema 5. *A curvatura seccional de H^1 é não constante.*

Demonstração. Seja K a curvatura seccional de H^1. Como

$$\begin{aligned} K(X,Y) &= -\frac{3}{4}, \\ K(X,T) &= K(Y,T) = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

concluímos o resultado desejado. □

O resultado do Teorema 5 vale para H^n, $n \geq 1$. Neste caso, trocando-se $X \leftrightarrow X_i$, $Y \leftrightarrow Y_i$, obteremos os valores das curvaturas seccionais nos sub-espaços bidimensionais gerados pelos campos X_i, Y_i, T.

Definição 12. *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana n dimensional e $p \in M$. Um campo vetorial*

$$X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in T_pM^1$$

[1] No que segue, estaremos adotando a convenção de soma de índices repetidos.

é uma isometria se a derivada de Lie da métrica se anula, isto é,

$$\mathcal{L}_X g_{ij} := \xi^k \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + g_{ik} \frac{\partial \xi^j}{\partial x^k} + g_{jk} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^k} = 0. \tag{14}$$

Neste caso o campo X é chamado campo de Killing. O conjunto de todos os campos de Killing de uma variedade Riemanniana é chamado grupo de isometrias.

Teorema 6. *Seja (M,g) uma variedade Riemanniana de dimensão $n \geq 2$ conexa. Então a dimensão do grupo de isometrias $\mathfrak{I}$ não excede $\frac{n(n+1)}{2}$ e este valor é atingido se, e somente se, a curvatura seccional de M for constante.*

Demonstração. Consulte [27]. □

Teorema 7. *Nas hipóteses do teorema precedente, o grupo de isometrias não pode ser $\frac{n(n+1)}{2} - 1$.*

Demonstração. Consulte [12]. □

Combinando os resultados dos teoremas 6 e 7, concluímos que se M é uma variedade Riemanniana conexa, de curvatura seccional não-constante e de dimensão maior que 1, o grupo de isometrias é no máximo $\frac{n(n+1)}{2} - 2$. Este é o caso do Grupo de Heisenberg.

Para concluirmos isto, note que, do ponto de vista topológico, H^n é $\mathbb{R}^{2n+1}$. Como este é conexo, então H^n também o é. Decorre do Teorema 5 que as curvaturas seccionais de H^n não são constantes. Então, o grupo de isometrias de H^n possui no máximo $(2n+1)(n+1) - 2$ campos vetoriais (lembramos que a dimensão de H^n é $2n+1$). O próximo teorema nos fornece uma base para o grupo de isometrias de H^1.

Teorema 8. *Seja H^1 o grupo de Heisenberg tridimensional. Então a álgebra de Lie das isometrias infinitesimais é gerada pelos seguintes campos vetoriais:*

$$T := \frac{\partial}{\partial t}, \quad R := y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}, \quad \tilde{X} := \frac{\partial}{\partial x} - 2y\frac{\partial}{\partial t}, \quad \tilde{Y} := \frac{\partial}{\partial y} + 2x\frac{\partial}{\partial t}, \tag{15}$$

que correspondem, respectivamente, a uma translação em t, uma rotação no plano x-y e os geradores da multiplicação à direita em H^1.

Demonstração. Primeiro, note que que os quatro campos dados em (15) são linearmente independentes. Além disso, a dimensão do grupo de isometrias para H^1 é 4. Desde que os campos (15) satisfazem a equação (14), concluímos que (15) é uma base para a álgebra de Lie das isometrias, que é o resultado desejado. □

Em virtude dos teoremas 5, 6 e 7, os campos de Killing dados acima são maximais (no sentido em que eles atingem o maior número de campos possíveis para um variedade de curvatura seccional não constante).

Terminamos esta seção fazendo a seguinte observação: não há uma uniformização na maneira de se expressar os campos vetoriais (11). É possível encontrar expressões do tipo

$$\begin{aligned} X_j &= \frac{\partial}{\partial x^j} + \frac{1}{2} y^j \frac{\partial}{\partial t}, \qquad j = 1, \cdots, n, \\ Y_j &= \frac{\partial}{\partial y^j} - \frac{1}{2} x^j \frac{\partial}{\partial t}, \qquad j = 1, \cdots, n. \end{aligned} \tag{16}$$

como por exemplo, em ([7, 19] e [22]), como as mesmas expressões dadas em (11) em ([1, 13] e [17]). Ni ([20] e [21]) ainda fornece uma maneira mais geral, que engloba as duas acima mencionadas. Essencialmente, o fator modificado na última parte do membro direito das definições dos campos vetoriais mudam apenas a constante de estrutura do comutador de X_i, Y_j. Tomando por exemplo (16), teremos $[X_i, Y_j] = -\delta_{ij}\dfrac{\partial}{\partial t}$.

6 O operador de Kohn - Laplace

Doravante, seja $f(u)$ uma função diferenciável. Denotaremos por $F(u)$ uma primitiva de $f(u)$, isto é, $F'(u) = f(u)$. Sejam X_i, Y_i são dados em (11).

Definição 13. *Seja $\phi : \mathbb{R}^{2n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. O campo*

$$\nabla_{H^n}\phi = (X_1, \cdots, X_n, Y_1, \cdots, Y_n)\phi := (X_1\phi, \cdots, X_n\phi, Y_1\phi, \cdots, Y_n\phi) \tag{17}$$

é o campo gradiente[2] *no espaço linear-homogêneo do Grupo de Heisenberg H^n.*

Definição 14. *O operador*

$$\Delta_{H^n} := \sum_{i=1}^{n} (X_i^2 + Y_i^2)$$

é chamado operador de Kohn - Laplace (no grupo de Heisenberg H^n).

Sejam a_{ij} os coeficientes das derivadas parciais segundas do operador Δ_{H^n}. Se definirmos a matriz $A \in M_{2n+1}(\mathbb{R})$ como $A := (a_{ij})$, então $\det A = 0$. Isso quer dizer que o operador Δ_{H^n} é um operador fortemente degenerado. Além disso, Δ_{H^n} é um operador hipoelíptico. Para maiores detalhes acerca de operadores hipoelípticos, consulte [16].

Como o operador de Kohn - Laplace é a soma de quadrados de campos vetoriais e estes campos juntamente com seu colchete de Lie geram toda a álgebra de Lie, tal operador é chamado *sub-laplaciano*.

[2]Somos da opinião que o campo gradiente de um espaço é formado por todos os campos vetoriais que geram sua álgebra de Lie. Assim, o campo gradiente do Grupo de Heisenberg é, a nosso ver, dado por $\nabla_{H^n}\phi = (X_1, \cdots, X_n, Y_1, \cdots, Y_n, T)\phi := (X_1\phi, \cdots, X_n\phi, Y_1\phi, \cdots, Y_n\phi, T\phi)$. Todavia, diversos autores (veja por exemplo [15]) definem o campo gradiente em H^n como dado pela equação (17), definição esta que discordamos e, por isto, optamos por propor uma definição alternativa. Embora Citti e Uguzzoni (vide [6]) definam (17) como sendo o gradiente subelítico (que faz mais sentido do que gradiente em H^n), tal definição é fortemente influênciada pelo fato do operador de Kohn - Laplace ser subelítico e deixa o aspecto geométrico da definição em segundo plano.

Definição 15. *A equação semilinear*

$$\Delta_{H^n} u + f(u) = 0, \tag{18}$$

onde

$$\Delta_{H^n} u := \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^{i\,2}} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^{i\,2}} + 4(x^{i\,2} + y^{i\,2}) u_{tt} + 4y^i \frac{\partial^2 u}{\partial x^i\, \partial t} - 4x^i \frac{\partial^2 u}{\partial y^i\, \partial t} \right)$$

é chamada equação semilinear de Kohn - Laplace no Grupo de Heisenberg.

A equação semilinear de Kohn - Laplace possui estrutura variacional e é obtida da seguinte Lagrangeana

$$\mathcal{L} := \frac{1}{2} \|\nabla_{H^1} \phi\|^2 - F(u),$$

via equação de Euler - Lagrange, onde

$$\|\nabla_{H^1} \phi\|^2 := \sum_{i=0}^{n} [(X_i u)^2 + (Y_i u)^2].$$

Teorema 9. *Sejam* $u : \mathbb{R}^{2n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função diferenciável e* $\mathcal{L}$ *a correspondente Lagrangeana*

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} [(X_i u)^2 + (Y_i u)^2] - F(u). \tag{19}$$

A equação de Euler - Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - D_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i} = 0, \tag{20}$$

onde

$$\begin{array}{ccccl} D_i & = & D_{x^i} & := & \dfrac{\partial}{\partial x^i} + u_{x^i} \dfrac{\partial}{\partial u}, \quad 1 \leq i \leq n, \\[2ex] D_{n+i} & = & D_{y^i} & := & \dfrac{\partial}{\partial y^i} + u_{y^i} \dfrac{\partial}{\partial u}, \quad 1 \leq i \leq n, \\[2ex] D_t & = & D_{2n+1} & := & \dfrac{\partial}{\partial t} + u_t \dfrac{\partial}{\partial u}, \end{array}$$

é equivalente à equação semilinear de Kohn - Laplace.

Demonstração. Note que a função $\mathcal{L}$ ser reescrita como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} [u_{x_i}^2 + u_{y_i}^2 + 4y_i u_{x_i} u_t - 4x_i u_{y_i} u_t + 4(x_i^2 + y_i^2) u_t^2] - F(u) \tag{21}$$

Derivando $\mathcal{L}$ em relação a u_{x_i}, u_{y_i}, t, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{x_i}} &= X_i u, \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{y_i}} &= Y_i u, \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} &= 2y_i X_i u - 2x_i Y_i u \\
D_{x_j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{x_i}} &= u_{x_i x_j} \delta_{ij} \\
D_{y_j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{y_i}} &= u_{y_i y_j} \delta_{ij} \\
D_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} &= 2y_i u_{tx_i} - 2x_i u_{ty_i} \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} &= -f(u).
\end{aligned} \tag{22}$$

Substituindo (22) em (20), obtemos

$$\Delta_{H^n} u + f(u) = 0.$$

□

Duas funções diferenciáveis $u, v : \Omega \subseteq \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ que satisfaçam as equações

$$\begin{aligned}
u_{x_i} &= v_{y_i} \\
u_{y_i} &= -v_{x_i}
\end{aligned}$$

são chamadas conjugadas harmônicas e satisfazem a equação de Laplace $2n$ - dimensional. Nossa intenção aqui é mostrar que no Grupo de Heisenberg H^n também existem funções que cumprem condições similares, e que no caso particular de elas não dependerem do último argumento, ou seja, quando ocorre um mergulho de $\mathbb{R}^{2n}$ em $\mathbb{R}^{2n+1}$, tais condições se tornam as condições de Cauchy - Riemann.

Definição 16. *Duas funções $\phi, \psi : \mathbb{R}^{2n+1} \to \mathbb{R}$ cumprem as condições de Cauchy - Riemann no Grupo de Heisenberg H^n se elas satisfazem o seguinte sistema de equações:*

$$\begin{aligned}
X_i \phi &= Y_i \psi \quad i = 1, \cdots, n, \\
Y_i \phi &= -X_i \psi \quad i = 1, \cdots, n.
\end{aligned} \tag{23}$$

Teorema 10. *Suponha que ψ e ϕ satisfaçam* (23). *Então elas satisfazem o sistema*

$$\begin{aligned} \Delta_{H^n}\phi &= -4n\psi_t \\ \Delta_{H^n}\psi &= 4n\phi_t. \end{aligned} \tag{24}$$

Demonstração. Aplicando X_i e Y_i, $i = 1, \cdots, n$ à Eq. (23) e utilizando (12), obtemos

$$(X_i^2 + Y_i^2)\phi = [X_i, Y_i]\psi = -4\psi_t$$

somando os índices, conclui-se que

$$\Delta_{H^n}\phi = -4n\psi_t$$

A outra equação é obtida de modo análogo. □

No caso em que $\phi_t = \psi_t = 0$, as equações (23) e (24) se transformam, respectivamente, nas condições de Cauchy - Riemann e na equação de Laplace.

As equações (23) surgem, por exemplo, no cálculo do grupo de simetrias de Lie da equação (18).

Uma simetria de Lie de uma equação diferencial parcial (EDP) de ordem n, com m variáveis independentes $F(x, u, \partial u, \cdots, \partial^n u) = 0$, onde $x = (x^1, \cdots, x^m) \in \mathbb{R}^m$, $u = u(x)$ é a variável dependente e $\partial^j u, 1 \leq j \leq n$ denota o conjunto das derivadas de ordem j de u, é um campo vetorial da forma

$$X = \xi^i(x, u)\frac{\partial}{\partial x^i} + \eta(x, u)\frac{\partial}{\partial u},$$

tal que o elemento $(x^*, u^*) := (\exp X)(x, u)$ deixa a EDP $F = 0$ invariante. Isto é, se (x, u) satisfaz $F(x, u, \partial u, \cdots, \partial^n u) = 0$, então $F(x^*, u^*, \partial u^*, \cdots, \partial^n u^*) = 0$.

No caso particular do Grupo de Heisenberg tridimensional, em [5], é feita a completa classificação dos grupos de simetrias da equação semilinear de Kohn - Laplace em H^1

$$\Delta_{H^1} u + f(u) = u_{xx} + u_{yy} + 4(x^2 + y^2)u_{tt} + 4yu_{xt} - 4xu_{yt} + f(u) = 0, \tag{25}$$

Neste trabalho é mostrado que para qualquer função $f(u)$ diferenciável, o grupo de isometrias (15) é sempre um (sub)grupo de simetrias de Lie. Este fato mostra a dependência da equação (25) com relação à geometria de H^1.

Para $n > 1$, a classificação dos grupos de simetrias é uma questão em aberto. Uma conjectura bastante razoável é que para qualquer dimensão, o grupo de isometrias de H^n seja um (sub)grupo do grupo de simetrias.

A partir dos grupos de simetrias é possível encontrar-se soluções da equação (25) (ou de (18), para $n > 1$).

A existência de soluções de tais equações é um campo muito rico na matemática atual e amplamente pesquisado, como se pode ver nas referências [2, 6, 13, 14, 15, 17].

Estimativas a priori das mesmas, expressas por leis de conservação, foram recentemente estabelecidas, para $n = 1$, a partir do conhecimento dos grupos de simetrias de (25). Para maiores detalhes, consulte [4, 10].

Para funções do tipo potência, $f(u) = u^p$, se $p = 1$ o grupo de simetrias torna-se infinito. Quando $p = 3$, o grupo de simetrias possui dimensão 8 e neste caso, todas as simetrias encontradas são simetrias que admitem leis de conservação (vide [3] e [4]). De todos os casos não-lineares possíveis, quando $f(u) = u^3$, o grupo de simetrias é o que possui o maior número de campos vetoriais. Tal potência é chamado expoente crítico de Sobolev, e vale $p := \frac{Q+2}{Q-2}$, onde $Q = 4$ é a dimensão homogênea de H^1.

7 Conclusão

Neste trabalho introduzimos os grupos de Heisenberg do ponto de vista geométrico e explicamos sua gênese a partir da Mecânica Quântica.

Apresentamos também o operador de Kohn - Laplace, que é o protótipo de operadores subelípticos, e mostramos algumas conexões entre este operador e a geometria do Grupo de Heisenberg de dimensão 3, além de comentarmos alguns resultados recentes e outros em aberto envolvendo a equação de Kohn - Laplace e H^n, $n > 1$.

Acknowledgements

Agradeço ao Lab. EPIFISMA (Proj. FAPESP) por haver-me proporcionado a oportunidade de utilizar seus excelentes recursos computacionais. Sou grato à UNICAMP pelo suporte financeiro, através do Programa PED A.

Referências

[1] R. Beals, Geometry and PDE on the Heisenberg group: a case study, Geometrical study of differential equations, Contemporary Mathematics, 285, Amer. Math. Soc., Providence, 21 - 27, (2001).

[2] A. Bonfiglioli and F. Uguzzoni, Nonlinear Liouville theorems for some critical problems on H-type groups, J. Func. Annal., 207, 161 - 215, (2004).

[3] Y. D. Bozhkov and I. L. Freire, Divergence symmetries of critical Kohn-Laplace equations on Heisenberg groups, Quaderni Matematici, nº 571, Università di Trieste, (2006).

[4] Y. D. Bozhkov and I. L. Freire, Conservation Laws For Critical Kohn-Laplace Equations On The Heisenberg Group, Relatório de Pesquisa 04/07, Imecc - Unicamp, (2007).

[5] Y. D. Bozhkov and I. L. Freire, Group classification of semilinear Kohn-Laplace equations, Nonlinear Anal., (2007) - no prelo.

on Heisenberg groups, Differ. Equ./Diff. Uravn., (2007) - no prelo.

[6] G. Citti, and F. Uguzzoni, Critical semilinear equations on the Heisenberg group: the effect of the topology of the domain, Nonlinear Anal. 46, nº 3, 399-417, (2001).

[7] C. B. Figueroa, *Geometria das subvariedades do grupo de Heisenberg*, Tese de Doutorado em Matemática, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, (1996).

[8] V. A. Fock, *Princípios de Mecânica Quântica*, Editora Mir, Moscou, (1986).

[9] G. B. Folland, *Harmonic Analysis in Phase Space*. Annals of Mathematics Studies, nº 122, Princeton University Press, (1989).

[10] I. L. Freire, Noether Symmetries and Conservations Laws For Non-Critical Semilinear Kohn - Laplace Equations On Three-Dimensional Heisenberg Group, Algebras, Groups and Geometries (2007) - no prelo.

[11] I. L. Freire, Simetrias de Lie de Equações Diferenciais Parciais Semilineares Envolvendo o Operador de Kohn - Laplace no Grupo de Heisenberg, Tese de Doutorado em Matemática Aplicada, IMECC - UNICAMP, (2007) - a ser defendida.

[12] G. Fubini, Sugli sapazi che ammettono un gruppo continuo di movimenti, Ann. di Matem. Tomo 8, serie III, 39-82, (1903).

[13] N. Garofalo and E. Lanconelli, Frequency functions on the Heisenberg group, the uncertaity principle and unique continuation, Ann. Inst. Fourier, 40, 313 - 356, (1990).

[14] N. Garofalo and E. Lanconelli, Existence and nonexistence results for semilinear equations on the Heisenberg group, Indiana Univ. Math. J., 41, 71 - 97, (1992).

[15] E. Lanconelli and F. Uguzzoni, Nonexistence Results for Semilinear Kohn-Laplace Equations in Unbounded Domains, Comm. Part. Diff. Equ., vol. 25, 9-10, 1703-1740, (2000).

[16] L. P. Rothschild and E. M. Stein, Hypoelliptic Differential Operators and Nilpotent Groups, Acta Math., 137(3-4), (1976).

[17] S. Maad, Infinitely many solutions of a semilinear problem for the Heisenberg laplacean on the Heisenberg Group, Manuscripta Math., 116, 357 - 384, (2005).

[18] L. A. B. S. Martin, *Álgebras de Lie*, Editora da Unicamp, Campinas, (1999)

[19] F. Mercuri, S. Montaldo and P. Piu, A Weierstrass Representation Formula for Minimal Surfaces in H_3 and $H^2 \times \mathbb{R}$, Acta Math. Sin., published online, (2005).

[20] Y. Ni, Geodesics in manifold with Heisenberg Group as a Boundary, Canad. J. Math., vol. 56, 566 - 589, (2004).

[21] Y. Ni, The heat kernel and Green's function on a manifold with Heisenberg Group as boundary, Canad. J. Math., vol. 56, 590 - 611, (2004).

[22] I. I. Onnis, *Superfícies em certos espaços homogêneos tridimensionais*, Tese de Doutorado em Matemática, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, (2005).

[23] D. H. Sattinger and O. L. Weaver, *Lie Groups and Algebras with Applications to Physics, Geometry and Mechanics*, Applied Mathematical Sciences, Springer - Verlag, New York, (1986).

[24] S. Semmes, An introduction to Heisenberg groups in analysis and geometry, Notices of the American Mathematical Society, n^o 6, vol 50, 640-646, (2003).

[25] C. C. Tannoudji, B. Diu and F. Laloë, *Quantum Mechanics*, Wiley - Interscience publications, (1977).

[26] W. P. Thurston, *Three-dimensional geometry and topology*, Vol. 1, Princeton University Press, Princeton, NJ, (1997).

[27] K. Yano, *The theory of Lie derivatives and its applications*, North-Holland publishing Co., (1955).